$B = \sum_{a \in A} s(a)$

$n \times \frac{B}{2}$

Скажем, что алгоритм псевдополиномиальный, если $\exists$ многочлен $p(x,y)$ такой, что он решает каждый экземпляр нашей задачи за время $\le p(n,m)$ - где n - размер записи экземпляра, а m - максимум для входящих в этот экземпляр числовых параметров.

Скажем, что задача NP-трудна в сильном смысле, если для нее (при $P \neq NP$) нет псевдополиномиального алгоритма.

Примеры NP-трудных в сильном смысле задач

1° NP-трудные задачи без числовых параметров (ГЦ) или такие NP-трудные задачи, в которых числовые параметры ограничены полиномами от размера задачи (ВП).

2° ЗК. Даны n городов и $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных расстояний d_{ij}, а также число B. Существует ли последовательность $j_2, j_3, \ldots, j_n$ такое, что: $d_{1j_2} + d_{j_2 j_3} + \ldots + d_{j_n 1} \le B$

Берем граф $G = (V, E)$. $|V| = n$. Определяем:

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } (v_i, v_j) \in E \\ 2, \text{ если } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

$B_i = n$

4 - Разбиение

Дано $4n$ предметов, $s:\{a_1, \dots, a_{4n}\} \to \mathbb{Z}^+$

Обозначим $B = \frac{1}{n}\sum_i s(a_i)$ – средний суммарный размер 4х предметов.

Требуем, чтобы для любого i выполнялось

$$\frac{B}{5} \le s(a_i) \le \frac{B}{3}$$

Вопрос: Можно ли разбить это мн-во на n групп одинакового размера?

Теорема 4-Разбиение NP-полна в сильном смысле

Для доказательства построим полиномиальное сведение от 3-С к такому частному случаю 4-Разбиение, где размеры предметов ограничены полиномами от n.

Пусть W, X, Y – три мн-ва таких, что

$|W| = |X| = |Y| = q$ и $M \subseteq W \times X \times Y$. Пусть $|M| = m \ge q$

Пусть $|M| = m \ge q$

Пусть $z \in W \cup X \cup Y$

$\underset{\text{настоящий}}{z[1]}, \underbrace{z[2], \dots, z[N_z]}_{\text{фальшивые}}$, где N_z – это число появлений z в тройках из M.

Для каждой тройки из M будет предмет $u[\ell]$, $\ell = \overline{1, m}$

Всего будет $4m$ предметов.

Пусть $r = 32q$

Если $u[\ell]$ построен по тройке (w_k, x_i, y_j)

$s(u[\ell]) := 10r^4 - kr^3 - ir^2 - jr + 8$

$s(w_k[1]) := 10r^4 + kr^3 + 4$

$s(w_k[t]) := 8r^4 + kr^3 + 4$, $t > 1$

$s(x_i[1]) := 10r^4 + ir^2 + 2$

$s(x_i[t]) := 11r^4 + ir^2 + 2$, $t > 1$

$s(y_j[1]) := 10r^4 + jr + 1$

$s(y_j[t]) := 11r^4 + jr + 1$, $t > 1$

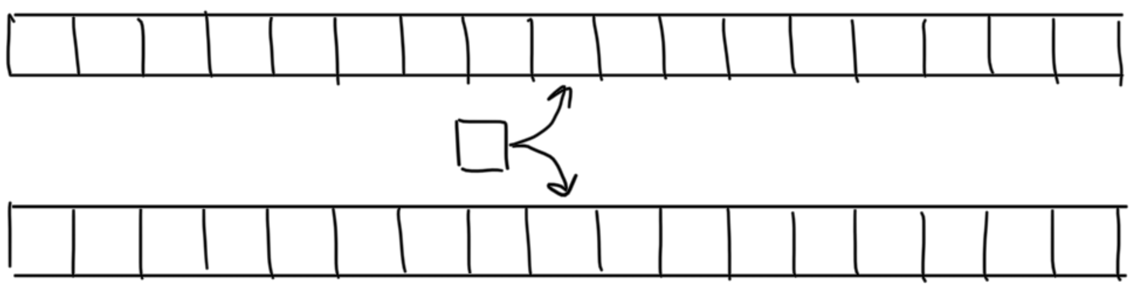
Можно посчитать, что $B = 40r^4 + 15$

Пусть $M' \subseteq M$ – 3-сочетание

$s(a_{i_1})\, t(a_{i_2}) + s(a_{i_3})\, t(a_{i_4}) = 40r^4 + 15$

Сводимость по Тьюрингу

OMT – оракульная машина Тьюринга



write-only

$A \leq_T B$, если существует полиномиальный алгоритм для OMT, решающий A, при условии, что оракул отвечает на B. (A сводится по Тьюрингу к B)

Зачёт: список задач, на зачёте рассказать задачу из списка.

Задача k-ППП (k-ое по порядку подмножество)

Дано: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $s: A \to \mathbb{Z}^+$, $k \leq 2^n$, $B = \sum\limits_{a \in A} s(a)$

Вопрос: Существует ли в A k различных подмножеств сумма размеров каждого из которых $\leq B$

РАЗБИЕНИЕ $\leq_T$ k-ППП

Пусть $g(A, s, k, B)$ – ф-ция, которая возвращает k-ППП.

РАЗБИЕНИЕ

Дано: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $s: A \to \mathbb{Z}^+$

Вопрос: существует ли $A' \subset A$ $\sum\limits_{a \in A'} s(a) = \sum\limits_{a \notin A'} s(a)$

1° Вычислим число $B = \frac{1}{2} \sum\limits_{a \in A} s(a)$

Если $B \notin \mathbb{Z}$, то ответ „Нет"

Поэтому считаем, что $B \in \mathbb{Z}$

2° Вычислим число L^* таких подмножеств в A, сумма размеров к-х $\leq B$

Положим $L_{min} = 0$, $L_{max} = 2^n$

$L = \frac{L_{min} + L_{max}}{2}$ и запросим $g(A, s, L, B)$

Если $g(A, s, L, B) = 1$, то

$L_{min} = L$

Иначе

$L_{max} = L$

3° Запрашиваем $g(A, s, L^*-1, B)$

Если $g(A, s, L^*, B-1) = 1$, то ответ на РАЗБИЕНИЕ „Нет"

Если $g(A, s, L^*, B-1) = 0$, то ответ на РАЗБИЕНИЕ „Да"

Покажем, что ОЗК (оптимизационная задача коммивояжёра) и ЗК (задача коммивояжёра) взаимно сводимы по Тьюрингу.

ЗК: $d_{ij} \in \mathbb{Z}^+$, B

Вопрос: $\exists$ ли циклическая расстановка π чисел $1, 2, \dots, n$ такая, что $\sum_{i=1}^{n} d_{i i\pi} \leq B$

ОЗК: $d_{ij} \in \mathbb{Z}$

Цель: найти циклическую перестановку, что сумма $\sum_{i=1}^{n} d_{i i\pi}$ минимальна

Ясно, что $ЗК \leq_T ОЗК \leq_T DMK \leq_p ЗК$

Для обратной сводимости введём вспомогательную задачу распознавания DMK (достройка маршрута коммивояжёра)

DMK: $d_{ij} \in \mathbb{Z}^+$, B, частичный маршрут $j_1, j_2, \dots, j_k$ $(k \leq n)$

Вопрос: $\exists$ ли продолжение частичного маршрута до полного с суммарной длиной $\leq B$?

Покажем, что $ОЗК \leq_T DMK$

$h(d_{ij}, B, (g_1, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}))$

1° Сначала вычислим длину оптимального маршрута B^*. Возьмём какие-нибудь естественные границы для B^*, например, $B_{min} := n \cdot \min_{i,j} d_{ij}$ и $B_{max} = \sum_{i,j} n \cdot \max_{i,j} d_{ij}$

Положим $B = \left\lceil \frac{B_{min} + B_{max}}{2} \right\rceil$ и запросим $h(d_{ij}, B, (g_1))$

Если да, то $B_{max} := B$

Если нет, то $B_{min} := B$

За $\log B_{max}$ шагов найдём B^*

2° Запросим $h(d_{ij}, B, (g_1, g_{i_1}))$, где $i = \overline{1, n}$

Найдём i_2, для которого ответ „Da"

3° $h(d_{ij}, B^*, (g_1, g_{i_1}, g_{i_2}))$, где $i_2 = 2, 3, \dots, i-1, i+1, \dots, n$

Итд. Ясно, что после $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ запросов оптимальный маршрут будет найден.

Приближенные алгоритмы

$d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$

Задача Упаковка в контейнер (УК)

Есть n предметов $\{u_1, \dots, u_n\}$ и ф-ия размера $s(u_i) \in (0, 1)$

Хотим разложить предметы по коробкам единичного размера. Нужно найти наименьшее число коробок.

УК NP-трудна в сильном смысле.

Приближенный алгоритм FF (first fit)

Легко сообразить, что $FF(I) \le 2\,OPT(I)$ для любого экземпляра I задачи УК.

$$2\sum_{i=1}^{n} u_i \geq FF(I)$$

$$OPT(I) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Предположение 1: Для любого экземпляра задачи I УК $FF(I) \le \frac{17}{16} OPT(I)$ и есть экземпляр со сколько угодно большим оптимумом, для которых

$$FF(I) > 17/10\,(OPT(I)-1)$$

FFD (first fit in descending order)

Предположение 2: Для любого экземпляра I задачи УК $FFD(I) \le \frac{11}{9} OPT(I)$ и есть экземпляры со сколько угодно большим оптимумом, для которых

$$FFD(I) \geq 11/9\,(OPT(I)-1)$$