$SAT \le_p 3\text{-}SAT$

$x_1, \dots, x_m$ – переменные

$C_1, \dots, C_k$ – клозы.

4) Пусть C_i имеет $n \geq 4$ литералов

$C_i = y_1 \vee \dots \vee y_n$, где y_i – литерал

Введём новые переменные z_1, z_2 и построим клозы:

$y_1 \vee y_2 \vee z_3$

$\neg z_1 \vee y_3 \vee z_2$

$\neg z_2 \vee y_4 \vee z_3$

...

$\neg z_{n-3} \vee y_{n-1} \vee y_{n-2}$

$\Rightarrow$ Пусть C_i – истинно, тогда какой-то $y_i = 1$.

Тогда среди всех клозов выше есть клоз:

$\neg z_{i-2} \vee y_i \vee z_{i-1}$, который истинен

Перед ним стоит клоз $\neg z_{i-3} \vee y_{i-1} \vee z_{i-2}$. Если $\neg z_{i-2} = 0 \Rightarrow z_{i-2} = 1$ и он истинен. С последним клозом также.

Тогда положим $z_1 = z_2 = \dots = z_{i-2} = 1$, а $z_{i-1} = z_i = \dots = z_{n-3} = 0$. Все новые клозы стали истинными.

$\Leftarrow$ Докажем, что если новые клозы выполнимы (т.е. $=1$), то хотя бы один из y_i равен 1.

О/п. Пусть за счёт z клозы истинны, а все $y_i = 0$.

$z_1 = 1 \Rightarrow \neg z_1 = 0 \Rightarrow z_2 = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ по индукции $z_{n-3} = 0$.

Но тогда последний клоз будет ложен. ⚡

$\Downarrow$

3-SAT — NP-полна

От 3-SAT легче сводить чем от SAT

❗ 2-SAT не NP-полна.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{3-SAT} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\text{ВП (вершинное покрытие)} & & \text{3-сочетание} \\
\swarrow \quad \searrow & & \downarrow \\
\text{Клика} \quad \text{Гамильтонов цикл} & & \text{Разбиение}
\end{array}
$$

Вершинное покрытие:

Дано: граф и нат. число j

Вопрос: существует ли у данного графа, у которого есть ВП, где номер самой большой вершины j.

ВП – NP-полна, т.к. к ней сводится 3-SAT.

Задача „Вершинное покрытие"

Покажем, что 3-SAT $\leq_p$ ВП

ВП:

Дано: граф $G = (V, E)$ и дано число J

Вопрос: имеет ли граф G вершинное покрытие с не более чем J вершинами.

3-SAT

Дано: $x_1, \ldots, x_n$ – переменные

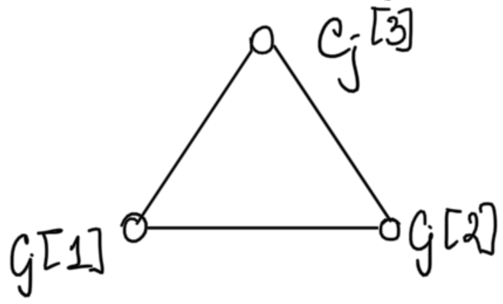
$C_1, \ldots, C_k$ – клозы, в каждом клозе 3 литерала.

1.) Для каждой переменной x_i будет две вершины

x_i и $\overline{x_i}$ и одно ребро, связывающее их: x_i — $\overline{x_i}$

Когда будем строить ВП нам надо будет у каждого ребра взять один его конец (символизирующий 1).

2) Для каждого клоза C_j введём 3 вершины: $C_j[1]$, $C_j[2]$, $C_j[3]$ и связывающие их рёбра (3 штуки).



То есть в графе G будет $2n + 3k$ вершин.

Если клоз $C_j = w_j \vee y_j \vee z_j$, добавим рёбра $(C_j[1], w_j)$, $(C_j[2], y_j)$, $(C_j[3], z_j)$ ⊛

Всего будет $n + 3k + 3k$ рёбер.

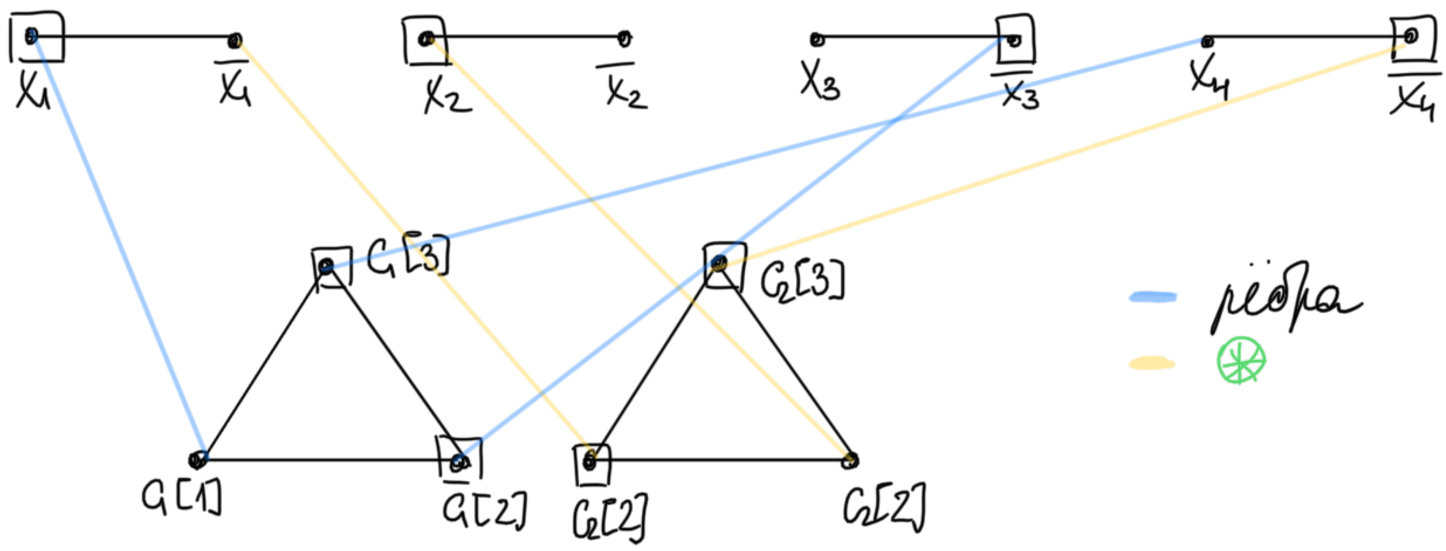
Наш граф строится за полиномиальное время.

Положим $J = n + 2k$.

Рассмотрим систему клозов:

$C = \{x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4, \ \neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4\}$

Построим соответствующий граф:



$J = 8 \ (= 4 + 2 + 2)$

Если наше построение верно, то G можно покрыть 8 вершинами. Как?

! Нет ВП с числом, меньшим J.

Общее док-во.

$\Rightarrow$ Если клоз выполним $\Rightarrow$ есть истинный литерал в этом клозе. С системой клозов аналогично. (есть набор истинных ⊛ литералов).

Если система клоз выполнима, то есть такой набор значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что в каждый клоз входит истинный литерал. ⊛

В нашем покрытии выберем на каждом ребре x_i o——o $\bar{x_i}$ истинный литерал, а в Δ, отвечающем для клоза, куда литерал входит, две другие вершины.

Всего будет $J = n + 2k$ вершин.

Пусть $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow c$ - выполнима.

Выберем вершины □. Получим $J = 8$

По построению мы покрыли все рёбра (т.е. выбрали вершину хотя бы с одной стороны.)

$\Leftarrow$ Пусть есть в нашем построенном графе покрытие из $J = n + 2k$ вершин (меньше не может быть.)

Если есть ребро o——o, то один конец его покрыт, т.к. покрытие с Δ выбрано по 2 вершины.

Т.к. с o——o выбрано по одной вершине, то это задаёт набор переменных.

Для каждого клоза 3 вершины, две из которых выбраны.

Ребро, соединяющее с невыбранной вершиной, соединен с выбранной на •—• вершинах.

Задача „Клика"

Дано: граф $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$

Вопрос: существует ли в G клика из $\geq k$ элементов.

Клика – это полный подграф.

Независимое множество (НМ)

Дано: граф $G=(V,E)$, $N \in \mathbb{N}$

Вопрос: существует ли в G независимое множество из $\geq N$ вершин.

Лемма:

Следующие условия на мн-ве V' вершин графа $G=(V,E)$ эквивалентны:

1.) V' – ВП

2.) $V \setminus V'$ – НМ

3.) $V \setminus V'$ – клика в доп. графе $\overline{G}=(V, V \times V \setminus E)$

В $\overline{G}$ заменяем все рёбра на их отсутствие и наоборот.

Следствие

Задачи Клика и НМ - NP-полны.

Задача „Изоморфизм подграфов"

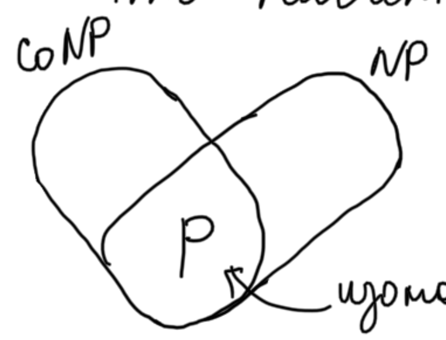
Дано: графы H_1 и H_2

Вопрос: существует ли в H_2 подграф, изоморфный H_1?

Эта задача NP-полна, т.к. к ней легко сводится КЛИКА.

Действительно, КЛИКА равносильна вопросу, существует ли в H_2 подграф, изоморфный полному графу K_n.

Что насчёт изоморфизма графов?



изоморфизм графов.

coNP - класс задач, отвечающих НЕТ (отрицание NP).