ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ЮГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Финогенов А.А.
Финогенова О.Б.

Руководство по решению задач по аналитической геометрии

Учебно-методическое пособие
для студентов всех форм обучения

Ханты-Мансийск
2008

УДК 514.12
ББК 22.151.5
Ф 60

Рецензент д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики ЮГУ Пятков С.Г.

Финогенов А.А., Финогенова О.Б.

Руководство по решению задач по аналитической геометрии: Учебно–методическое пособие по аналитической геометрии для студентов всех форм обучения. / Финогенов А.А., Финогенова О.Б. — Ханты-Мансийск, Югорск. гос. ун-т, 2008. — 46 с.

В пособии приведены решения базовых задач из трех разделов аналитической геометрии: векторная алгебра, прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве.

УДК 514.12
ББК 22.151.5

Предисловие

В настоящем «Руководстве» приведены подробные решения базовых задач аналитической геометрии, без которых невозможно решение ни одной из задач курса. Задачи сгруппированы по разделам: векторная алгебра (операции над векторами, координаты векторов, скалярное произведение), прямая и плоскость в пространстве, прямая на плоскости. В начале каждого раздела приведен набор формул и сведений, требуемый для решения предлагаемых задач. Система координат — прямоугольная декартова. В конце пособия содержится список литературы, позволяющей более глубоко освоить теоретический материал.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения.

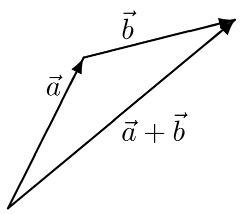
Глава 1

Векторная алгебра

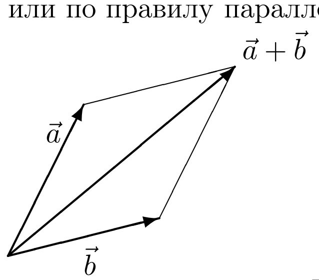
1.1 Векторы, координаты вектора, операции над ними

Сведения, требуемые для решения задач этого раздела.

- Два вектора равны тогда и только тогда, когда они одинаково направлены и равны по длине. У равных векторов одинаковые координаты.
- Если начало вектора находится в точке $A(x_1, y_1, z_1)$, а конец вектора в точке $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются так: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.
- Векторы складываются по правилу треугольника



или по правилу параллелограмма



- При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор $\overrightarrow{ka}$, длина которого равна $|k||\vec{a}|$, а направление зависит от

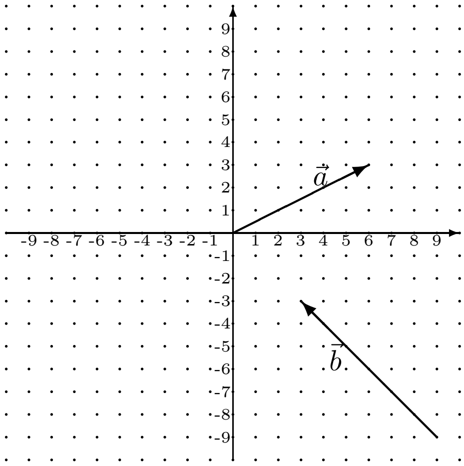


Рис. 1.1. К задаче 1.1.1.

знака k: если $k > 0$, то $\overrightarrow{ka}$ сонаправлен с $\vec{a}$, если $k < 0$, то $\overrightarrow{ka}$ противоположно направлен с $\vec{a}$.

- Если векторы имеют координаты $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, а k — число, то
$$\overrightarrow{a+b}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3),$$
$$\overrightarrow{ka}(ka_1, ka_2, ka_3).$$
- Два вектора с координатами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ *коллинеарны* (лежат на параллельных прямых) тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т.е. либо $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, либо для некоторого числа k
$$a_1 = k \cdot b_1,\ a_2 = k \cdot b_2,\ a_3 = k \cdot b_3.$$

Задача 1.1.1 На рисунке 1.1 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти координаты вектора $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение. Рассматривается случай плоскости, поэтому у каждого вектора по две координаты. Начало вектора $\vec{b}$ изображено в точке с координатами $(9, -9)$, а конец вектора — в точке с координатами $(3, -3)$. Поэтому первая координата $\vec{b}$ равна $9 - 3 = 6$, а вторая $-9 - (-3) = -6$. Таким образом, $\vec{b}(6, -6)$.

Точно так же находим координаты $\vec{a}(6,3)$. Тогда вектор $2\vec{a}-3\vec{b}$ будет иметь координаты $2(6,3)-3(6,-6)=(-6,24)$.

Задача 1.1.2 Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1,3,-1)$, $B(4,-1,5)$, $C(0,2,-4)$. Найти координаты вершины D.

Решение. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны, так как они одинаково направлены и имеют одинаковую длину ($ABCD$ — параллелограмм). Поэтому соответствующие координаты у этих векторов тоже равны. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ (из координат конца — т. B — вычитаем координаты начала — т. A): первая координата $4-1=3$, вторая $-1-3=-4$, третья $5-(-1)=6$. Итак, $\overrightarrow{DC}(3,-4,6)$. Если обозначить через (x,y,z) координаты искомой точки D, то координаты $\overrightarrow{DC}$ можно записать так: $(0-x,2-y,-4-z)$ (из координат т. C вычитаем координаты т. D). Получаем, $0-x=3$, $2-y=-4$, $-4-z=6$. Из этих уравнений находим $x=-3$, $y=6$, $z=-10$.

Ответ: $D(-3,6,-10)$

Задача 1.1.3 Даны координаты двух точек $A(-2,2,-1)$ и $B(8,-3,4)$. Найти координаты точки C, которая лежит на отрезке AB и делит его в отношении $2:3$, т.е. так, что $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{2}{3}$.

Решение. Отрезок AC занимает 2 части, а отрезок CB — 3 части на отрезке AB. Таким образом, AB — состоит из 5 частей, 2 из которых занимает AC. Значит, $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ (из координат конца — т. B — вычитаем координаты начала — т. A): первая координата $8-(-2)=10$, вторая $-3-2=-5$, третья $4-(-1)=5$. Итак, $\overrightarrow{AB}(10,-5,5)$. Поскольку $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$, координаты $\overrightarrow{AC}$ можно посчитать: $\frac{2}{5}\cdot(10,-5,5)=(4,-2,2)$.

Пусть теперь координаты точки C равны (x,y,z). Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ должны равняться $(x+2,y-2,z+1)$ (от координат конца — т. C отнимаем координаты начала — т. A).

А раньше было посчитано, что $\overrightarrow{AC}(4,-2,2)$, поэтому $x+2=4$, $y-2=-2$, $z+1=2$. Получаем $x=2$, $y=0$, $z=1$.

Ответ: $C(2,0,1)$

1.2 Скалярное произведение

Сведения, требуемые для решения задач этого раздела.

- Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними. То есть
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \tag{1.1}$$
- Векторы *ортогональны* (перпендикулярны) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.
- Если векторы заданы своими координатами $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, то скалярное произведение считается по формуле:
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{1.2}$$
(Если векторы на плоскости, то у них две координаты, и формула будет иметь вид $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.)
- Длина вектора $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ считается по формуле:
$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{1.3}$$
(На плоскости длина вектора $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$)

Задача 1.2.1 Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$

1) если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°.

2) если $\vec{a}(2,0,5)$, $\vec{b}(4,2,-1)$.

Решение. 1) По формуле (1.1) для скалярного произведения находим $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=2\cdot5\cdot\cos150^\circ=2\cdot5\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-5\sqrt{3}$

2) По формуле (1.2) для скалярного произведения находим
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot4+0\cdot2+5\cdot(-1)=3$$

Задача 1.2.2 Найти длину вектора $\vec{a}(-3,1,5)$

Решение. По формуле (1.3) находим $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$

Ответ: $\sqrt{35}$

Задача 1.2.3 Найти косинус угла между векторами $\vec{a}(1,2,0)$, $\vec{b}(5,-4,2)$

Решение. Обозначим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через φ. Из формулы (1.1) следует, что

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{1.4}$$

По формуле (1.2) найдем через координаты скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, а по формуле (1.3) — длины векторов. Считаем,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 5 + 2\cdot(-4) + 0\cdot 2 = 5 - 8 + 0 = -3,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Тогда $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}} = -\frac{1}{5}$.

Ответ: $-\frac{1}{5}$

Задача 1.2.4 В треугольнике ABC с вершинами $A(1,2,0)$, $B(3,0,1)$, $C(2,3,-4)$ найти длину стороны AB и косинус угла $\angle A$.

Решение. Вычислим сначала координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, из координат конца вычитая координаты начала:

$$\overrightarrow{AB}(3-1, 0-2, 1) = (2, -2, 1).$$

Теперь по формуле (1.3) находим

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

Для вычисления косинуса угла $\angle A$ нам понадобится еще скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ и длина вектора $\overrightarrow{AC}$ (см. решение предыдущей задачи). Координаты $\overrightarrow{AC}$ равны

$$(2-1, 3-2, -4-0) = (1, 1, -4).$$

Получаем,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-4) = -4,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Теперь найдем косинус угла A (вспомните про формулу (1.4) из предыдущей задачи).

$$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-4}{3\cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{4}{9\sqrt{2}}.$$

Ответ: $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$, $\cos\angle A = -\frac{4}{9\sqrt{2}}$

Задача 1.2.5 В каждом из трех случаев определить тупым, острым или прямым является угол $\angle ABC$, если $A(1,2,3)$, $B(0,4,-1)$, а координаты C равны:

1. $C(3,6,0)$
2. $C(4,4,-2)$
3. $C(2,3,-3)$

Решение. Угол $\angle ABC$ — это угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Известно (вспомните школьную тригонометрию), что косинус тупого угла отрицателен, острого — положителен, а прямого (90°) равен нулю. Поэтому для решения задачи нам не нужно искать косинус угла $\angle ABC$, достаточно определить знак этого косинуса. Из формулу (1.1) видно, что знак косинуса всегда совпадает со знаком скалярного произведения. Поэтому нам достаточно понять, положительно, отрицательно или равно нулю $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Будем использовать формулу (1.2). Координаты вектора $\overrightarrow{BA}$ одни и те же во всех трех случаях: $\overrightarrow{BA}(1,-2,4)$ (от координат конца т. A отнимаем координаты начала т. B). Найдем координаты $\overrightarrow{BC}$.

1) $\overrightarrow{BC}(3,2,1)$;
2) $\overrightarrow{BC}(4,0,-1)$;
3) $\overrightarrow{BC}(2,-1,-2)$;

По формуле (1.2) вычисляем:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 3 > 0$, угол $\angle ABC$ острый;

2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0$, угол $\angle ABC$ прямой (векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ перпендикулярны);

3) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) = -4 < 0$, угол $\angle ABC$ тупой.

Задача 1.2.6 Найти координаты какого-нибудь вектора, *ортогонального* (т.е. перпендикулярного) вектору $\vec{a}(2, -5)$.

Решение. Обозначим координаты искомого вектора через (x, y) (рассматривается случай плоскости, ведь у $\vec{a}$ две координаты). Согласно критерию ортогональности (см. сведения на стр. 7) векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. По формуле (1.2) найдем скалярное произведение и приравняем его к нулю:

$$2 \cdot x + (-5) \cdot y = 0$$

Подберем какие-нибудь x и y, удовлетворяющие этому уравнению. Например, $x = 5$, $y = 2$ (проверьте!). Значит, мы нашли координаты одного из ортогональных к $\vec{a}$ векторов — $(5, 2)$. (Пары $(-5, -2)$ или $(1, \frac{2}{5})$ тоже являются решениями уравнения, а вообще, все его решения — это пары вида: $(x, \frac{2}{5}x)$. Меняя значения x, мы сможем получить все ортогональные к $\vec{a}$ векторы. Все эти векторы между собой коллинеарны.)

Задача 1.2.7 Найти, чему равно z, если известно, что $\vec{a}(2, -1, 5)$ ортогонален вектору $\vec{b}(-4, 7, z)$.

Решение. Согласно критерию ортогональности на стр 7, векторы ортогональны, тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. По формуле (1.2) найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и приравняем его к нулю:

$$0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot z = -15 + 5z.$$

Из полученного уравнения $-15 + 5z = 0$ находим: $z = 3$.

Ответ: $z = 3$

Задача 1.2.8 Найти координаты вектора $\vec{a}$, который ортогонален векторам $\vec{b}(4,1,9)$ и $\vec{c}(-2,2,3)$ и имеет длину 7.

Решение. Обозначим координаты $\vec{a}$ через (x,y,z). Из критерия ортогональности на стр 7 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$. Используя формулу (1.2), запишем эти равенства через координаты:

$$4x+1y+9z=0 \quad \text{и} \quad -2x+2y+3z=0.$$

Решим систему

$$\begin{cases} 4x + y + 9z = 0, \\ -2x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

Уравнений два, а переменных три, поэтому в решение будет входить параметр. Из первого уравнения выразим $y=-4x-9z$. Подставим y во второе уравнение: $-2x+2(-4x-9z)+3z=0$. Приведем подобные и выразим x через z: $x=-\frac{3z}{2}$. Можно взять за параметр z. Тогда $y=-4(-\frac{3z}{2})-9z=-3z$. Итак,

$$\begin{cases} x = -\frac{3z}{2}, \\ y = -3z, \\ z = z. \end{cases}$$

Меняя z, мы можем получить координаты всех векторов, ортогональных векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Выберем среди них такой, который имеет длину, равную 7 (это и будет искомый вектор $\vec{a}$). По формуле (1.3)

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=$$
$$=\sqrt{(-\frac{3z}{2})^2+(-3z)^2+z^2}=\sqrt{\frac{49}{4}z^2}=\frac{7}{2}|z|.$$

По условию $\frac{7}{2}|z|=7$, откуда $|z|=2$ и $z=2$ или $z=-2$. Находим теперь x и y. При $z=2$, $x=-\frac{3z}{2}=-3$, $y=-6$, а при $z=-2$ $x=3$, $y=6$. Оба вектора и $(-3,-6,2)$, и $(3,6,-2)$ удовлетворяют всем требуемым условиям.

Ответ: $\vec{a}(-3,-6,2)$ или $\vec{a}(3,6,-2)$

Глава 2

Уравнения кривых и поверхностей

Задача 2.1.1 Поверхность задана уравнением

$$z = x^2 \cdot y + \sqrt{x+y} + 1.$$

Лежат ли точки $A(2,3,5)$, $B(-1,5,8)$ на этой поверхности? Укажите координаты еще какой-нибудь точки, лежащей на поверхности, и точки, не лежащей на ней.

Решение. Подставим координаты точки A вместо x, y, z в уравнение поверхности и проверим, верно ли равенство:

$$5 = 2^2 \cdot 3 + \sqrt{2+3} + 1.$$

Получаем $5 \neq 12 + \sqrt{5} + 1$. Координаты точки A не удовлетворяют уравнению поверхности, значит, точка $A(2,3,5)$ не лежит на данной поверхности. Теперь проверим точку $B(-1,5,8)$:

$$8 = (-1)^2 \cdot 5 + \sqrt{-1+5} + 1,$$

получаем $8 = 5 + 2 + 1$. Это верно. Координаты точки B удовлетворяют уравнению поверхности, значит, точка $B(-1,5,8)$ лежит на указанной поверхности.

Найдем другую точку данной поверхности. Возьмем какие-нибудь x и y, а z найдем из уравнения. Пусть, например, $x = 3$, $y = -1$, тогда

$$z = 3^2 \cdot (-1) + \sqrt{3-1} + 1 = -8 + \sqrt{2}.$$

Точка с координатами $(3, -1, -8+\sqrt{2})$ лежит на данной поверхности. Можно взять $x = 0$, $y = 0$, тогда $z = 1$, и точка $(0,0,1)$ тоже лежит на поверхности. Зато точка $(0,0,0)$ не лежит на поверхности, так как $0 \neq 0^2 \cdot 0 + \sqrt{0+0} + 1$ $(0 \neq 1)$.

Задача 2.1.2 Кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = 3t - 2. \end{cases}$$

1) Проверьте, что точка $A(2,1)$ лежит на этой кривой. Какое значение параметра соответствует этой точке?
2) Найдите координаты точек на кривой со значениями параметра 2, -3.
3) Укажите координаты какой-нибудь точки, не лежащей на кривой.

Решение. 1) Подставим координаты точки A вместо x и y в уравнения. Получим

$$\begin{cases} 2 &= t^2+t, \\ 1 &= 3t-2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $t=1$ или $t=-2$ (это корни квадратного уравнения $t^2+t-2=0$ - проверьте!). Из второго уравнения $t=1$. Значит, при одном и том же $t=1$ одновременно $x=2$, а $y=1$. Итак, точка $A(2,1)$ лежит на данной кривой, и этой точке соответствует значение параметра $t=1$.

2) Найдем координаты точки на кривой, соответствующей $t=2$. Для этого подставим t в уравнения

$$\begin{cases} x &= 2^2+2=6, \\ y &= 3\cdot 2-2=4. \end{cases}$$

Итак, значению параметра $t=2$ соответствует на кривой точка с координатами $(6,4)$.

Точно так же, подставляя -3 в уравнения вместо t, найдем координаты точки, соответствующей $t=-3$. Для нее $x=6$, $y=-11$ (проверьте!).

3) Найдем координаты какой-нибудь точки, не лежащей на данной кривой. Пусть, например, $x=0$, $y=0$. Для точек с такой абсциссой, лежащих на кривой, значение параметра $t=0$ или $t=-1$ (это решения уравнения $0=t^2+t$). А для точек с такой ординатой, лежащих на кривой, $t=\frac{2}{3}$ (это решение уравнения $0=3t-2$). Одновременно $x=0$, $y=0$ ни при каком значении t не получаются. Значит, точка $(0,0)$ не лежит на кривой. (Проверьте, что и, например, точка $(0,1)$ на кривой не лежит.)

Глава 3

Прямая и плоскость в пространстве

3.1 Общее уравнение плоскости

Сведения, требуемые для решения задач этого раздела.

- Общее уравнение плоскости имеет вид
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
причем вектор с координатами (A, B, C) перпендикулярен этой плоскости (его часто называют *нормальным* вектором плоскости).
- Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости
$$Ax + By + Cz + D = 0$$
вычисляется по формуле:
$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.1}$$
- Сведения о векторах и скалярном произведении векторов на стр. 4, 7.

Задача 3.1.1 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 1, 4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -6, 5)$.

Решение. Уравнение плоскости будет иметь вид
$$3x - 6y + 5z + D = 0$$
(коэффициенты перед x, y, z - координаты перпендикулярного плоскости вектора). Точка M_0 лежит на плоскости, тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляем координаты: $3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + D = 0$, откуда находим $D = -20$

Ответ: $3x - 6y + 5z - 20 = 0$

Задача 3.1.2 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2,1,4)$, параллельно $\vec{a}(2,-1,-5)$, $\vec{b}(-1,2,-2)$.

Решение. Для того, чтобы написать уравнение плоскости, нужно знать координаты A, B, C какого-нибудь нормального, т.е. перпендикулярного к этой плоскости вектора и точку, лежащую на ней. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны плоскости, поэтому любой вектор, перпендикулярный и $\vec{a}$, и $\vec{b}$, будет перпендикулярен плоскости (это так потому, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны).

Запишем, что вектор $\vec{a}$ и $\vec{n}$ с координатами (A,B,C) перпендикулярны (вспомните критерий ортогональности и формулу (1.2)):

$$2\cdot A+(-1)\cdot B+(-5)\cdot C=0$$

Векторы $\vec{b}(-1,2,-2)$ и $\vec{n}(A,B,C)$ тоже ортогональны:

$$(-1)\cdot A+2\cdot B+(-2)\cdot C=0.$$

Решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} 2A & - & B & - & 5C & = & 0, \\ -A & + & 2B & - & 2C & = & 0; \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим B и подставим во второе:

$$\begin{cases} B=2A-5C, \\ -A+2(2A-5C)-2C=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} B=2A-5C, \\ 3A=12C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=2\cdot 4C-5C, \\ A=4C. \end{cases} \qquad \begin{cases} B=3C, \\ A=4C. \end{cases}$$

При любом значении C вектор с координатами $(4C,3C,C)$ перпендикулярен и $\vec{a}$, и $\vec{b}$. Возьмем, например, $C=1$. Тогда $A=4$, $B=3$, $C=1$. Уравнение искомой плоскости будет иметь вид: $4x+3y+z+D=0$.

Найдем теперь D. Точка $M_1(2,1,4)$ лежит на плоскости, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, получаем: $4\cdot 2+3\cdot 1+4+D=0$. Отсюда, $D=-15$. Уравнение плоскости в окончательном виде: $4x+3y+z-15=0$.

Ответ: $4x+3y+z-15=0$

Задача 3.1.3 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,1,4)$, $M_2(4,0,-1)$, $M_3(1,3,2)$.

Решение. Векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ параллельны искомой плоскости. Найдем их координаты: $\overrightarrow{M_1M_2}(2,-1,-5)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(-1,2,-2)$ Мы попадаем в условия предыдущей задачи (у нас два вектора, параллельные плоскости, и точка на ней). Сначала мы найдем вектор, перпендикулярный и $\overrightarrow{M_1M_2}$, и $\overrightarrow{M_1M_3}$. Этот вектор будет перпендикулярен искомой плоскости. Его координаты станут коэффициентами A, B, C при x, y, z в искомом уравнении, а значение D найдем, подставив в уравнение координаты точки M_1. Именно такая схема была реализована в предыдущей задаче. Более того, мы подобрали числа так, чтобы и данные повторяли условия той задачи ($\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{a}$, а $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{b}$.) Мы можем дословно повторить ее решение (проделайте это!) и получить уравнение: $4x + 3y + z - 15 = 0$.

Ответ: $4x + 3y + z - 15 = 0$

Задача 3.1.4 Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(2,1,-3)$ и параллельна плоскости $3x - 4y + z + 5 = 0$.

Решение. В уравнении плоскости коэффициенты при x, y, z — это координаты нормального (перпендикулярного) к плоскости вектора. Тот же самый вектор будет перпендикулярным и для параллельной плоскости, значит, коэффициенты при x, y, z можно оставить прежними. Искомая плоскость будет иметь уравнение: $3x - 4y + z + D = 0$. Найдем число D. Наша плоскость по условию проходит через точку M_0, значит, координаты M_0 удовлетворяют уравнению этой плоскости. Получаем, $3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + (-3) + D = 0$. Отсюда, $D = 1$. Искомое уравнение имеет вид: $3x - 4y + z + 1 = 0$.

Ответ: $3x - 4y + z + 1 = 0$

Задача 3.1.5 Две плоскости заданы своими уравнениями. Определить, как расположены плоскости (параллельны, совпадают или пересекаются).

1) $2x - y + 5z + 1 = 0, \;\; -4x + 2y - 10z - 2 = 0;$

2) $x + 5y - 2z - 2 = 0$, $2x + 10y - 2z - 2 = 0$;
3) $4x + 12y - 4z + 9 = 0$, $x + 3y - z + 3 = 0$.

Решение. 1) В этом случае нормальные векторы плоскостей имеют такие координаты: $\vec{n}_1(2, -1, 5)$ и $\vec{n}_2(-4, 2, -10)$. Координаты векторов пропорциональны ($\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{5}{-10}$), значит, векторы коллинеарны. Следовательно, перпендикулярные к ним плоскости параллельны или совпадают. Легко заметить, что решения (тройки чисел (x, y, z)) уравнений $2x - y + 5z + 1 = 0$ и $-4x + 2y - 10z - 2 = 0$ одни и те же (разделите второе уравнение на -2 и сравните с первым). Значит, плоскости в нашем случае состоят из одних и тех же точек, т.е. совпадают.

2) Нормальные векторы плоскостей имеют такие координаты: $\vec{n}_1(1, 5, -2)$ и $\vec{n}_2(2, 10, -2)$. Координаты векторов непропорциональны $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} \neq \frac{-2}{-2}$, т.е. векторы неколлинеарны. Следовательно, плоскости не могут быть параллельными или совпадающими. Значит, они пересекаются.

3) Нормальные векторы плоскостей такие: $\vec{n}_1(4, 12, -4)$ и $\vec{n}_2(1, 3, -1)$. Координаты векторов снова, как и в первом случае, пропорциональны, а векторы коллинеарны ($\vec{n}_1 = 4\vec{n}_2$). Следовательно, наши плоскости параллельны или совпадают. Разделим первое уравнение на 4 (получим уравнение той же самой первой плоскости): $x + 3y - z + \frac{9}{4} = 0$. Видно, что у этого уравнения и уравнения второй плоскости $x + 3y - z + 3 = 0$ нет общих троек-решений (x, y, z) (в первом уравнении $x + 3y - z = -\frac{9}{4}$, а во втором $x + 3y - z = -3$). Значит, у первой плоскости и у второй нет общих точек, т.е. они параллельны.

Ответ: 1) совпадают; 2) пересекаются; 3) параллельны.

Задача 3.1.6

1) Показать, что плоскости, заданные уравнениями $x - 2y + 5z + 1 = 0$, $4x - 3y - 2z = 0$ перпендикулярны;
2) Найти косинус угла между плоскостями, заданными уравнениями $z + 3 = 0$ и $2x + y - 4z - 4 = 0$.

Решение. И в первом пункте, и во втором речь идет об угле между плоскостями. По известной теореме стереометрии, угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям. Поэтому мы будем исследовать угол между нормальными векторами плоскостей (их координаты — это коэффициенты перед переменными в уравнениях плоскостей).

1) Нормальные векторы плоскостей имеют такие координаты: $\vec{n}_1(1,-2,5)$ и $\vec{n}_2(4,-3,-2)$. По критерию ортогональности на стр. 7 векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. По формуле (1.2) находим скалярное произведение:

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 1\cdot 4 + (-2)\cdot(-3) + 5\cdot(-2) = 0.$$

Нормальные векторы перпендикулярны, значит, и плоскости перпендикулярны тоже.

2) Нормальные векторы плоскостей имеют такие координаты: $\vec{n}_1(0,0,1)$ и $\vec{n}_2(2,1,-4)$ (в первом уравнение отсутствуют x и y, это означает, что коэффициенты при них равны 0). Найдем косинус угла φ между $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. (см. задачу 1.2.3, стр. 8).

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-4) = -4$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1,$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{2^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{-4}{1\cdot\sqrt{21}} = -\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Угол φ тупой, а угол между плоскостями всегда острый. Значит, мы нашли не угол между плоскостями, а смежный с ним. Косинус искомого (смежного с φ) угла равен $\frac{4}{\sqrt{21}}$.

Ответ: 2) $\frac{4}{\sqrt{21}}$.

Задача 3.1.7 Найти расстояние от точки $M(-2,1,4)$ до плоскости, которая перпендикулярна вектору $\vec{n}(2,-6,3)$ и проходит через точку $\mathrm{K}(4,0,-1)$.

Решение. Напишем уравнение плоскости. Координаты перпендикулярного вектора — это коэффициенты перед переменными в уравнении плоскости: $2x-6y+3z+D=0$. Плоскость проходит через точку K, поэтому координаты этой точки должны удовлетворять уравнению $2x - 6y + 3z + D = 0$. Подставим их и найдем D: $2 \cdot 4 - 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + D = 0, \quad 5 + D = 0$, отсюда $D = -5$. Получаем уравнение плоскости:

$$2x - 6y + 3z - 5 = 0.$$

Расстояние d от точки M до этой плоскости найдем по формуле (3.1):

$$d = \frac{|2 \cdot (-2) - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}.$$

Ответ: $\frac{3}{7}$.

Задача 3.1.8 Написать уравнение плоскости, которая параллельна плоскости $2x + y - 2z = 0$ и проходит на расстоянии 4 от точки $M(3, 1, 4)$.

Решение. Искомая плоскость имеет уравнение $2x + y - 2z + D = 0$ (она параллельна плоскости $2x + y - 2z = 0$, значит, в качестве нормального вектора для нее можно взять тот же вектор, что и у этой плоскости). По формуле (3.1) вычислим расстояние от точки M до этой плоскости:

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 - 2 \cdot 4 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-1 + D|}{3}.$$

По условию оно равно 4, т.е. $\frac{|-1+D|}{3} = 4$. Решим это уравнение: $|-1 + D| = 12$, откуда $D - 1 = 12$ или $D - 1 = -12$ (вспомните, как правильно работать с модулями). Получаем, $D = 13$ или $D = -11$. Нужных плоскостей оказалось две: $2x+y-2z+13 = 0$ и $2x + y - 2z - 11 = 0$. (Подумайте, почему так получилось.)

Ответ: $2x + y - 2z + 13 = 0$ и $2x + y - 2z - 11 = 0$.

Задача 3.1.9 Проверить, что плоскости, заданные уравнениями $3x + 4z + 1 = 0$ и $3x + 4z + 5 = 0$, параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. Эти плоскости перпендикулярны одному и тому же нормальному вектору $\vec{n}(3, 0, 4)$, поэтому они параллельны. Расстояние между параллельными плоскостями легко вычислить так: взять какую-нибудь точку первой плоскости и найти расстояние от этой точки до второй плоскости. Найдем какое-нибудь решение первого уравнения. Например, положим $x = 1$, $y = 1$, тогда из уравнения

$$z = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Точка с координатами $(1, 1, -1)$ лежит на первой плоскости (ее координаты удовлетворяют уравнению $3x+4z+1 = 0$). Теперь найдем расстояние от этой точки до второй плоскости (формула (3.1)):

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

3.2 Уравнения прямой в пространстве

Сведения, требуемые для решения задач этого раздела.

- Прямая в пространстве задается *параметрическими уравнениями*:
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t, \\ z = z_0 + \gamma \cdot t. \end{cases}$$
Здесь $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — координаты какой-нибудь точки, лежащей на прямой, $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ — координаты какого-нибудь вектора, параллельного прямой (такой вектор называется *направляющим*)
- Сведения о векторах и скалярном произведении векторов на стр. 4, 7
- Сведения об уравнении плоскости на стр. 14.

Задача 3.2.1 Написать параметрические уравнения прямой l, которая проходит через точку $K(3, -1, 5)$ и параллельна прямой

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2t, \\ z = -2. \end{cases}$$

Лежат ли на прямой l точки $M_1(1,-1,5)$, $M_2(2,1,5)$?

Решение. Коэффициенты перед параметром t в параметрических уравнениях прямой — это координаты *направляющего*, т.е. параллельного к прямой вектора (см. текст на стр. 20). Для заданной прямой — это вектор $\vec{s}(-1,2,0)$. Его же можно взять за направляющий вектор и для искомой прямой (прямые параллельны, значит, и направляющие векторы у них одни и те же). Координаты точки K нужно поставить вместо x_0, y_0, z_0. Получаем такие уравнения прямой l:

$$\begin{cases} x &= 3-t, \\ y &= -1+2t, \\ z &= 5. \end{cases}$$

Теперь проверим, лежит ли на этой прямой точки M_1 и M_2. Если M_1 лежит на прямой, то для некоторого t должно выполняться:

$$\begin{cases} 1 &= 3-t, \\ -1 &= -1+2t, \\ 5 &= 5. \end{cases}$$

Тогда $t=2$ из первого равенства и одновременно $t=0$ из второго. Этого быть не может, значит, M_1 не лежит на прямой. Проверяем теперь M_2:

$$\begin{cases} 2 &= 3-t, \\ 1 &= -1+2t, \\ 5 &= 5. \end{cases}$$

Из первого равенства $t=1$, из второго $t=1$, третье верно при любом t (и при $t=1$ тоже!). Коодинаты M_2 удовлетворяют параметрическим уравнениям прямой (при $t=1$). Значит, M_2 лежит на прямой.

Задача 3.2.2 Даны координаты двух точек $K(3,1,-2)$, $M(-1,2,4)$. Написать параметрические уравнения прямой KM.

Решение. Для того, чтобы написать параметрические уравнения прямой, нужно знать координаты какой-нибудь точки на прямой и координаты какого-нибудь направляющего вектора. Точек у нас две (возьмем любую, например, K), а за направляющий можно взять вектор $\overrightarrow{KM}$ (он параллелен прямой). Координаты $\overrightarrow{KM}$ равны $(-4, 1, 6)$ (из координат конца вычли координаты начала). Получаем такие уравнения прямой KM:

$$\begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = 1 + t, \\ z = -2 + 6t. \end{cases}$$

Уравнения прямой KM можно написать и так (подумайте, как они получились):

$$\begin{cases} x = -1 + 4t, \\ y = 2 - t, \\ z = 4 - 6t. \end{cases}$$

Задача 3.2.3 Найти точку пересечения прямых, заданных своими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = -1 - 5t. \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 5 - 4t, \\ z = -2 + 3t. \end{cases}.$$

Решение. Пусть координаты точки пересечения (x, y, z). Она лежит одновременно и на первой прямой, и на второй. Значит, найдется такое значение параметра t_1, которое соответствует этой точке в уравнениях первой прямой, и значение t_2, соответствующее этой же точке в уравнениях второй прямой. (Они, эти значения параметра, могут оказаться разными, поэтому мы и обозначили их *разными* символами t_1 и t_2). Получаем равенства

$$\begin{cases} x = 3 + 2t_1, \\ y = 3t_1, \\ z = -1 - 5t_1. \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 + t_2, \\ y = 5 - 4t_2, \\ z = -2 + 3t_2. \end{cases}.$$

Из них получаем уравнения:[1]

$$\begin{cases} 3+2t_1 &= -1+t_2, \\ 3t_1 &= 5-4t_2, \\ -1-5t_1 &= -2+3t_2. \end{cases}.$$

Из первого и второго уравнения находим t_1 и t_2 и подставляем в третье, чтобы убедиться, что мы нашли решение всех трех уравнений.

$$\begin{cases} t_2 &= 4+2t_1, \\ 3t_1 &= 5-4(4+2t_1); \end{cases} \begin{cases} t_2 &= 4+2t_1, \\ 11t_1 &= -11; \end{cases} \begin{cases} t_2 &= 2, \\ t_1 &= -1. \end{cases}$$

Подставляем значения $t_1 = -1$, $t_2 = 2$ в третье уравнение, получаем

$$-1-5\cdot(-1) = -2+3\cdot 2 \quad \text{— верное равенство.}$$

Система имеет единственное решение $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Значит, прямые пересекаются в единственной точке. Найдем ее координаты. Для этого в уравнения первой прямой подставим вместо t значение $t_1 = -1$ (оно и соответствует точке пересечения). Получаем:

$$\begin{cases} x &= 3 &+ & 2\cdot(-1) &= & 1, \\ y &= & & 3\cdot(-1) &= & -3, \\ z &= -1 &- & 5\cdot(-1) &= & 4. \end{cases}.$$

Точка пересечения имеет координаты $(1, -3, 4)$. (Эта же точка получается, если мы в уравнения второй прямой подставили вместо t значение $t_2 = 2$. Проверьте это самостоятельно.)

Ответ: $(1, -3, 4)$

Задача 3.2.4 Прямые l_1 и l_2 заданы своими параметрическими уравнениями. Определить, как они расположены: параллельны, совпадают, пересекаются или скрещиваются.

$$1) \begin{cases} x &= -3-4t, \\ y &= 1-2t, \\ z &= 11+6t. \end{cases} \begin{cases} x &= 3+6t, \\ y &= 4+3t, \\ z &= 2-9t. \end{cases}$$

[1] Заметьте, что уравнений 3, а переменных всего 2, такие системы не всегда имеют решения, а геометрически это означает, что не все прямые в пространстве пересекаются ;).

2) $\begin{cases} x = 2-3t, \\ y = 7+5t, \\ z = -2t. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8-6t, \\ y = -3+10t, \\ z = 1-4t. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 2+t, \\ z = 5-3t. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1+3t, \\ y = 4+t, \\ z = -2+5t. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = t, \\ y = -2+2t, \\ z = 10-3t. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5+2t, \\ y = 9+5t, \\ z = -t. \end{cases}$

Решение. 1) Выясним сначала, как *направлены* прямые. Первая прямая параллельна вектору с координатами $(-4,-2,6)$, вторая — $(6,3,-9)$ (координаты направляющего вектора — это коэффициенты перед параметром t). Два эти вектора коллинеарны (параллельны), так как их соответствующие координаты пропорциональны ($\frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = \frac{6}{-9}$). Поэтому прямые направлены одинакаво. Они параллельны или совпадают. Если они параллельны, у них нет общих точек, если совпадают, то все точки у них общие. Достаточно проверить одну какую-нибудь точку. Возьмем, например, точку $M(-3,1,11)$ (эта точка лежит на первой прямой, такие координаты получаются из ее уравнений при $t=0$). Выясним, лежит ли M на второй прямой. Проверяем, есть ли такое значение параметра t, при котором

$$\begin{cases} -3 = 3+6t, \\ 1 = 4+3t, \\ 11 = 2-9t. \end{cases}$$

Видно, что при $t=-1$, все уравнения превращаются в верные равенства, то есть координаты точки M удовлетворяют параметрическим уравнениям и второй прямой. Вывод: прямые одинаково направлены и имеют по крайней мере одну общую точку (точку M), значит они *совпадают.*

2) Так же как и в первом случае, прямые направлены одинаково (их направляющие векторы$(-3,5,-2)$ и $(-6,10,-4)$ коллинеарны). Возьмем точку с первой прямой $M(2,7,0)$ (такие координаты получаются из ее уравнений при $t=0$).

Проверим, лежит ли M на второй прямой.

$$\begin{cases} 2 &= 8-6t, \\ 7 &= -3+10t, \\ 0 &= 1-4t. \end{cases}$$

Из первого равенства получаем $t=1$, из второго $t=1$, а из третьего $t=\frac{1}{4}\neq 1$. Точка $M(2,7,0)$ не лежит на второй прямой (но лежит на первой!). Значит, прямые совпадать не могут. Поскольку они одинаково направлены и не совпадают, прямые *параллельны*.

3) Как и раньше, посмотрим на направляющие векторы прямых. У первой прямой направляющий вектор $(1,1,-3)$, у второй — $(3,1,5)$. Эти векторы не коллинеарны (т.е. не параллельны), значит, прямые или пересекаются, или скрещиваются. У пересекающихся прямых есть точка пересечения, а у скрещивающихся таких точек нет. Пытаемся найти точку пересечения (см. задачу 3.2.3, стр. 22). Пусть координаты точки пересечения (x,y,z), и пусть t_1 — значение параметра, которое соответствует этой точке в уравнениях первой прямой, а t_2 параметр для этой точки в уравнениях второй прямой. Получаем равенства

$$\begin{cases} x &= 1+t_1, \\ y &= 2+t_1, \\ z &= 5-3t_1. \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= 1+3t_2, \\ y &= 4+t_2, \\ z &= -2+5t_2. \end{cases}.$$

Приравниваем:

$$\begin{cases} 1+t_1 &= 1+3t_2, \\ 2+t_1 &= 4+t_2, \\ 5-3t_1 &= -2+5t_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $t_1=3t_2$. Подставляем вместо t_1 во второе, получаем $2+3t_2=4+t_2$, откуда $2t_2=2$, и $t_2=1$. Тогда $t_1=3$. Эти значения удовлетворяют первому и второму уравнению (мы их искали, используя первое и второе уравнения, тем не менее, проверьте это!). Осталось выяснить, удовлетворяют ли эти значения третьему уравнению. Подставляем: $5-3\cdot 3=-2+5\cdot 1$, т.е. $-4=3$. Неверно. Следовательно, наша система уравнений решений не имеет. Это означает, что точек пересечения у наших прямых нет, т.е. прямые *скрещиваются.*

4) У первой прямой направляющий вектор имеет координаты $(1, 2, -3)$, у второй — $(2, 5, -1)$. Эти векторы не коллинеарны, значит, прямые пересекаются или скрещиваются. Как и в предыдущем случае, ищем точку пересечения. Пусть ее координаты (x, y, z), t_1 соответствует ей в уравнениях первой прямой, t_2 — в уравнениях второй прямой. Получаем равенства

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t_1, \\ y & = & -2+2t_1, \\ z & = & 10-3t_1. \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5+2t_2, \\ y & = & 9+5t_2, \\ z & = & -t_2. \end{array}\right. .$$

Приравниваем:

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_1 & = & 5+2t_2, \\ -2+2t_1 & = & 9+5t_2, \\ 10-3t_1 & = & -t_2. \end{array}\right. .$$

Из первого уравнения t_1 подставляем во второе

$$-2+2(5+2t_2) = 9+5t_2.$$

Из этого уравнения находим $t_2 = -1$, затем $t_1 = 5+2(-1) = 3$. Проверим, удовлетворяют ли третьему уравнению найденные значения (подставляем в него $t_1 = 3$, $t_2 = -1$):

$$10-3\cdot 3 = -(-1),$$

$1 = 1$ — верно. Итак, пара $t_1 = 3$, $t_2 = -1$ решение нашей системы. Точка пересечения существует. Восстановим теперь ее координаты (в задаче это не требуется, но сделаем это для повторения). В первой прямой ей соответствует значение параметра $t_1 = 3$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3, \\ y & = & -2+2\cdot 3 = 4, \\ z & = & 10-3\cdot 3 = 1. \end{array}\right.$$

Координаты точки пересечения $(3, 4, 1)$ (Проверьте, что такие же координаты получатся из уравнений второй прямой при значении параметра -1). Прямые *пересекаются.*

Ответ: 1)совпадают, 2)параллельны, 3)скрещиваются, 4)пересекаются

Задача 3.2.5 Прямые заданы своими параметрическими уравнениями

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-t, \\ y &=& 1-2t, \\ z &=& -3t. \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -5+2t, \\ y &=& 1, \\ z &=& 3+4t. \end{array}\right. .$$

Найти косинус угла между этими прямыми.

Решение. Первая прямая параллельна вектору $\vec{a}(-1,-2,-3)$, вторая — вектору $\vec{b}(2,0,4)$. Обозначим угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через φ. Угол между прямыми — это острый угол, который либо совпадает с φ (если φ острый), либо смежный с φ. Найдем косинус угла φ (мы решали такую задачу на стр. 8).

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + (-3)\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+0^2+4^2}} =$$

$$= \frac{-14}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = -\frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{5}}.$$

Косинус φ отрицательный, т.е. φ тупой. Поэтому φ — смежный с искомым угол, а значит, искомый косинус равен $|\cos\varphi| = \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{5}}$

3.3 Прямая и плоскость в пространстве

Сведения, требуемые для решения задач этого раздела.

- Сведения о векторах и скалярном произведении векторов на стр. 4, 7
- Сведения об уравнении плоскости на стр. 14.
- Сведения о прямой в пространстве на стр. 20.

Задача 3.3.1 Убедиться, что плоскости $3x - y + z - 1 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$ пересекаются. Составить параметрические уравнения прямой, по которой пересекаются эти плоскости.

Решение. Нормальный вектор первой плоскости $(3,-1,1)$, второй плоскости $(1,-2,0)$ (координаты нормального вектора — это коэффициенты перед переменными x, y, z в уравнении плоскости). Эти векторы не коллинеарны, так как их соответствующие координаты непропорциональны. Поэтому плоскости не могут быть параллельными или совпадающими, а значит, они пересекаются.

Плоскости пересекаются по прямой. Напишем ее параметрические уравнения. Для этого достаточно знать координаты двух точек прямой (см. задачу на стр. 21). Наша прямая состоит в точности из точек, которые лежат и на первой, и на второй плоскости, т.е. из точек, чьи координаты (x, y, z) удовлетворяют системе из двух уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - y + z - 1 & = & 0, \\ x - 2y + 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Подберем две точки K и M, удовлетворяющие системе. Положим, например, сначала $x = 1$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3 - y + z - 1 & = & 0, \\ 1 - 2y + 3 & = & 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0, \\ y & = & 2 \end{array}\right.$$

Итак, первая точка K имеет координаты $(1, 2, 0)$. Пусть теперь $x = -1$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3 - y + z - 1 & = & 0, \\ -1 - 2y + 3 & = & 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 5, \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

Вторая точка M имеет координаты $(-1, 1, 5)$. Теперь поступим так же, как и при решении задачи на стр. 21. За направляющий вектор возьмем $\overrightarrow{KM}(-2, -1, 5)$. Получаем параметрические уравнения:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2t, \\ y & = & 2 - t, \\ z & = & 5t. \end{array}\right.$$

Задача 3.3.2 Найти координаты точки пересечения прямой $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 + 2t, \\ y & = & t, \\ z & = & 4 - t. \end{array}\right.$ и плоскости $4x + y + 2z - 6 = 0$.

Решение. Точка пересечения лежит и на прямой, и на плоскости. Значит, ее координаты (x, y, z) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = t, \\ z = 4 - t, \\ 4x + y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

Подставим x, y и z в последнее уравнение и найдем значение параметра t (это значение соответствует точке пересечения). Получим $4(3 + 2t) + t + 2(4 - t) - 6 = 0$, и $7t + 14 = 0$. Итак, $t = -2$. Найдем координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot (-2), \\ y = -2, \\ z = 4 - (-2); \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \\ z = 6; \end{cases}$$

Ответ: $(-1, -2, 6)$

Можно было сразу убедиться, что прямая из предыдущей задачи пересекает плоскость. Действительно, направляющий вектор прямой имеет координаты $(2, 1, -1)$, а нормальный вектор плоскости — $(4, 1, 2)$. Если бы прямая лежала в плоскости или была параллельна ей, то эти векторы были бы перпендикулярны. Проверяем перпендикулярность векторов (те, кто забыл, как это делается, взгляните на стр. 10). Их скалярное произведение не равно нулю: $2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 7 \neq 0$, значит, векторы не перпендикулярны. Прямая обязана пересечь плоскость в единственной точке.

Задача 3.3.3 В каждом из случаев выяснить взаимное расположение прямой и плоскости (прямая параллельна плоскости, пересекает ее в единственной точке, или содержится в ней целиком):

1) Прямая $\begin{cases} x &= -3 + 7t, \\ y &= 1 - 2t, \\ z &= 5 - t. \end{cases}$, плоскость $2x + 9y - 4z + 1 = 0$.

2) Прямая $\begin{cases} x &= 1 - 2t, \\ y &= -8 + 5t, \\ z &= 2 + 3t. \end{cases}$, плоскость $5x + 2y + 11 = 0$.

Решение. Первый способ. Будем искать общие точки прямой и плоскости. Если найдется только одна такая точка, то прямая пересекает плоскость. Если общих точек нет, то прямая параллельна плоскости. Если общих точек много (на самом деле, их будет бесконечно много), то прямая содержится в плоскости целиком. Общие точки ищем точно так же, как в предыдущей задаче точку пересечения.

1) Координаты точки пересечения (x, y, z) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x = -3 + 7t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 5 - t, \\ 2x + 9y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$$

Подставляем x, y, z в четвертое уравнение:

$$2(-3 + 7t) + 9(1 - 2t) - 4(5 - t) + 1 = 0.$$

Раскрываем скобки: $-6 + 14t + 9 - 18t - 20 + 4t + 1 = 0$, t сокращается, остается $-16 = 0$ — неверно. Ни при одном значении t система не имеет решения. Значит, у прямой и плоскости нет общих точек, т.е. прямая *параллельна* плоскости.

2) Координаты точки пересечения (x, y, z) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -8 + 5t, \\ z = 2 + 3t, \\ 5x + 2y + 11 = 0. \end{cases}$$

Подставляем x, y, z в четвертое уравнение: $5(1 - 2t) + 2(-8 + 5t) + 11 = 0$. Раскрываем скобки $5 - 10t - 16 + 10t + 11 = 0$, после сокращений остается $0 = 0$ — верное равенство. При любом значении t система имеет решение. Значит, у прямой и плоскости бесконечно много общих точек (каждому значению параметра t соответствует своя точка). Прямая *целиком содержится в* плоскости.

Второй способ решения. Сначала заметим, что в обоих случаях направляющий вектор прямой параллелен плоскости. Действительно, направляющий вектор прямой перпендикулярен нормальному вектору плоскости. (Убедитесь в этом, вычислив скалярное произведение этих векторов: в обоих случаях оно равно нулю. Те, кто забыл, что это означает, прочитайте замечание после предыдущей задачи и решение задачи 1.2.7, стр. 10). Следовательно, в обоих случаях прямая либо параллельна плоскости, либо целиком содержится в ней. Возьмем какую-нибудь точку с прямой и проверим, лежит ли она на плоскости.

1) На прямой лежит точка $(-3, 1, 5)$ (при $t = 0$). Проверим, лежит ли она на плоскости $2x + 9y - 4z + 1 = 0$. Подставляем координаты в уравнение: $2 \cdot (-3) + 9 \cdot 1 - 4 \cdot 5 + 1 = 0$, $-16 = 0$ — неверно. Точка не лежит в плоскости, значит, прямая не может содержаться в плоскости целиком. Вывод: прямая *параллельна* плоскости.

2) На прямой лежит точка $(1, -8, 2)$ (при $t = 0$). Проверим, лежит ли она на плоскости $5x + 2y + 11 = 0$. Подставляем координаты в уравнение: $5 \cdot 1 + 2 \cdot (-8) + 11 = 0$, $0 = 0$ — верно. Точка прямой лежит в плоскости. Поскольку прямая направлена параллельно плоскости и имеет с ней по крайней мере одну общую точку, прямая обязана *содержаться в плоскости целиком.*

Ответ: 1) прямая параллельна плоскости, 2) прямая лежит в плоскости.

Задача 3.3.4 Написать уравнение плоскости, содержащей

1) две пересекающиеся прямые
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 7+2t, \\ y &=& -1, \\ z &=& 1+t; \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -4+3t, \\ y &=& 2-t, \\ z &=& 6+2t \end{array}\right. \quad ;$$

2) две параллельные прямые
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-9t, \\ y &=& 2t, \\ z &=& 5+4t; \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -3+9t, \\ y &=& 2-2t, \\ z &=& 8-4t. \end{array}\right. \quad .$$

Решение. Как известно, две прямые лежат в одной плоскости, только если они пересекаются или параллельны. Поэтому, прежде чем искать уравнение плоскости, стоит проверить, что прямые именно такие.

1) Для того, чтобы убедиться, что прямые пересекаются, нужно найти координаты точки пересечения. Те, кто забыл, как это делается, – прочитайте решение задачи 3.2.3, стр. 22). Координаты точки пересечения $(5,-1,0)$ (проверьте!).

Направляющие векторы прямых имеют координаты $\vec{a}(2,0,1)$, $\vec{b}(3,-1,2)$ (для забывчивых – это коэффициенты перед параметром t в уравнениях прямых). Они неколлинеарны. Искомая плоскость параллельна этим векторам, так как в этой плоскости лежат обе прямые. Кроме того, известны координаты точек плоскости: например, точка $M_1(7,-1,1)$ с первой прямой (при $t=0$), $M_2(-4,2,6)$ со второй прямой (при $t=0$) или точка пересечения. Мы попадаем в условие задачи 3.1.2, стр. 15 (у нас есть два параллельных плоскости неколлинеарных вектора и точка на ней). Повторим те же действия (подробные объяснения есть в решении указанной задачи).

Сначала найдем A, B, C — координаты нормального вектора искомой плоскости (они станут коэффициентами при x, y, z уравнении). Нормальный вектор перпендикулярен плоскости, значит, и вектору $\vec{a}$, и вектору $\vec{b}$. Эти условия перпендикулярности можно записать так:

$$\begin{cases} 2A \quad + \quad C = 0, \\ 3A - B + 2C = 0; \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} C = -2A, \\ B = -A; \end{cases}$$

Пусть, например, $A=1$. Тогда $B=-1$, $C=-2$. Уравнение искомой плоскости будет иметь вид: $x-y-2z+D=0$.

Найдем теперь D. Точка $M_1(7,-1,1)$ лежит на плоскости, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению: $7-(-1)-2\cdot 1+D=0$. Отсюда, $D=-6$. Уравнение плоскости в окончательном виде: $x-y-2z-6=0$.

2) Направляющие векторы прямых коллинеарны (их координаты $(-9,2,4)$, $(9,-2,-4)$). Прямые одинаково направлены, значит, они параллельны или совпадают. (Проверьте, что они не совпадают, см. задачу 3.2.4, стр. 23, пункты 1) и 2))

Дословно повторить решение из предыдущего пункта мы не можем, так как направляющие векторы прямых коллинеарны. Итак, у нас есть один(!) параллельный искомой плоскости вектор $\vec{a}(-9,2,4)$ и точки на плоскости $M_1(1,0,5)$ с первой прямой (при $t=0$), $M_2(-3,2,8)$ со второй прямой (при $t=0$). В качестве второго вектора можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Он параллелен плоскости. Его координаты $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны $(-4,2,3)$.

Теперь мы можем повторить действия из предыдущего пункта. Найдем A, B, C — координаты нормального вектора искомой плоскости. Он перпендикулярен вектору $\vec{a}$ и вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$. Как и в предыдущей части получаем систему (вспомните, откуда она берется):

$$\begin{cases} -9A+2B+4C=0, \\ -4A+2B+3C=0. \end{cases}$$

Решение системы:

$$\begin{cases} C=5A, \\ B=-\frac{11}{2}A; \end{cases}$$

Возьмем для удобства $A=2$. Тогда $C=10$, $B=-11$. Уравнение искомой плоскости будет иметь вид:

$$2x-11y+10z+D=0.$$

Найдем D. Точка $M_1(1,0,5)$ лежит на плоскости, ее координаты удовлетворяют уравнению: $2\cdot 1-11\cdot 0+10\cdot 5+D=0$. Отсюда, $D=-52$. Уравнение плоскости в окончательном виде: $2x-11y+10z-52=0$

Ответ: 1) $x-y-2z-6=0$, 2) $2x-11y+10z-52=0$.

Задача 3.3.5 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-7,5,6)$ и перпендикулярной прямой

$$\begin{cases} x &= & t, \\ y &= & 5-3t, \\ z &= & 1+4t. \end{cases}$$

Решение. Искомая плоскость перпендикулярна данной прямой, значит, и ее направляющему вектору $(1, -3, 4)$. Уравнение искомой плоскости будет иметь вид $x - 3y + 4z + D = 0$. Для того, чтобы найти D, нужно подставить в это уравнение координаты точки M (она лежит на плоскости по условию, значит, ее координаты обязаны удовлетворять уравнению этой плоскости). Получаем: $-7 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + D = 0$. Отсюда, $D = -2$.

Ответ: $x - 3y + 4z - 2 = 0$

Задача 3.3.6 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(5, -6, 2)$ и перпендикулярной плоскости $3x - z + 11 = 0$.

Решение. Искомая прямая перпендикулярна плоскости, значит, параллельна нормальному вектору $(3, 0, -1)$ этой плоскости. Этот вектор можно взять за направляющий вектор прямой, а точка на прямой нам дана. Параметрические уравнения искомой прямой: $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 5 + 3t, \\ y & = & -6, \\ z & = & 2 - t. \end{array} \right.$

Задача 3.3.7 Найти проекцию точки $A(2, 0, -8)$ на плоскость α: $3x - 4y - 2z + 7 = 0$.

Решение. Пусть B — это проекция точки A на плоскость. Понятно, что прямая AB перпендикулярна плоскости α, а B — точка пересечения AB и этой плоскости. Выписываем уравнения AB (см. решение предыдущей задачи):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 + 3t, \\ y & = & -4t, \\ z & = & -8 - 2t. \end{array} \right.$$

Теперь найдем координаты B — точки пересечения прямой и плоскости (см. задачу 3.3.2, стр. 28). Искомые координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3t, \\ y = -4t, \\ z = -8 - 2t, \\ 3x - 4y - 2z + 7 = 0 \end{array} \right.$$

Подставляем x, y и z в последнее уравнение, находим t:

$$3 \cdot (2 + 3t) - 4 \cdot (-4t) - 2 \cdot (-8 - 2t) + 7 = 0,$$

и $29 \cdot t + 29 = 0$, $t = -1$,

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot (-1), \\ y = -4 \cdot (-1), \\ z = -8 - 2 \cdot (-1); \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1, \\ y = 4, \\ z = -6. \end{cases}$$

Ответ: $(-1, 4, -6)$

Задача 3.3.8 Найти точку, симметричную точке $A(1, -4, 9)$ относительно плоскости α $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Решение. План действий:
1. Найдем проекцию точки A на плоскость α, как в задаче 3.3.7, стр. 34. (Эта проекция — точка B).
2. Точка B — это середина отрезка между точкой A и симметричной ей точкой C. Найдем точку C.

1. Прямая AB, перпендикулярная плоскости α, имеет такие уравнения (см. задачу 3.3.7, стр. 34):

$$\begin{cases} x &= & 1 + t, \\ y &= & -4 + 3t, \\ z &= & 9 - 2t. \end{cases}$$

Теперь найдем координаты B — точки пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -4 + 3t, \\ z = 9 - 2t, \\ x + 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Находим t, а потом по t восстанавливаем x, y и z:

$$(1 + t) + 3 \cdot (-4 + 3t) - 2 \cdot (9 - 2t) + 1 = 0,$$

и $14 \cdot t - 28 = 0$, $t = 2$,

$$\begin{cases} x = 1 + 2, \\ y = -4 + 3 \cdot 2, \\ z = 9 - 2 \cdot 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ z = 5. \end{cases}$$

Итак, $B(3, 2, 5)$

2. Пусть $C(x, y, z)$ — это точка симметричная A. Точка B — середина отрезка AC, поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ таковы: $(2, 6, -4)$ (от координат конца - точки B отнимаем координаты начала — точки A). Координаты $\overrightarrow{BC}$ такие $(x-3, y-2, z-5)$ (от координат точки C отнимаем координаты точки B). Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, равны их соответствующие координаты $x - 3 = 2$, $y - 2 = 6$, $z - 5 = -4$. Находим координаты C: $x = 5$, $y = 8$, $z = 1$.

Ответ: $(5, 8, 1)$

Задача 3.3.9 Найти проекцию точки $A(4, 9, 1)$ на прямую l

$$\begin{cases} x &= 1 + t, \\ y &= -11 + 2t, \\ z &= -t. \end{cases}$$

Решение. Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную к l. Точка пересечения этой плоскости и l как раз и будет искомой проекцией. Уравнение плоскости, перпендикулярной к l, имеет вид (см. задачу 3.3.5, стр. 33): $x + 2y - z + D = 0$. Теперь найдем D так, чтобы точка A лежала на этой плоскости. Получаем: $4 + 2 \cdot 9 - 1 + D = 0$. Отсюда, $D = -21$. Итак, уравнение плоскости $x + 2y - z - 21 = 0$. Найдем координаты точки пересечения этой плоскости и прямой l (см. задачу 3.3.2, стр. 28): Искомые координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -11 + 2t, \\ z = -t, \\ x + 2y - z - 21 = 0. \end{cases}$$

Подставляем x, y и z в последнее уравнение, находим t, а потом восстанавливаем x, y и z: $1 + t + 2(-11 + 2t) - (-t) - 21 = 0$, и $6t - 42 = 0$, $t = 7$,

$$\begin{cases} x = 1 + 7, \\ y = -11 + 2 \cdot 7, \\ z = -7; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8, \\ y = 3, \\ z = -7. \end{cases}$$

Ответ: $(8, 3, -7)$

Задача 3.3.10 Найти точку, симметричную точке $A(1, -1, 12)$ относительно прямой l

$$\begin{cases} x &= 7 - 3t, \\ y &= 5, \\ z &= t. \end{cases}$$

Решение. План действий.
1. Найдем проекцию точки A на прямую l, как в предыдущей задаче. (Эта проекция — точка B).
2. Точка B — это середина отрезка между точкой A и симметричной ей точкой C. Найдем точку C.

1. Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную к l (точка пересечения этой плоскости и l как раз и будет точкой B — см. задачу 3.3.9, стр. 36). Вид этой плоскости $-3x + z + D = 0$ (в качестве нормального вектора плоскости взяли направляющий вектор прямой l). Теперь найдем D так, чтобы точка A лежала на этой плоскости. Получаем: $-3 \cdot 1 + 12 + D = 0$. Отсюда, $D = -9$. Итак, уравнение плоскости $-3x + z - 9 = 0$. Найдем координаты точки пересечения этой плоскости и прямой l (см. задачу 3.3.2, стр. 28). Искомые координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x = 7 - 3t, \\ y = 5, \\ z = t, \\ -3x + z - 9 = 0. \end{cases}$$

Подставляем x, y и z в последнее уравнение, находим t, а потом восстанавливаем x, y и z: $-3 \cdot (7 - 3t) + t - 9 = 0$, и $10t - 30 = 0$, $t = 3$,

$$\begin{cases} x = 7 - 3 \cdot 3, \\ y = 5, \\ z = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2, \\ y = 5, \\ z = 3. \end{cases}$$

Итак, $B(-2, 5, 3)$.

2. Здесь мы повторяем соответствующий “кусок” из задачи 3.3.8, стр. 35 Пусть $C(x, y, z)$ — это точка симметричная A.

Точка B — середина отрезка AC, поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ таковы: $(-3, 6, -9)$ (от координат конца — точки B отнимаем координаты начала — точки A). Координаты $\overrightarrow{BC}$ такие $(x+2, y-5, z-3)$ (от координат точки C отнимаем координаты точки B). Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, равны их соответствующие координаты $x+2 = -3$, $y-5 = 6$, $z-3 = -9$. Находим координаты C: $x = -5$, $y = 11$, $z = -6$.

Ответ: $(-5, 11, -6)$

Глава 4

Прямая на плоскости

Сведения, требуемые для решения задач этого раздела.

- Прямая на плоскости может быть задана *параметрическими уравнениями*:
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t, \end{cases}$$
Здесь $(x_0,\ y_0)$ — координаты какой-нибудь точки, лежащей на прямой, $(\alpha,\ \beta)$ — координаты какого-нибудь вектора, параллельного прямой (такой вектор называется *направляющим*)
- Прямая на плоскости может быть задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, причем вектор с координатами (A, B) перпендикулярен этой прямой (его часто называют *нормальным* вектором прямой).
- Прямая, не параллельная оси OY, может быть задана уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Здесь k — тангенс угла наклона прямой ($k = tg\varphi$ — см. рисунок 4.1), b — ордината точки пересечения прямой и оси OY
- Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{4.1}$$
- Сведения о векторах и скалярном произведении векторов на стр. 4, 7

Задача 4.1.1 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1, 3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(4, -5)$

Решение. Уравнение прямой будет иметь вид $4x - 5y + C = 0$

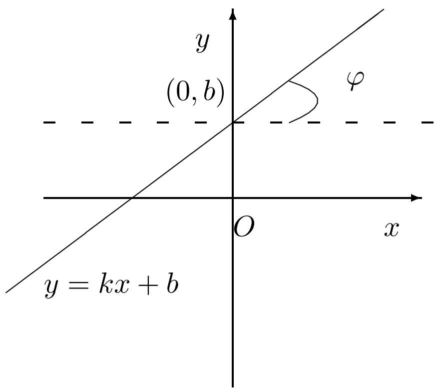


Рис. 4.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

(коэффициенты перед x, y, — координаты перпендикулярного вектора). Точка M_0 лежит на прямой, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению прямой. Подставляем координаты: $4 \cdot 1 - 5 \cdot 3 + C = 0$, откуда $C = 11$

Ответ: $4x - 5y + 11 = 0$

Задача 4.1.2 Написать общее уравнение прямой, проходящей через 2 точки $K(1, -8)$ и $M(7, 3)$.

Решение. Напишем сначала параметрические уравнения прямой (см. пространственный случай в задаче 3.2.2, стр. 21, он отличается от данного лишь наличием третьей координаты). Итак, за направляющий вектор прямой берем вектор $\overrightarrow{KM}(6, 11)$. Уравнения прямой KM:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + 6t, \\ y & = & -8 + 11t. \end{array} \right.$$

Тогда из первого уравнения $t = \frac{x-1}{6}$, из второго $t = \frac{y+8}{11}$. Приравниваем, $\frac{x-1}{6} = \frac{y+8}{11}$ (этот вид уравнения называется *каноническим*). Отсюда, $11(x - 1) = 6(y + 8)$ и $11x - 6y + 59 = 0$.

Ответ: $11x - 6y + 59 = 0$

Задача 4.1.3 Найти точку пересечения двух прямых:
$2x + 3y + 1 = 0$ и $x - 2y - 10 = 0$.

Решение. Точка пересечения лежит на обеих прямых, поэтому ее координаты обязаны удовлетворять и первому, и второму уравнению, т.е. быть решением системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 &= 0, \\ x - 2y - 10 &= 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $x = 2y + 10$ и подставляем в первое. Получаем $2(2y + 10) + 3y + 1 = 0$, отсюда $7y = -21$ и $y = -3$. Находим, $x = 2 \cdot (-3) + 10 = 4$.

Ответ: $(4, -3)$

Задача 4.1.4 Дано уравнение прямой l: $4x - y + 3 = 0$. Выписать общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 5)$ и

1) параллельной l;
2) перпендикулярной l.

Решение. В общем уравнении прямой (каким у нас и задана l) коэффициенты перед x и y — это координаты перпендикулярного к прямой вектора. Итак, l перпендикулярна вектору $(4, -1)$.

1) Параллельная к l прямая перпендикулярна тому же самому вектору $(4, -1)$. Можно взять его координаты за коэффициенты перед x и y. Уравнение искомой прямой $4x - y + C = 0$. Точка $A(2, 5)$ лежит на искомой прямой, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению: $4 \cdot 2 - 5 + C = 0$. Находим $C = -3$. Уравнение искомой прямой $4x - y - 3 = 0$.

2) Перпендикулярная к l прямая параллельна вектору $(4, -1)$. Можно взять его за направляющий вектор и записать параметрические уравнения прямой (у нас есть параллельный вектор и точка на прямой):

$$\begin{cases} x &= 2 + 4t, \\ y &= 5 - t. \end{cases}$$

Осталось из параметрических уравнений получить общее (это можно сделать только! на плоскости). Делается это так: из первого уравнения выражается t и приравнивается к тому же t, но выраженному из второго уравнения. Из первого уравнения $t = \frac{x-2}{4}$, из второго $t = \frac{y-5}{-1}$. Получаем, $\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{-1}$. Раскрываем пропорцию, получаем $-(x-2) = 4(y-5)$ и $x + 4y - 22 = 0$.

Ответ: 1) $4x - y - 3 = 0$, 2)$x + 4y - 22 = 0$.

Задача 4.1.5 Две стороны параллелограмма $ABCD$ лежат на прямых BC $2x + y + 2 = 0$ и CD $x - 4y + 1 = 0$, а одна из вершин — точка $(1, 5)$. Найти координаты остальных вершин.

Решение. В условии дана вершина $A(1, 5)$ (проверьте, что координаты этой точки не удовлетворяют уравнениям прямых BC, CD, и, значит, она не может быть ни одной из вершин B, C, D). Прямые AB и AC параллельны данным прямым и проходят через данную точку A. Так же, как в задаче 4.1.4, стр. 41 **(1)**, найдем их. Прямая AB имеет уравнение $x - 4y + C = 0$. Подставим координаты точки A. Получим $1 - 4 \cdot 5 + C = 0$, откуда $C = 19$. Итак, AB имеет уравнение $x - 4y + 19 = 0$. Аналогично, (проверьте!) находим уравнение AC: $2x + y - 7 = 0$. Теперь найдем координаты вершин, как пересечение соответствующих сторон. Координаты точки B (пересечение BC и AB) — это решение системы (см. задачу 4.1.3, стр. 40)

$$\begin{cases} 2x + y + 2 &= 0, \\ x - 4y + 19 &= 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $B(-3, 4)$. Точно так же найдем координаты $C(-1, 0)$ и $D(3, 1)$.

Ответ: $B(-3, 4)$,$C(-1, 0)$, $D(3, 1)$

Задача 4.1.6 Найти расстояние от точки с координатами $(2, -1)$ до прямой $3x + 4y - 5 = 0$

Решение. Используем формулу расстояния от точки до прямой (4.1):

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$

Задача 4.1.7 Найти уравнения трех сторон квадрата $ABCD$, если известны координаты $A(-5,1)$ и уравнение одной из его сторон $2x+3y+4=0$.

Решение. Проверьте, что координаты точки A не удовлетворяют уравнению данной прямой. Так что будем считать, что это — сторона BC.

Найдем уравнение AD. Это прямая параллельна BC и проходит через точку A (см. задачу 4.1.4, стр. 41 (1)): $2x+3y+C=0$, а C находится так, чтобы координаты точки A удовлетворяли этому уравнению. Получаем, $C = 7$ (проверьте!) Итак, AD: $2x+3y+7=0$.

Прямая AB перпендикулярна BC и проходит через A (см. задачу 4.1.4, стр. 41 (2)). Параметрические уравнения AB:

$$\begin{cases} x &= -5+2t, \\ y &= 1+3t. \end{cases}$$

Общее уравнение AB такое: $3x - 2y + 17 = 0$ (выражаем t из первого уравнения и приравниваем к t, выраженному из второго).

Теперь найдем уравнение CD. Эта прямая параллельна AB, значит имеет уравнение $3x - 2y + C = 0$. Поскольку $ABCD$ — квадрат, расстояние от A до искомой CD равно расстоянию от A до BC. Считаем расстояние от A до BC по формуле (4.1):

$$\frac{|2\cdot(-5)+3\cdot 1+4|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Расстояние же от A до CD по той же формуле (4.1) считается так:

$$\frac{|3\cdot(-5)-2\cdot 1+\mathrm{C}|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{|-17+C|}{\sqrt{13}}.$$

Приравниваем

$$\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{|-17+C|}{\sqrt{13}},$$

откуда $|-17+C| = 3$ и $-17+C = \pm 3$, $C = 14$ или $C = 20$. Обе прямые подходят (существует, на самом деле, два квадрата, удовлетворяющие условиям задачи)

Ответ: $2x+3y+7=0$, $3x-2y+17=0$, $3x-2y+14=0$ или $2x+3y+7=0$, $3x-2y+17=0$, $3x-2y+20=0$.

Задача 4.1.8 Написать уравнение прямой, проходящей под углом $30°$ к оси OX и содержащей точку $A(2\sqrt{3},-3)$.

Решение. Воспользуемся уравнением с угловым коэффициентом $y=kx+b$. По условию $k=tg30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.Искомое уравнение $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+b$. Ему должны удовлетворять координаты точки $A(2\sqrt{3},-3)$: $-3=\frac{1}{\sqrt{3}}2\sqrt{3}+b$.Отсюда $b=-5$.

Ответ: $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-5$

Задача 4.1.9 Написать уравнение прямой, параллельной прямой $y=2x+1$ и пересекающей ось OY при $y=-6$

Решение. Поскольку прямые параллельны, наклон искомой прямой такой же, а, значит, угловой коэффициент $k=2$. Уравнение $y=2x+b$. Надо, чтобы эта прямая пересекала ось OY при $y=-6$, то есть проходила через точку $(0,-6)$. Подставляем координаты, получаем $-6=2\cdot 0+b$, $b=-6$.

Ответ: $y=2x-6$

Оглавление

Финогенов Антон Анатольевич
Финогенова Ольга Борисовна

**Руководство по решению задач
по аналитической геометрии**

Учебно-методическое пособие по высшей математике для
студентов всех форм обучения

Оригинал-макет подготовлен в РИЦ ЮГУ

Подписано в печать 05.12.2008
Формат $60 \times 84/16$. Гарнитура Computer Modern LH
Усл.п.л. 3. Тираж 55. Заказ №869

Редакционно-издательский центр ЮГУ,
628012, Ханты-Мансийский автономный округ,
г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16