Методы решения линейных рекуррентных соотношений

Теория и справочные материалы

Введение

Линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами (ЛРСПК) k-го порядка имеет вид:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n)$$

Его общее решение всегда строится по принципу

$$a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(ch)}$$

где:

- $a_n^{(o)}$ — общее решение **однородного** уравнения (где $f(n) = 0$);
- $a_n^{(ch)}$ — любое **частное** решение **неоднородного** уравнения.

1 Поиск однородного решения $a_n^{(o)}$ и комплексные корни

Для нахождения $a_n^{(o)}$ решается характеристическое уравнение:

$$r^k + c_1 r^{k-1} + \cdots + c_k = 0$$

Случай 1. Действительные разные корни

Если $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — действительные и различные числа, то:

$$a_n^{(o)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + \cdots + C_k r_k^n$$

где C_i — произвольные константы.

Случай 2. Действительные кратные корни

Если корень r имеет кратность m, то ему соответствует часть решения:

$$(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \cdots + C_m n^{m-1}) r^n$$

Случай 3. Комплексные корни (как превратить в вещественные)

Поскольку коэффициенты уравнения вещественные, комплексные корни всегда появляются **сопряженными парами**: $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Формально решение можно записать как $C_1(\alpha+i\beta)^n+C_2(\alpha-i\beta)^n$. Однако для работы с вещественными функциями (что обычно требуется) мы используем показательную форму комплексного числа:

$$r = \alpha \pm i\beta = \rho e^{\pm i\phi}$$

где:

- $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ — модуль (расстояние от начала координат);
- ϕ — аргумент (угол), определяемый из уравнений $\cos\phi = \frac{\alpha}{\rho}$, $\sin\phi = \frac{\beta}{\rho}$.

По формуле Муавра: $r^n = \rho^n e^{\pm in\phi} = \rho^n(\cos(n\phi) \pm i\sin(n\phi))$. После перегруппировки констант (чтобы убрать мнимую единицу i), пара комплексных корней даёт следующую **вещественную** часть решения:

$$a_n^{(complex)} = \rho^n\big(C_1\cos(n\phi) + C_2\sin(n\phi)\big)$$

2 Поиск частного решения $a_n^{(ch)}$ (Метод неопределенных коэффициентов)

Если правая часть $f(n)$ имеет специальный вид, частное решение ищется подбором. **Ключевое понятие — резонанс.** Обозначим через s кратность корня характеристического уравнения, совпадающего с «базой» правой части (если такого корня нет, $s = 0$).

Ниже приведены основные случаи. Всюду $P_m(n)$ — известный многочлен степени m, а $Q_m(n)$ — многочлен той же степени с неизвестными коэффициентами.

Случай 1. Многочлен

Правая часть: $f(n) = P_m(n)$.
База: $q = 1$.

- **Если** 1 **не является корнем** (кратность $s = 0$):

$$a_n^{(ch)} = Q_m(n) = A_m n^m + \cdots + A_1 n + A_0$$

- **Если** 1 **является корнем кратности** s **(резонанс):**

$$a_n^{(ch)} = n^s Q_m(n)$$

Случай 2. Показательная функция

Правая часть: $f(n) = A \cdot q^n$.
База: q.

- **Если** q **не является корнем** ($s = 0$):

$$a_n^{(ch)} = B \cdot q^n$$

- **Если** q **является корнем кратности** s **(резонанс):**

$$a_n^{(ch)} = B \cdot n^s \cdot q^n$$

Случай 3. Многочлен * Показательная функция

Правая часть: $f(n) = P_m(n) \cdot q^n$.
База: q.

- **Если q не является корнем** $(s = 0)$:

$$a_n^{(ch)} = Q_m(n) \cdot q^n$$

- **Если q является корнем кратности s (резонанс):**

$$a_n^{(ch)} = n^s \cdot Q_m(n) \cdot q^n$$

Случай 4. Тригонометрия (Комплексные корни в правой части)

Правая часть: $f(n) = A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n)$.
База: $q = e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$.

- **Если $e^{i\omega}$ не является корнем** $(s = 0)$:

$$a_n^{(ch)} = C\cos(\omega n) + D\sin(\omega n)$$

- **Если $e^{i\omega}$ является корнем кратности s (резонанс):**

$$a_n^{(ch)} = n^s\big(C\cos(\omega n) + D\sin(\omega n)\big)$$

Случай 5. Сумма функций

По принципу суперпозиции: если $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$, то частное решение ищется как сумма частных решений:

$$a_n^{(ch)} = a_n^{(ch1)} + a_n^{(ch2)}$$

Таблица

Правая часть $f(n)$	**Условие на базу q**	**Вид частного решения $a_n^{(ch)}$**
$P_m(n)$	1 — не корень	$Q_m(n)$
$P_m(n)$	1 — корень (кратн. s)	$n^s Q_m(n)$
$A \cdot q^n$	q — не корень	$B \cdot q^n$
$A \cdot q^n$	q — корень (кратн. s)	$B \cdot n^s q^n$
$P_m(n) \cdot q^n$	q — не корень	$Q_m(n) \cdot q^n$
$P_m(n) \cdot q^n$	q — корень (кратн. s)	$n^s Q_m(n) \cdot q^n$
$A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n)$	$e^{i\omega}$ — не корень	$C\cos(\omega n) + D\sin(\omega n)$
$A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n)$	$e^{i\omega}$ — корень (кратн. s)	$n^s(C\cos(\omega n) + D\sin(\omega n))$

Важное замечание: Если правая часть $f(n)$ не имеет описанного выше вида (например, содержит $\ln n$, $1/n$, n^n, $\tan n$), метод неопределенных коэффициентов **не применяется**. В таких случаях используют метод вариации постоянных или производящие функции.