Следующая лекция 18.12

Погрешность алгоритма A – это $R_A = \max\limits_I \frac{OPT}{A(I)}$

(для задач максимизации, для задач минимизации дробь переворачиваем)

R_A характеризует „качество" (степень приблизительности алгоритма) алгоритма A, $R_A \geq 1$, и алгоритм тем точнее, чем ближе R_A к 1.

Погрешность задачи Z – это $R_Z = \{\inf\limits_A R_A \mid A$ – прибл. алгор. для Z.$\}$

$R_Z \geq 1$

Заметим, что R_Z может быть 1 для NP трудной задачи! Если $R_Z = 1$, то существует последовательность $\{A_k\}$ приближенных полиномиальных алгоритмов для Z, для которых $R_{A_k} \leq 1 + \frac{1}{k}$.

Такая последовательность наз. приближенной полиномиальной схема (ППС)

Пример: задача РЮКЗАК

$\{a_1, \ldots, a_n\}$, $s: A \to \mathbb{Z}^+$

$\sigma: A \to \mathbb{Z}^+$

B – вместительность рюкзака. Нужно найти такое $A' \subseteq A$, что $\sum\limits_{a \in A'} s(a) \leq B$, а $\sum\limits_{a \in A'} \sigma(a)$ – максимальна.

Жадный алгоритм: отсортируем A по величине $\sigma(a) / s(a)$.

$\sigma(a_1)/s(a_1) \geq \sigma(a_2)/s(a_2) \geq \dots$

Кладём в рюкзак k предметов с наибольшей удельной ценностью, которые в него влезают.

Погрешность алгоритма 2.

Сначала переберём все пары предметов, найдём оптимальную, а остаток добьём жадным алгоритмом.

Вполне полиномиальная приближенная схема (ВППС) – это последовательность A_k приближенных алгоритмов, которая работает за время, ограниченное значением полинома от размера задачи и k и такая, что $R_A \leq 1 + \frac{1}{k}$

Теорема:

Пусть Z – некая целочисленная задача максимизации такая, что для любого экземпляра $I \in Z$ $OPT(I) \leq p(Max\,I, |I|)$, где $p(x,y)$ – полином, $|I|$ – размер I, $Max\,I$ – это максимум входящих в I числовых параметров. Тогда Z допускает ВППС тогда и только тогда, когда для Z есть псевдополиномиальный алгоритм.

Доказательство

Необходимость. Пусть есть ВППС. Возьмём $I \in Z$. Положим $\mathcal{E} = [p(max\,I, |I|)]^{-1}$ и возьмём тот приближенный алгоритм $A_{\mathcal{E}}$ из ВППС, погрешность которого $< 1+\mathcal{E}$.

Время работы этого алгоритма ограничено $q(|I|, \frac{1}{\mathcal{E}}) = q(|I|, p(Max I, |I|))$ – это многочлен от $|I|$ и $Max I$.

Имеем $\frac{OPT(I)}{A_{\mathcal{E}}(I)} < 1+\mathcal{E}$, т.е. $OPT(I) \leq (1+\mathcal{E}) A_{\mathcal{E}}(I)$ или $0 < OPT(I) - A_{\mathcal{E}}(I) \leq \mathcal{E} A_{\mathcal{E}}(I) \leq \mathcal{E} \cdot OPT(I) < 1$

Достаточность (для рюкзака) Возьмём псевдополином. алг. A для РЮКЗАК, он работает за время $O(n^2 V \log(nVS))$, где $V = \max v(a_i)$, а $S = \sum_a s(a)$

Для данного экземпляра I задачи РЮКЗАК построим новый экземпляр I', в котором стоимость предмета a определяется так: $v'(a) := \lfloor v(a)/k \rfloor$

Применим к I' A, он найдёт $OPT(I')$ за время $O(n^2 V/k \log(nSV/k))$

$$OPT(I) - k \cdot OPT(I') \leq k \cdot n$$

$$k\, OPT(I') \leq OPT(I)$$

$$\left\lfloor \frac{OPT(I)}{k} \right\rfloor \leq OPT(I')$$

Теперь выберем $k = \frac{V}{(k+1)n}$, где $k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть A_k – алгоритм, который в кач-ве решения задачи I возвращает $k\,OPT(I')$. A_k работает за время $O(n^2 V/V\ (k+1) n \log(\ )) = O(n^3 (k+1) \log(\ ))$ – это время полиномиально от размера I и от k.

Найдём его погрешность.

$$R_{A_k}(I) = \frac{OPT(I)}{A_k(I)} = \left[OPT(I) \le A_k(I) + kn \right] \le \frac{A_k(I) + kn}{A_k(I)} =$$

$$= 1 + \frac{V}{(k+1)A_k(I)} \le 1 + \frac{V}{(k+1)V} = 1 + \frac{1}{k+1}$$