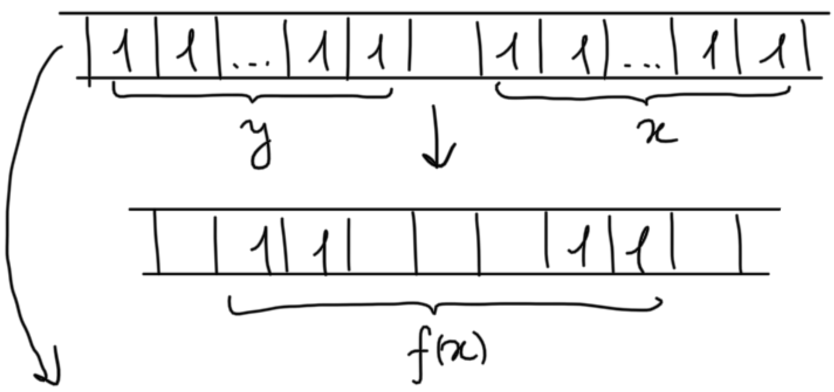
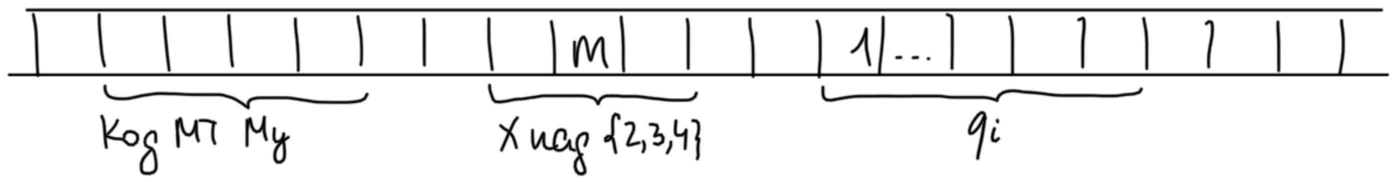
$$F(y,x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } y \text{ — номер МТ, вычисляющей } f \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$



1) Мы можем перейти к такой конфигурации:



2) Надо переписать данные X в формат машины M_y.

3) Вставляем маркер m, который отмечает положение читающей головки M_y (в начале она стоит в ячейке перед X).

4) Надо запоминать текущее состояние M_y

общий вид: $q_i a_j \to q_k a_l D$, где $D \in \{R, L, N\}$

Ищем q_i в коде МТ M_y (между 8)

ищем вторую с конца единичку.

смотрим следующую за ней ячейку (3 или 4)

Если совпадает, то бегаем зигзагом.

Как только найдём q_i в коде МТ M_y, надо проверить, стоит ли после него a_j. Если нашли, то мы нашли заголовок нужной нам команды и переходим в $q_k a_l D$. Если не нашли, то M_y должна остановиться, т.к. не нашли нужной команды.

! Но проблема в том, что a_l может быть больше a_j, тогда надо сдвигать всё на ленте, освобождая место, это всё будет медленно работать.

Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества

Говорим о подмножествах натуральных чисел.

Мн-во A наз. рекурсивным, если его характеристическая ф-ия:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases}$$

вычислима.

Пример: $\varnothing$, $\mathbb{N}$; мн-во нечётных чисел

Свойства

1. Дополнение рекурс. мн-ва рекурсивно

$$\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$$

2. Если A и B - рекурсивны, то $A \cap B$ и $A \cup B$ рекурсивны

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$$

3. $\varnothing$ - рекурсивно

Мн-во A наз. рекурсивно-перечислимым, если существует вычислимая ф-ия $f(x)$ такая, что A совпадает с областью значений этой ф-ии.

Предложение

Мн-во A рекурсивно $\Leftrightarrow$ A и $\overline{A}$ - оба рекурсивно перечислимы.

Док-во

$\Rightarrow$ Пусть A - рекурсивно

Если $A = \varnothing$ или $A = \mathbb{N}$, то тривиально, т.к. $\varnothing$ и $\mathbb{N}$ - р.-п.

Будем считать, что $A \neq \varnothing$ и $A \neq \mathbb{N}$ ($\overline{A} \neq \varnothing$).

Возьмём элемент $a \in A$ и $b \in \overline{A}$ и рассмотрим такие ф-ии:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x\chi_A(x) + (1-\chi_A(x))a \\ g(x) &= x\chi_{\overline{A}}(x) + (1-\chi_{\overline{A}}(x))b \end{aligned}\right\} \text{ вычислимы}$$

Если $x \in A$, то $f(x) = x$, а если $x \notin A$, то $f(x) = a$, т.е. в любом случае получаем элемент из A.

Значит любой эл-т из A - значение, т.е. A - есть мн-во значений $f(x)$, а $\overline{A}$ - мн-во значений $g(x)$.

$\Leftarrow$ Надо доказать, что если A и $\overline{A}$ - р.-п., то A - рекурсивно.

Попеременно запускаем МТ ф-ий, порождающих A и $\overline{A}$.

МТ пишет на ленту 1 и делает 100 тактов первой МТ, вычисляя $f(1)$, если успевает, то оно где-то записано и если $f(1) = x$, то для $\overline{A}$

(также 100 тактов) и также вычисляется $f(1)$. Если и она не отработает, то запускается 1ая МТ.

Предложение

Мн-во A р.-п. $\Leftrightarrow$ A является областью определения некоторой частично вычислимой ф-ии., т.е. $\exists$ ф-ия f такая, что:

$$f(x) = \begin{cases} \text{определена, если } x \in A \\ \text{не определена, если } x \notin A \end{cases}$$

Доказательство

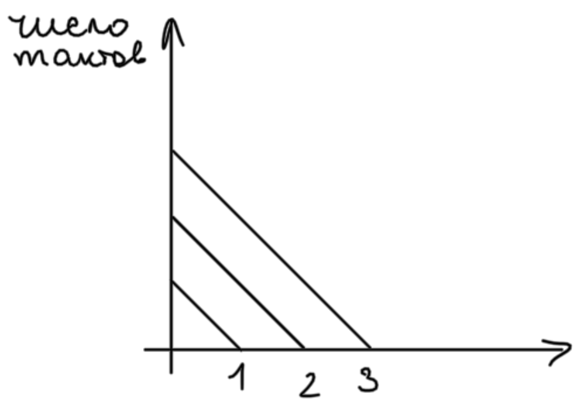
A - р п. $\Rightarrow \exists f(x)$

Дано, что $\exists g(x)$ такая, что A - это мн-во значений для $g(x)$.

Построим f так:

Для любых x итерируем $t = 1, 2, \dots$, вычисляем $g(t)$ и сравниваем с x. Если совпало, то печатаем 1.

$\Leftarrow$ Пусть A - область определения некоторой вычислимой ф-ии. $f(x)$.



Ф-ия f останавливается, когда число $\in A$.

Работает по 100 тактов на каждом числе.

Пример р.-п., но не рекурсивного мн-ва

$F(x,x)$ – вычислима, т.е. область определения – это мн-во номеров самоприменимых МТ (т.е. машину с номером x запустить на входе с x она даст какой-то результат).

Это р.-п. мн-во A.

Докажем, что A не рекурсивно.

Д/п. Если A рекурсивно, то $\overline{A}$ тоже рекурсивно и в частности р.-п. Значит, это дополнение – область определения некоторой вычислимой ф-ии $f(x)$. Воспользуемся её универсальностью.

$\exists a$ такое, что $F(a,x) = f(x)$.

Имеем $x \in A \Leftrightarrow F(x,x)$ не опр., в частности $F(a,a)$ не определена при таком $a \in \overline{A}$.

$\Downarrow$

$F(a,a) = f(a)$, то $f(a)$ должно быть опр. для $a \in \overline{A}$ (по предположению) противоречие.

! Доказали неразрешимость проблемы остановки МТ.