

# Программа к экзамену по дифференциальной геометрии и топологии

Лектор Овсянников А.Я. 2023/24 уч.год

1. Векторные функции скалярного аргумента. Дифференцирование билинейных отображений.
2. Регулярные кривые. Длина кривой. Замена параметра. Эквивалентность и положительная эквивалентность кривых. Инвариантность длины кривой относительно замены параметра.
3. Регулярные кривые. Длина кривой. Замена параметра. Эквивалентность и положительная эквивалентность кривых. Инвариантность свойства регулярности относительно замены параметра.
4. Кривые единичной скорости. Положительная эквивалентность регулярной кривой некоторой кривой единичной скорости.
5. Кривые на плоскости. Порядок касания. Центр и радиус кривизны. Огибающая.
6. Репер Френе плоской кривой единичной скорости. Теорема Френе-Серре.
7. Репер Френе и кривизна регулярной плоской кривой.
8. Характеризация прямой и окружности.
9. Натуральные уравнения плоской кривой единичной скорости. Восстановление плоской кривой по ее кривизне и начальным условиям.
10. Эволюта и эвольвента плоской кривой.
11. Типы точек плоской кривой.
12. Кривые общего вида. Инвариантность общего вида относительно замены параметра и изометрии.
13. Репер Френе кривой общего вида. Построение репера Френе кривой общего вида.
14. Теорема Френе-Жордана (уравнения Френе).
15. Построение и вычисление векторов репера Френе кривой общего положения в трехмерном пространстве.
16. Вычисление кривизны и кручения кривой в трехмерном пространстве.
17. Поведение бирегулярной кривой в трехмерном пространстве в окрестности особой точки.
18. Теорема об инвариантности кривизн относительно замены параметра.
19. Теорема об изометричности кривых с одинаковыми кривизнами и абсолютными скоростями.
21. Основная теорема локальной теории кривых. Нахождение кривой  $\alpha(s)$ .
22. Основная теорема локальной теории кривых. Проверка того, что  $(E_1(s), \dots, E_n(s))$  — базис Френе кривой  $\alpha(s)$ .
23. Теорема о последней кривизне.
24. Дифференциал гладкого отображения. Лемма о том, что дифференциал переводит касательный вектор в касательный вектор.
25. Определение  $n$ -мерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$ . Координатная сеть вдоль поверхности. Касательное пространство  $T_p f$ , его стандартный базис.
26. Теорема об устройстве касательного пространства к поверхности.

27. Первая фундаментальная форма. Длина кривой вдоль поверхности.
  28. Первая фундаментальная форма. Угол между кривыми вдоль поверхности.
  29. Первая фундаментальная форма. Объем поверхности. Объем тора-"бублика".
  30. Тор-"бублик" и тор в  $\mathbb{R}^4$ . Сравнение объемов.
  31. Замена параметров на поверхности.
  32. Изометричность поверхностей. Совпадение внутренних геометрий на изометричных поверхностях.
  33. Доказать изометричность катеноида и прямого геликоида.
  34. Доказать, что если на диффеоморфных поверхностях длины соответственных кривых совпадают, то эти поверхности изометричны.
  35. Гауссово нормальное поле. Определение и смысл основного оператора гиперповерхности. Вторая фундаментальная форма.
  36. Поверхность вращения в  $\mathbb{R}^3$ . Координатная сеть, первая и вторая фундаментальные формы поверхности вращения.
  37. Симметричность второй фундаментальной формы и самосопряженность основного оператора гиперповерхности.
  38. Матрица основного оператора гиперповерхности в стандартном базисе касательного пространства  $T_p f$ . Полная (гауссова) кривизна, средняя кривизна, главные нормальные кривизны, главные направления.
  39. Вычисление полной и средней кривизн двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Вычисление главных нормальных кривизн.
  40. Локальное строение гиперповерхности.
  41. Типы точек на двумерной гиперповерхности.
  42. Теорема Менье. Нормальная кривизна гиперповерхности, ее свойства.
  43. Теорема Эйлера. Формула Эйлера для двумерной гиперповерхности.
- Асимптотические направления и линии.