Приложение тройного интеграла

- Объём тела T:

$$\boxed{V = \iiint\limits_T dxdydz}$$

- Масса неоднородного тела T с плотностью $\rho = f(x, y, z)$

$$\boxed{m = \iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz}$$

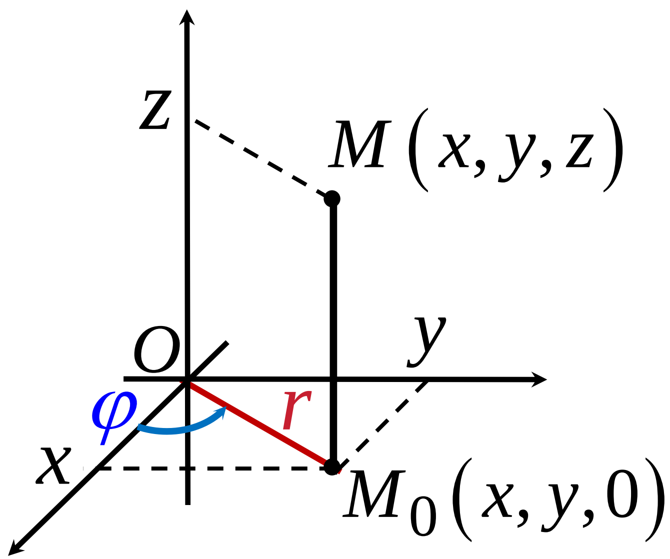
Приложение тройного интеграла

- Координаты центра тяжести пластины D:

$$\boxed{x_0 = \frac{\iiint\limits_T x\, f(x, y, z)dxdydz}{m},}\quad \boxed{y_0 = \frac{\iiint\limits_T y\, f(x, y, z)dxdydz}{m},}$$

$$\boxed{z_0 = \frac{\iiint\limits_T z\, f(x, y, z)dxdydz}{m}}$$

Цилиндрические координаты



$r = |OM_0|$

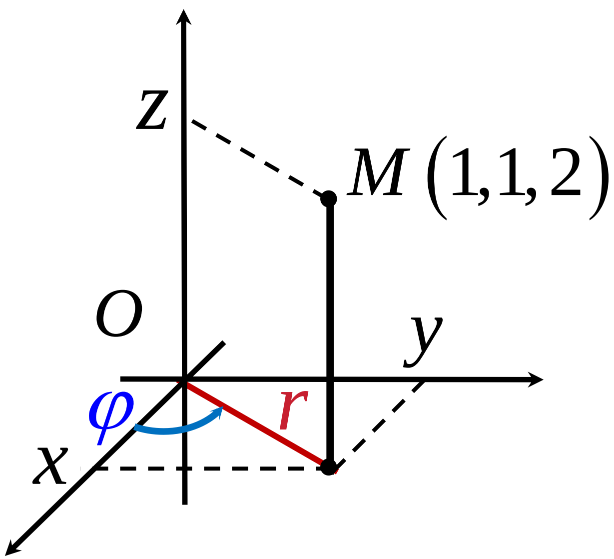
φ – наименьший угол от оси Ox до вектора $\overrightarrow{OM_0}$

$$0 \le r < +\infty$$
$$0 \le \varphi < 2\pi$$
$$-\infty < z < +\infty$$

(x, y, z) – декартовы координаты точки M

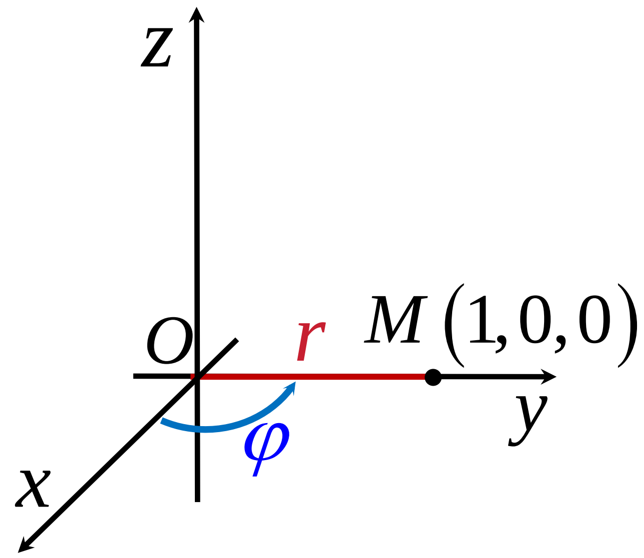
(r, φ, z) – цилиндрические координаты точки M

Цилиндрические координаты. Примеры



$r = ?\quad \varphi = ?$

$z = ?$



$r = ?\quad \varphi = ?$

$z = ?$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Якобиан

$$J(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \text{ (упр.)}$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz =\\ &= \iiint_{T'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\; drd\varphi dz\end{aligned}}$$

формула перехода от декартовых координат к цилиндрическим в тройном интеграле

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Теорема 1. Пусть

- функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в пространственной области (теле) T;
- область T' в цилиндрической системе координат задана неравенствами

$$\boldsymbol{\alpha \le \varphi \le \beta,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi),}$$
$$\boldsymbol{z_1(r, \varphi) \le z \le z_2(r, \varphi)}$$

для непрерывно дифференцируемых функций $r_1(\varphi), r_2(\varphi), z_1(r, \varphi),\ z_2(r, \varphi)$.

Замена переменных в тройном интеграле

Тогда (вычисление тройного интеграла *I* способом)

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz =$$

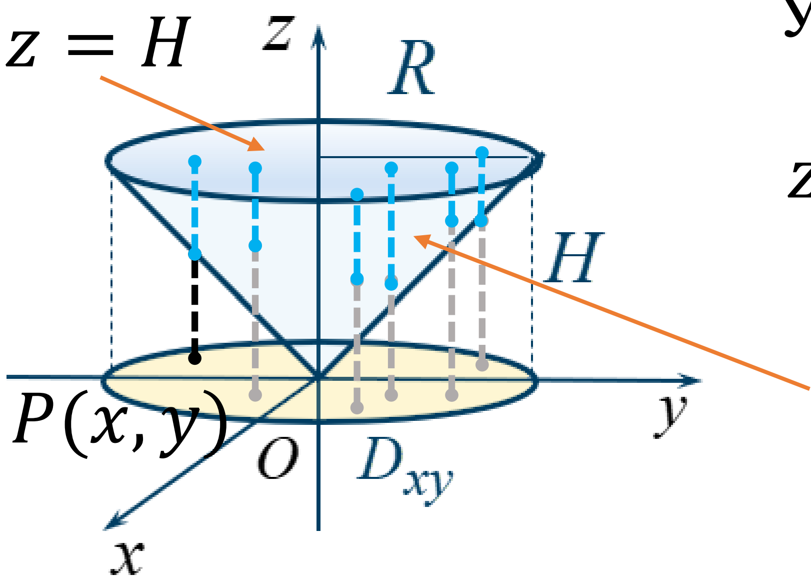
$$= \iiint_{T'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\ dr d\varphi dz =$$

$$= \iint_{D_{xy}} dr d\varphi \int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r dr$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*I* способ)

<u>Пример 1</u>. Вычислить объем конуса с радиусом основания R и высотой H.

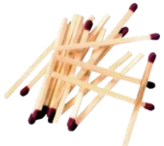


Уравнение конуса (упр.):

$$z^2 = \frac{H^2}{R^2}(x^2 + y^2)$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$$



Способ-СПИЧКИ

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*I* способ)

Способ-
СПИЧКИ

$$T:\begin{cases} x^2+y^2\le R^2 \\ \dfrac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ \quad z=z \end{cases} \Rightarrow T':\begin{cases} r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\le R^2 \\ \dfrac{H}{R}\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\le z\le H \end{cases}$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*I* способ)

Способ-**СПИЧКИ**

$$\Rightarrow T':\begin{cases} r^2 \le R^2 \\ \dfrac{H}{R}\sqrt{r^2} \le z \le H \end{cases} \Rightarrow T':\begin{cases} 0 \le r \le R \\ \dfrac{H}{R} r \le z \le H \end{cases}$$

$$\Rightarrow T':\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \\ \dfrac{H}{R} r \le z \le H \end{cases} \qquad \left(T':\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \\ z_1(r,\varphi) \le z \le z_2(r,\varphi) \end{cases} \right)$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*I* способ)

Способ-спички

$$\Rightarrow V = \iiint_T dxdydz =$$

(см. приложения тройного интеграла)

$$= \iiint_{T'} r\; dr d\varphi dz = \text{(см. теорему 2)}$$

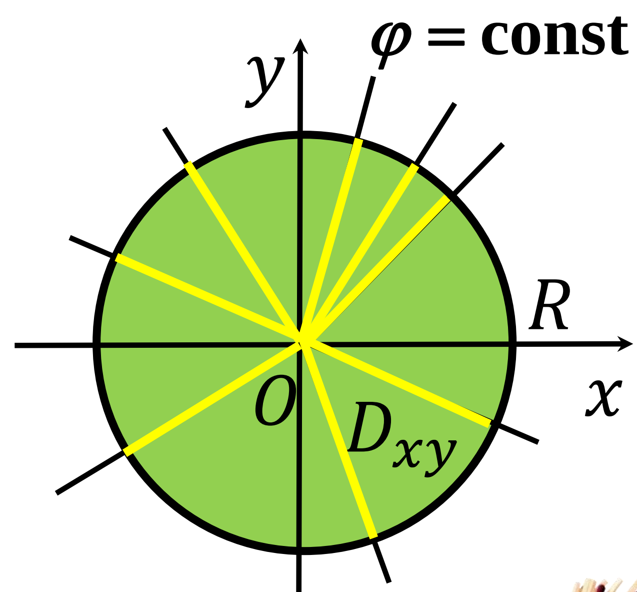
$$= \iint_{D_{xy}} dr d\varphi \int_{\frac{H}{R} r}^{H} r dz = \text{(см. } I \text{ способ}$$

вычисления тройного интеграла)

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*I* способ)

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr \int_{\frac{H}{R}r}^{H} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr\,(z)\Big|_{\frac{H}{R}r}^{H} =$$



Способ-спички

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*I* способ)

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\left(H - \frac{H}{R} r\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} H - \frac{H}{R}\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{R^2}{6} H\right) =$$

$$= \frac{R^2 H}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2 H}{6} 2\pi = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

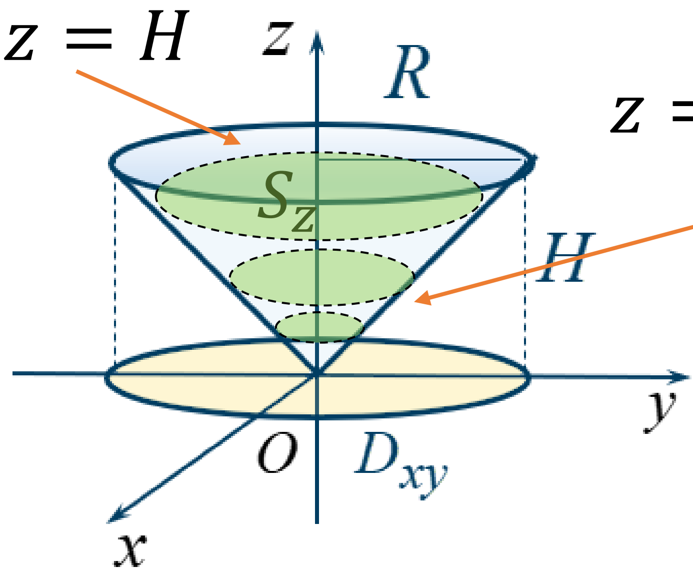
Способ-СПИЧКИ

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*I* способ)

Замечание 1.

- *Цилиндрическая система* координат является обобщением *полярной системы* координат.
- Интегрирование в цилиндрической системе координат удобно использовать, когда область D_{xy} ограничена дугами окружностей.

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*II* способ)



$$z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Способ -СЛОИ

1) Фиксируем $z = const$

$0 \le z \le H \Rightarrow$
$z = 0$ – дно,
$z = H$ – верх

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*II* способ)

$$2)\ V = \iiint_T dxdydz =$$

$$= \iiint_{T'} r\ drd\varphi dz = (\text{см. теорему } 2)$$

$$= \int_0^H dz \iint_{S_z} dxdy = \ (\text{см. } II \text{ способ}$$

вычисления тройного интеграла)

Способ -СЛОИ

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*II* способ)

$$= \int_0^H I(z)dz\,,\ \text{где}\ I(z) = \iint_{S_z} dxdy$$

3) Вычисляем

$$I(z) = \iint_{S_z} dxdy = \pi r^2 = \pi \frac{R^2}{H^2} z^2$$

$$\left(r = \frac{R}{H} z - \text{упр., см. рис.} \right)$$

Способ -СЛОИ

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*II* способ)

4) Вычисляем

$$V = \int_0^H I(z)dz = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} z^2\, dz =$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H z^2\, dz = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{z^3}{3} \Bigg|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Способ - **СЛОИ**

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 1 (*II* способ)

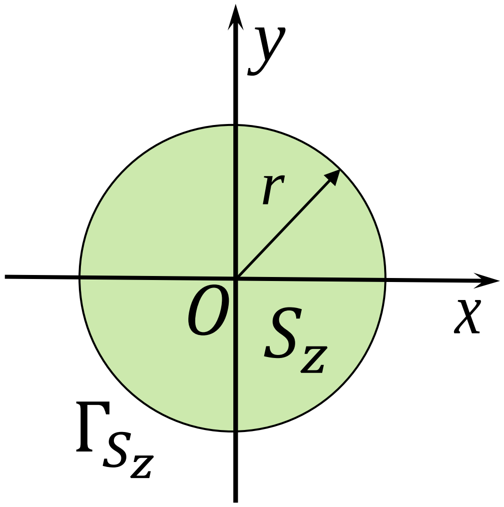
Способ -**СЛОИ**

$$T:\begin{cases} x^2+y^2\le R^2 \\ \dfrac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x^2+y^2=R^2 \\ \Rightarrow \Gamma_T: z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} & \left(z^2=\frac{H^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)\right) \\ & z=H \end{aligned}$$

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*II* способ)

Способ -СЛОИ



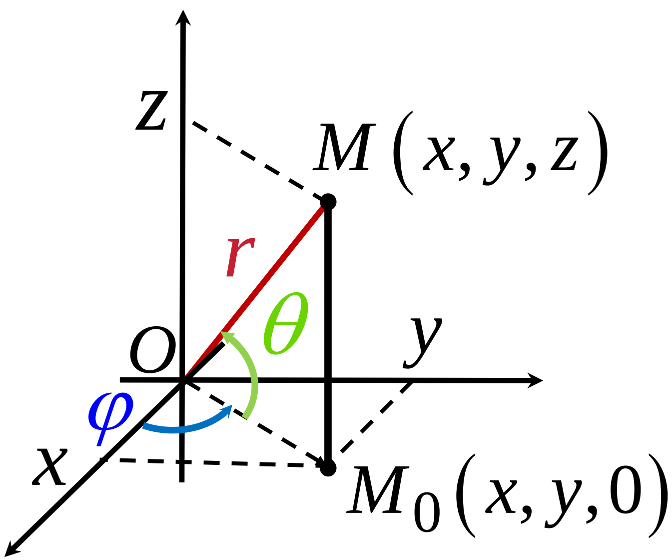
$$z^2 = \frac{H^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$$

Из Γ_D получаем:

Γ_{S_z}: $x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H^2} z^2$ – окружность с радиусом $r = \dfrac{R}{H} z$

Сферические координаты



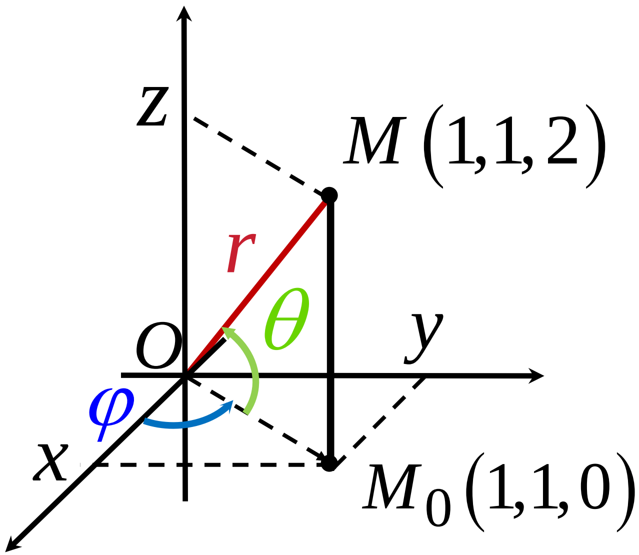
$r = |OM|$

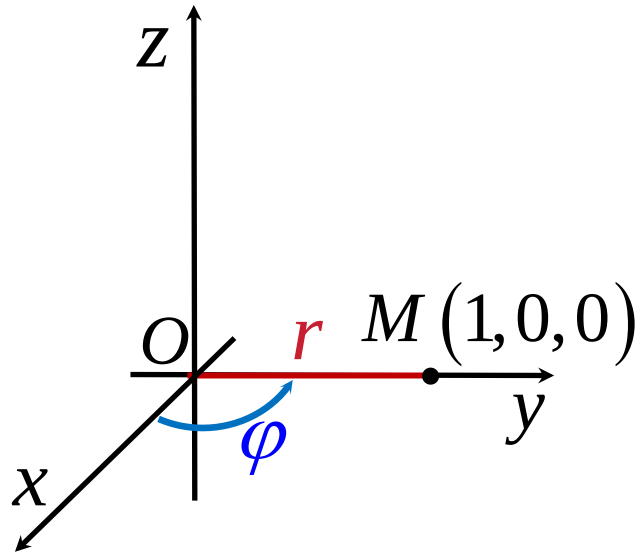
φ – наименьший угол от оси Ox до вектора $\overrightarrow{OM_0}$

θ – наименьший угол от $\overrightarrow{OM_0}$ до $\overrightarrow{OM}$.

(r, φ, θ) – сферические координаты точки M

Сферические координаты. Примеры





$r = ?\quad \varphi = ?$

$\theta = ?$

$r = ?\quad \varphi = ?$

$\theta = ?$

Тройной интеграл в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

Якобиан

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = r^2\cos\theta$$

(упр.)

Тройной интеграл в сферических координатах

$$\iiint_T f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \iiint_{T'} f(r\cos\varphi\cos\theta\,, r\sin\varphi\cos\theta\,,$$

$$r\sin\theta) \cdot r^2\cos\theta \;\; drd\varphi d\theta$$

формула перехода от декартовых координат к сферическим в тройном интеграле

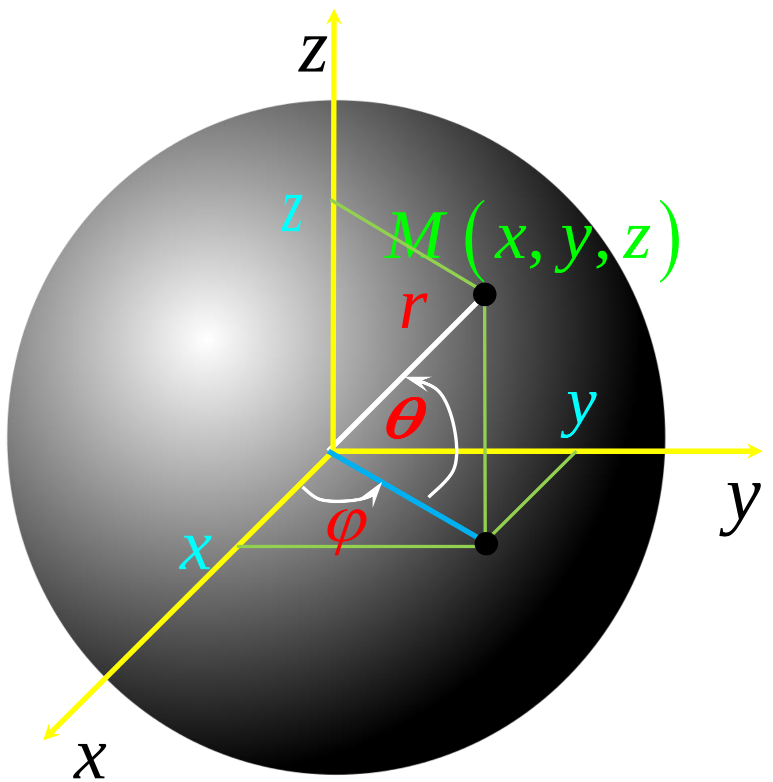
Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 2

<u>Пример 2</u>. Вычислить объем шара радиуса R.

$$V_{\text{шара}} = \iiint_T dxdydz = \iiint_{T'} r^2 \cos\theta \, drd\varphi d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cos\theta \, dr =$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 2



$$0 \le r \le R$$

$$0 \le \varphi < 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 2

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\theta \int_0^R r^2 dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{R^3}{3} =$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример 2

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \, \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3} (\sin\theta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Тройной интеграл в сферических координатах.

Замечание 2.

- *Сферическая система* координат тоже является обобщением *полярной системы* координат.
- Интегрирование в сферической системе координат удобно использовать, когда тело T ограничена дугами больших окружностей шара.