Пример: В Γ есть 2 равномощных подмн-ва

$A=\{a_1,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,\dots,b_n\}$

$\overbrace{a_i \mid a_j \mid a_k \mid \quad \mid \quad \mid}^{\text{слово над } A} \quad \mid \quad \mid \quad \mid \quad \mid$ $\longrightarrow$ $a_k \mid \overbrace{b_i \mid b_j \mid b_k \mid \quad \mid \quad \mid}^{\text{то же самое слово над } B.} \quad \mid$

$\uparrow$

q_0

Переводит слово над A в слово над B через пробел.

Программа переводчик.

Решение: $\Gamma = A \cup B \cup \{\overset{\text{маркер}}{m}, b\}$

$$Q=\{q_0,\dots,q_n, \underbrace{s_0,\dots,s_n}_{\text{запоминаем букву}}, \underbrace{t_0,\dots,t_n}_{\text{возвращаемся обратно за след. буквой.}}\}$$

$q_0 a_i \to q_i m$ – запомнили букву a_i и пометили её маркером
$q_i m \to q_i m R$
$q_i a_j \to q_i a_j R$ – просто двигаемся вправо
$q_i b \to s_i b R$ – дошли до конца слова и меняем состояние вправо

$s_i b \to t_i b_i$ – если дошли в слове из букв в до пустого символа, пишем b_i
$s_i b_j \to s_i b_j R$ – двигаемся до пустоты
$t_i b_j \to t_i b_j L$
$t_i b \to t_i b L$ – залезаем в слово над A
$t_i a_j \to t_i a_j L$ – доходим до маркера
$t_i m \to t_0 a_i$ – восстанавливаем букву a_i
$t_0 a_i \to q_0 a_i R$ – перешли в сл. клетку в слове над A.

Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ наз. **частично вычислимой**, если существует МТ $\mathcal{F}$ такая, что начав работу в конфигурации $\mid \underbrace{0 \mid 1 \mid 1 \mid \dots \mid 1}_{x_1} \mid b \mid \underbrace{1 \mid 1 \mid \dots \mid 1}_{x_2} \mid b \mid \dots \mid b \mid \underbrace{1 \mid 1 \mid \dots \mid 1}_{x_n} \mid b$

заканчивает её в конфигурации $\mid b \mid \underbrace{1 \mid 1 \mid \dots \mid 1 \mid 1}_{f(x_1,\dots,x_n)} \mid b \mid$,

если $f(x_1,\dots,x_n)$ определено и работает вечно, если значение $f(x_1,\dots,x_n)$ не определено.

Вычислимая ф-ия – частично вычислимая ф-ия +

всюду определенная.

Пример: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ — вычислимая

$$\underbrace{|1|1|\ldots|1|}_{x_1}\ \underbrace{|1|1|\ldots|1|}_{x_2}$$

$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ — частично вычислимая над $\mathbb{N}$

❗ Число частично вычислимых ф-ий счётно, т.к. они определяются МТ (МТ счётное число)

Пусть Φ — некоторое мн-во n-местных ф-ий.

Скажем, что ф-ия $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ является **универсальной** для класса Φ, если выполняется:

- $\forall a \in \mathbb{N}: F(a, x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$
- $\forall$ ф-ия из Φ так получается, т.е. $\forall f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi\ \exists a \in \mathbb{N}:$
  $F(a, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$

Наблюдение 1 ($\nabla 1$)

Для класса ф-ий Φ существует универсальная $\Leftrightarrow$ Φ — счетен.

Доказательство:

Необходимость ($\Rightarrow$) очевидно

Достаточность ($\Leftarrow$): т.к. Φ — счетен, перенумеруем все ф-ии из Φ: $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$

Положим F так: $F(m, x_1, \ldots, x_n) := f_m(x_1, \ldots, x_n)$.

Она удовлетворяет определению универсальной ф-ии.

Пример:

Пусть $\Phi = \mathbb{Z}[x]$ (многочлены от одной переменной)

Существует ли $F(y,x) \in \mathbb{Z}[y,x]$ такой, который универсален для Φ.

Ответ: нет!

Аргумент со степенями: если степени по x ($\deg_x F(y,x) = k$), то все многочлены вида $F(m,x)$ имеют степень $\leq k$. А мн-ны имеют любую степень $\Rightarrow$ не получается.

Пример

Пусть Φ - класс всех вычислимых ф-ий одной переменной. Существует ли для Φ универсальная вычислимая ф-ия? (просто универсальная сущ.!)

Ответ: нет!

Диагональный аргумент

о/п. Пусть $F(y,x)$ - это универсальная вычислимая ф-ия. Тогда ф-ия $F(x,x)$ - вычислимая. Но тогда и $F(x,x)+1$ вычислима. (т.к. $x+1$ вычислима). Раз $F(y,x)$ - универсальна, то $\exists a \in \mathbb{N}$:

$$F(a,x) = F(x,x)+1$$

Это невозможно, т.к. при $x=a$ противоречие.

Теорема

Существует частично вычислимая ф-ия $F(y,x)$ универсальная для класса всех частично вычислимых одноместных ф-ий.

Доказательство

Γ Арифметизация МТ

$$q_i a_j \to q_k a_l D, \quad D \in \{R, L, N\}$$

Все индексы переведём в двоичные числа.

$$\left[\begin{array}{l} 0 \to z \\ 1 \to u \end{array}\right.$$

$q \to 1$ $\quad$ $R \to 5$
$a \to 2$ $\quad$ $L \to 6$
$u \to 3$ $\quad$ $N \to 7$
$z \to 4$

Каждая команда запишется десятичным числом.

$$q_1 a_3 \to q_0 a_5 R \qquad 3 = 11_2, \quad 5 = 101_2$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} q & u & a & u & u & q & z & a & u & z & u & R \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\underset{\text{МТ}}{n(M)} = n(c_1) \,\&\, n(c_2) \,\&\, \dots \,\&\, n(c_k)$$ – номер МТ

! Не каждое число является номером какой-то МТ

С помощью арифметизации мы можем все МТ эффективно перенумеровать.

Построим МТ с входным алфавитом, содержащим $1, 2, \dots, 8$, которая работает так:

$$\underbrace{|\,*\,|\,*\,|\dots|\,*\,|\,*\,|}_{y\text{ - слово над }\{1,\dots,8\}}\, b \,\underbrace{|\,\#\,|\,\#\,|\dots|\,\#\,|\,\#\,|}_{x\text{ - слово над }\{2,3,4\}}$$

– просто входное слово из a.

По этой конфигурации она проверяет, является ли y номером некоторой МТ.

Если нет, то она всё стирает и работает бесконечно

Если да, то пусть M_y - это МТ с номером y. Тогда наша МТ проверяет является ли x входного слова в алфавите M_y.

Если и это верно, то наша МТ эмулирует работу M_y на входе x.