Рекуррентные соотношения

Решение рекуррентных соотношений состоит из двух шагов:

1. **Общее решение однородного уравнения** $a_n^{(o)}$: приравниваем правую часть к нулю и решаем характеристическое уравнение.
2. **Частное решение неоднородного уравнения** $a_n^{(ch)}$: подбираем функцию такого же вида, как правая часть (метод неопределенных коэффициентов).

Общий ответ: $a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(ch)}$.

Пример 1. (1-й порядок, константа)

Задача 1а: $a_n = 2a_{n-1} + 5$.

Шаг 1. Однородное уравнение. Заменяем правую часть на 0: $a_n - 2a_{n-1} = 0$. Характеристическое уравнение: $r - 2 = 0 \implies r = 2$. Однородное решение: $a_n^{(o)} = C \cdot 2^n$.

Шаг 2. Частное решение. Справа стоит константа (5). Ищем частное решение в виде константы: $a_n^{(ch)} = A$. Подставляем в исходное: $A = 2A + 5$. Отсюда $-A = 5 \implies A = -5$. Частное решение: $a_n^{(ch)} = -5$.

Шаг 3. Сборка. $a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(ch)} = C \cdot 2^n - 5$. *Ответ:* $a_n = C \cdot 2^n - 5$.

Пример 2 (1-й порядок, многочлен)

Задача 1б: $a_n = -3a_{n-1} + n$.

Шаг 1. Однородное уравнение. $a_n + 3a_{n-1} = 0 \implies r + 3 = 0 \implies r = -3$. $a_n^{(o)} = C \cdot (-3)^n$.

Шаг 2. Частное решение. Справа многочлен 1-й степени (n). Ищем в виде $a_n^{(ch)} = An + B$. Подставляем в уравнение: $An + B = -3(A(n-1) + B) + n$. Раскрываем скобки: $An + B = -3An + 3A - 3B + n$. Группируем по n: $An + B = n(1 - 3A) + (3A - 3B)$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n:

- При n: $A = 1 - 3A \implies 4A = 1 \implies A = 1/4$.
- Свободный член: $B = 3A - 3B \implies 4B = 3/4 \implies B = 3/16$.

Частное: $a_n^{(ch)} = \frac{1}{4}n + \frac{3}{16}$. *Ответ:* $a_n = C(-3)^n + \frac{1}{4}n + \frac{3}{16}$.

Пример 3 (2-й порядок)

Задача 1в: $a_n = -a_{n-1} + 12a_{n-2} + 2^n$.

Шаг 1. Однородное. $a_n + a_{n-1} - 12a_{n-2} = 0$. Характеристическое: $r^2 + r - 12 = 0$. Корни: $r_1 = 3, r_2 = -4$. $a_n^{(o)} = C_1 3^n + C_2(-4)^n$.

Шаг 2. Частное. Справа 2^n. Так как 2 не является корнем характеристического уравнения, ищем в виде $a_n^{(ch)} = A2^n$. Подставляем: $A2^n = -A2^{n-1} + 12A2^{n-2} + 2^n$. Делим все уравнение на 2^{n-2}: $4A = -2A + 12A + 4$. $4A = 10A + 4 \implies -6A = 4 \implies A = -2/3$. Частное: $a_n^{(ch)} = -\frac{2}{3}2^n$. *Ответ:* $a_n = C_1 3^n + C_2(-4)^n - \frac{2}{3}2^n$.

Пример 4 (кратные корни)

Задача 1д: $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$.

Шаг 1. Однородное. $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$. Характеристическое: $r^2 - 4r + 4 = 0 \implies (r-2)^2 = 0$. Корень $r = 2$ кратности 2. Поэтому пишем: $a_n^{(o)} = (C_1 + C_2 n)2^n$.

Шаг 2. Частное. Справа n^2. Корень 1 не является корнем характеристического уравнения, поэтому ищем в обычном виде $a_n^{(ch)} = An^2 + Bn + D$. Подставляем в исходное: $An^2 + Bn + D = 4[A(n-1)^2 + B(n-1) + D] - 4[A(n-2)^2 + B(n-2) + D] + n^2$. Раскрываем скобки в правой части. После приведения подобных слагаемых, правая часть примет вид: $8An + (-12A + n^2)$. Приравниваем коэффициенты: $An^2 + Bn + D = n^2 + 8An - 12A$.

- При n^2: $A = 1$.
- При n: $B = 8A \implies B = 8$.
- Свободный: $D = -12A \implies D = -12$.

Частное: $a_n^{(ch)} = n^2 + 8n - 12$. *Ответ:* $a_n = (C_1 + C_2 n)2^n + n^2 + 8n - 12$.