3-С. Даны W, X, Y такие, что $|W| = |X| = |Y| = q$,

и мн-во $M \subseteq W \times X \times Y$.

Вопрос: Существует ли $M' \subseteq M$ такое, что $|M'| = q$

и 1-е, 2-е, 3-й координаты троек из M' пробегают

W, X, Y соответственно.

3-SAT $\leq_p$ 3-С.

$V = \{x_1, \dots, x_n\}$ набор булевых переменных.

$C = \{c_1, \dots, c_m\}$ набор от ровно 3 литералов.

Выполнимо ли ?

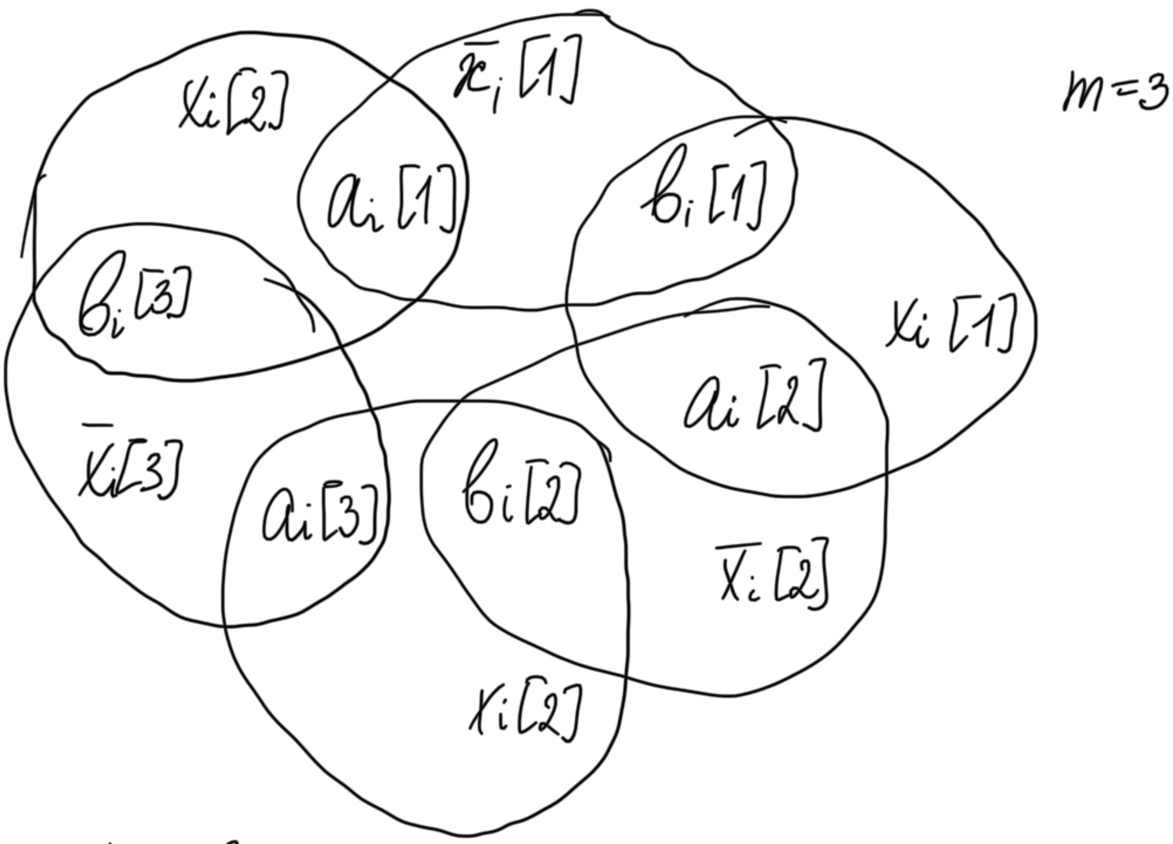
Проверка выполнимости

Для каждой переменной $x_i \in V$ построим 2 мн-ва троек

$$T_i^1 = \{(\bar{x}_i[j], a_i[j], b_i[j]) \mid 1 \leq j \leq m\}$$

$$T_i^0 = \{(x_i[j], a_i[j+1], b_i[j]) \mid 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{(x_i[m], a_i[1], b_i[m])\}$$

Всего таких троек будет $2m \cdot n$. На первом месте $2mn$ элементов, на 2-м, 3-м местах по mn элементов.



Все 3 координаты должны быть различны

Развёртка

По каждому клозу C_j построим

$C_j^\# = \{(x_i[j], s_1[j], s_2[j]) \mid x_i$ входит в $C_j\} \cup$

$\cup \{\bar{x}_i[j], s_1[j], s_2[j] \mid \bar{x}_i$ входит в $C_j\}$

Таких троек $3m$, на вторых и третьих местах будет по m дополнительных элементов.

Достройка

$2mn - m(n+1) = m(n-1)$

$G = \{(x_i[j], g_1(l), g_2(l)) \mid 1 \le l \le m(n-1)\} \cup$

$\cup \{(\bar{x}_i[j], g_1(l), g_2(l)) \mid 1 \le l \le m(n-1)\}$

$M = \bigcup_{i=1}^{n} (T_i^1 \cup T_i^0) \cup \bigcup_{j=1}^{m} C_j^\# \cup G$

$W = \{x_i[j], \bar{x}_i[j]\}$ в нем $2ml$ элементов

$X = \{a_i[j], s_1[j], g_1(l)\}$ в нем $2ml$

$Y = \{b_i[j], s_2[j], g_2(l)\}$ в нем $2ml$

$|W| = |X| = |Y| = 2mn$

Всего троек: $2mn + 3m + 2mn(n-1)$

Пусть C выполняется. Есть набор значений истинности $\varphi: V \to \{0,1\}$ такой, что $\varphi(C_j) = 1$ для $\forall j$

Зафиксируем в каждом клозе C_j один истинный литерал. Из $C_j^\#$ возьмем соответств. тройку

Из $3m$ троек из $\bigcup_j C_j^\#$ выбрали ровно m

Если $x_i[j]$ уже выбрана на 1ом шаге, то добавляем все тройки элементов из T_j^1, если $\bar{x}_i[j]$, то все тройки из T_i

Будет выбрано $m \cdot n$ троек, все $a_i[j]$ и $b_i[j]$ будут покрыты. Осталось выбрать $2mn - m - mn = m(n-1)$

Предположим, что не получилось выбрать по одному тройек
классу из W, X, Y. Выбрали либо все T_i^1 или T_i^0

По значениям истинности построим. Противоречие.

Следствие

Задача о точном покрытии 3-х элементного мн-ва

Задача ТП-3 NP полна.

ТП-3: Дано мн-во Q из $3q$ элементов и нек-е семейство $\mathcal{C}$ 3-х элементных подмножеств из Q.

Вопрос: сущ. ли q мн-в $C_1, \dots, C_q \in \mathcal{C}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{q} C_i = Q$?

3.-С. $\le_p$ ТП-3. Возьмём произвольный экземпляр задачи 3-С., положим $Q := W \cup X \cup Y$ и каждой тройке $(w, x, y) \in M$ сопоставим подмножество $\{w, x, y\} \subseteq Q$

Задача

Полиномиальный алгоритм для РАЗБИЕНИЕ

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $S(a_i) \in \mathbb{Z}^+$

Вопрос: сущ. ли $A' \subseteq A$ такие, что $\sum_{a \in A'} S(a) = \sum_{a \notin A'} S(a)$?

Пусть $B = \sum_{a \in A} S(a)$. Если B нечетно ответ "НЕТ"

Пусть B четно $t(i,j)$ - булева переменная $1 \le i \le n, 0 \le j \le \frac{B}{2}$

$t(i,j) = 1 \Leftrightarrow$ в $\{a_1, \dots, a_i\}$ есть подмн-во, сумма размеров к-то равна j.

(Ответ на РАЗБИЕНИЕ да $\Leftrightarrow t(n, \frac{B}{2}) = 1$)

$t(i, 0)$ (пустое мн-во)

$$t(i,j) = \begin{cases} 1, \text{ если } t(i-1, j) = 1 \text{ или если } t(i-1, j - s(a_i)) = 1 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

i/j	0	1	2	3	…
1	1				
2	1				
3	1				
⋮	⋮				