МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Ю. В. Нагребецкая, О. Е. Перминова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практикум

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся по программе бакалавриата
по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика»,
01.03.03 «Математика и математическое моделирование»,
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2017

УДК 514.7(07)
Н168

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра физико-математических дисциплин
Российского государственного
профессионально-педагогического университета
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук,
доцент С. В. Анахов);

Л. Д. Сон, доктор физико-математических наук, профессор
(Уральский государственный педагогический университет)

Н а у ч н ы й р е д а к т о р:
доктор физико-математических наук, профессор М. В. Волков

Нагребецкая, Ю. В.

Н168 Дифференциальная геометрия : практикум / Ю. В. Нагребецкая, О. Е. Перминова ; [науч. ред. М. В. Волков] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 72 с.

ISBN 978-5-7996-2062-2

В практикум включены краткие теоретические сведения по основам дифференциальной геометрии, задания для самостоятельного выполнения и примеры решения типовых задач.

Для студентов и преподавателей математических специальностей и направлений.

УДК 514.7(07)

ISBN 978-5-7996-2062-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ

Практикум «Дифференциальная геометрия» предназначен для освоения дисциплины «Основы дифференциальной геометрии и топологии» студентами Института естественных наук и математики Уральского федерального университета, обучающимися по направлениям «Математика», «Механика и математическое моделирование», «Математика и компьютерные науки». В рамках указанных направлений дисциплина «Основы дифференциальной геометрии и топологии» систематически излагается в обязательном лекционном курсе. Овладение лекционным материалом требует от студента знаний и умений, приобретенных в ходе предшествующего изучения дисциплин «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра», «Математический анализ» и «Дифференциальные уравнения». Кроме лекций рабочая программа курса предполагает проведение практических занятий, в том числе выполнение аудиторных и домашних контрольных работ. Соответственно возникает необходимость в учебно-методическом пособии, в котором, во-первых, содержались бы краткие положения теории, во-вторых, были бы приведены решения типовых задач, а в-третьих, имелся бы набор заданий по основным темам курса. Все эти задачи и решает данный практикум.

Состоит практикум из 6 глав, охватывающих основные разделы курса: аффинные евклидовы пространства, гладкие линии на плоскости, кривые на плоскости, кривые в пространстве, внутренняя геометрия поверхностей, внешняя геометрия гиперповерхностей. При этом теория кривых и поверхностей излагается в пространствах произвольной размерности.

В начале каждой главы приводятся необходимые теоретические сведения: определения основных математических понятий, утверждения и теоремы (без доказательства), а также формулы, применяющиеся при решении помещенных далее задач. Для более детального ознакомления с теоретическим материалом рекомендуем обратиться к учебному пособию С. В. Сизого «Лекции по дифференциальной геометрии» [3]. Все используемые в практикуме обозначения соответствуют обозначениям, принятым в «Лекциях...».

За теоретическими сведениями следует типовая задача с подробным ее решением, для наглядности сопровождающимся иллюстрациями, а за ней – 25 вариантов заданий, причем сложные задания снабжены указаниями к их решению. Задания нумеруются в пределах главы. На задания, требующие численного ответа или ответа в виде уравнения или формулы, в конце глав приводятся ответы. При подборе заданий авторы частично использовали хорошо себя зарекомендовавший сборник задач [2]. Кроме задач из этого сборника и авторских задач в комплект индивидуальных заданий входят задачи из работ [1] и [3].

Поскольку рабочей программой курса «Основы дифференциальной геометрии и топологии» предусмотрены три домашние контрольные работы, данный практикум может быть использован преподавателями для их составления. Каждая контрольная рассчитана на 25 индивидуальных вариантов, по две задачи в каждом. Формировать домашние контрольные работы рекомендуется следующим образом:

– контрольная работа № 1 составляется из задач главы 1 и главы 2;

– контрольная работа № 2 – из задач главы 3 и главы 4;

– контрольная работа № 3 – из задач главы 5 и главы 6.

При этом порядковый номер задачи из каждой главы должен соответствовать порядковому номеру фамилии студента в «Журнале студентов».

Домашние контрольные работы целесообразно предлагать студентам после прохождения ими на лекциях и на практических занятиях тем курса, соответствующих теме контрольной работы. За каждую контрольную работу студент получает баллы по балльно-рейтинговой системе УрФУ согласно технологической карте курса.

Перед тем как приступить к домашней контрольной работе, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с решением типовых задач, данных в практикуме по указанным в работе темам.

При выполнении домашней контрольной работы студенту необходимо руководствоваться изложенными ниже требованиями.

1. Контрольную работу следует выполнять на отдельных листах, листы должны быть скреплены. В начале первого листа обязательно указываются фамилия и инициалы студента, номер группы, номер варианта и номер контрольной работы.

2. Перед решением задачи желательно привести ее условие.

3. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним, для наглядности – иллюстрациями.

4. Если задача требует численного ответа или ответа в виде формулы, в конце задачи записывается ответ. Ответ должен быть сверен с ответом к соответствующему заданию в практикуме.

Задачи, помещенные в практикуме, дополняют и расширяют перечень задач учебного пособия [3], используемого в качестве задачника на практических занятиях по дифференциальной геометрии для студентов Института естественных наук и математики. Кроме того, эти задачи могут выдаваться студентам на практических занятиях в качестве домашних заданий с целью получения дополнительных баллов по балльно-рейтинговой системе УрФУ, а также включаться в комплект аудиторных контрольных работ. Теоретический материал может быть также использован при составлении заданий для мини-контролей на лекциях.

* * *

Мы выражаем искреннюю признательность нашему коллеге Сергею Викторовичу Сизому, профессору кафедры алгебры и фундаментальной информатики, за блестящие лекции и практические занятия по дифференциальной геометрии, которые сделали наше знакомство с этой непростой дисциплиной ярким и увлекательным. Сергей Викторович также оказал ценную поддержку и помощь во всех вопросах, возникавших у нас по методике преподавания дифференциальной геометрии.

Благодарим научного редактора М. В. Волкова, рецензентов С. В. Анахова и Л. Д. Сона, чьи предложения и советы несомненно улучшили разработанное нами пособие.

Отдельное спасибо редактору Е. И. Маркиной за полезные замечания и доработку рукописи в ходе ее подготовки к печати.

Надеемся, что данный практикум будет способствовать более глубокому изучению студентами дисциплины «Основы дифференциальной геометрии и топологии», поскольку именно самостоятельное решение задач и получение практических навыков ведут к пониманию и скорейшему усвоению трудного теоретического материала.

1. АФФИННЫЕ ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\left(V, \vec{V}, +\right)$ – конечномерное евклидово аффинное пространство, где V – множество «точек», $\vec{V}$ – множество векторов, «+» – операция откладывания вектора от точки. Отображение $\mathrm{A} : V \to V$ называется аффинным оператором, если существует такой линейный оператор $\vec{\mathrm{A}} : \vec{V} \to \vec{V}$, что для любой точки $p \in V$ и вектора $\vec{x} \in \vec{V}$ выполняется равенство

$$\mathrm{A}(p + \vec{x}) = \mathrm{A}\left(p\right) + \vec{\mathrm{A}}\left(\vec{x}\right).$$

Обычно считают, что оператор $\vec{\mathrm{A}}$ обратим. Пусть $\left(O, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\right)$ – некоторый репер аффинного пространства $\left(V, \vec{V}, +\right)$. Обозначим через $\left[\vec{x}\right]$ столбец координат вектора $\vec{x} \in \vec{V}$ в базисе $b = \left(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\right)$, через $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]$ – матрицу оператора $\vec{\mathrm{A}}$ в этом базисе и через $[p]$ – координаты точки p в репере $\left(O, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\right)$, т. е. координаты вектора $\overrightarrow{Op} = p - O$ в базисе b. Тогда для любой точки $q \in V$ выполняется равенство $\left[\mathrm{A}\left(q\right)\right] = \left[q_0\right] + \left[\vec{\mathrm{A}}\right]\left[q\right]$, где $q_0 = \mathrm{A}\,(O)$.

Утверждение. Любой аффинный оператор плоскости переводит прямую в прямую, касательную в касательную, сохраняет параллельность прямых и отношение отрезков.

Теорема об изометрии. Отображение А конечномерного евклидова аффинного пространства в себя является изометрией тогда и только тогда, когда отображение А является аффинным оператором и соответствующий линейный оператор $\vec{\mathrm{A}}$ является ортогональным.

Задача 1. Пусть точки P_1, P_2, P_3 лежат по одной на каждой стороне (или на продолжении сторон) некоторого треугольника, а точки P_1', P_2', P_3' получены отражением точек P_1, P_2, P_3 относительно середин сторон этого треугольника. Тогда точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точки P_1', P_2', P_3' лежат на одной прямой.

Решение. Докажем сначала, что существует аффинный оператор плоскости, переводящий произвольный треугольник OAB в прямоугольный равнобедренный треугольник $OA'B'$ с единичными катетами. Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – стандартный репер. Обозначим через $\vec{c}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{c}_2 = \overrightarrow{OB}$, и пусть $A' = O + \vec{e}_1$, $B' = O + \vec{e}_2$ (рис. 1).

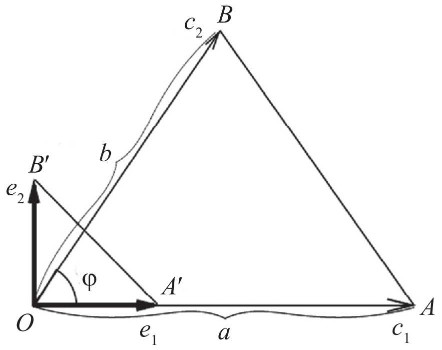

Рис. 1

Рассмотрим линейный оператор $\vec{\mathrm{A}}$ векторов плоскости, переводящий базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в базис $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$. Если $\left|\overrightarrow{OA}\right| = a$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = b$, $\angle AOB = \varphi$, то матрица оператора $\vec{\mathrm{A}}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ равна $\left[\vec{A}\right] = \begin{pmatrix} a & b\cos\varphi \\ 0 & b\sin\varphi \end{pmatrix}$. Очевидно, $\vec{\mathrm{A}}$ – обратимый оператор. Линейный оператор $\vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{A}}^{-1}$ переводит базис $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ в базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Рассмотрим аффинный оператор $\mathrm{B}(x) = O + \vec{\mathrm{B}}(\vec{x})$, где $\vec{x} = \overrightarrow{Ox}$. Очевидно, $\mathrm{B}(O) = O$, $\mathrm{B}(A) = \mathrm{B}(O + \vec{c}_1) = \mathrm{B}(O) + \mathrm{B}(\vec{c}_1) = O + \vec{e}_1 = A'$, аналогично $\mathrm{B}(B) = B'$. Таким образом, аффинный оператор В переводит треугольник OAB в треугольник $OA'B'$. Обратный аффинный оператор А переводит треугольник $OA'B'$ в треугольник OAB.

Поскольку аффинный оператор сохраняет параллельность прямых и отношение отрезков и переводит прямую в прямую, теперь исходную задачу достаточно решить для треугольника $OA'B'$.

Введем прямоугольную систему координат xOy, как показано на рис. 2. Пусть $P_1\left(0, \frac{1}{2}-\alpha\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2}-\beta, \frac{1}{2}+\beta\right)$, $P_3\left(\frac{1}{2}-\gamma, 0\right)$, где α, β, γ – произвольные числа. Тогда $P_1'\left(0, \frac{1}{2}+\alpha\right)$, $P_2'\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta\right)$, $P_3'\left(\frac{1}{2}+\gamma, 0\right)$. Далее $\overrightarrow{P_1P_2}=\left(\frac{1}{2}-\beta, \alpha+\beta\right)$, $\overrightarrow{P_1P_3}=\left(\frac{1}{2}-\gamma, \alpha-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{P_1'P_2'}=$ $=\left(\frac{1}{2}+\beta, -\alpha-\beta\right)$, $\overrightarrow{P_1'P_3'}=\left(\frac{1}{2}+\gamma, -\alpha-\frac{1}{2}\right)$.

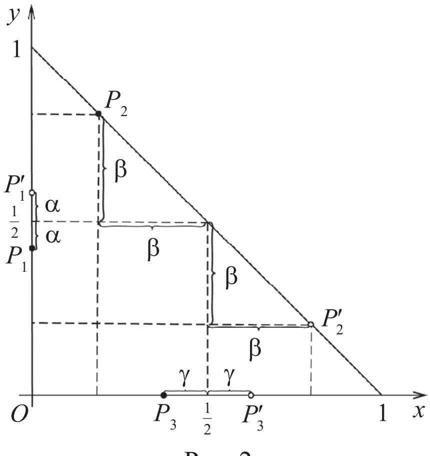

Рис. 2

Точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_3}$ коллинеарны, т. е. $\frac{1/2-\gamma}{1/2-\beta}=\frac{\alpha-1/2}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta=\frac{1}{4}$.

Аналогично точки P_1', P_2', P_3' лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ и $\overrightarrow{P_1'P_3'}$ коллинеарны, т. е. $\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta=\frac{1}{4}$. Таким образом, точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точки P_1', P_2', P_3' лежат на одной прямой.

Задания

1. Вписанный эллипс касается параллельных сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ в точках P и Q. Докажите, что $|PB|=|QC|$, если эллипс касается стороны BC в ее середине.

Указание. Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

2. Пусть ABC – треугольник, BD – медиана треугольника ABC, а X, Y и Z – три точки на отрезке BC такие, что $|BX|=|XY|=$ $=|YZ|=|ZC|$. Пусть прямая AX пересекает BD в точке P. С помощью аффинной геометрии докажите, что $|AP|/|AX|=4/5$.

Указание. Введите аффинный оператор, который переводит треугольник ABC в равнобедренный прямоугольный треугольник $A'B'C'$ ($\angle A'$ – прямой), и решите задачу для треугольника $A'B'C'$.

3. Эллипс вписан в четырехугольник так, что касается всех четырех его сторон в серединах. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом.

Указание. Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

4. Аффинный оператор $\mathrm{A}(x)=p_0+\vec{\mathrm{A}}(\vec{x})$, $p_0=\mathrm{A}(O)$, $x=O+\vec{x}$ пространства $\mathbb{R}^3$ переводит точки $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(1, 1, 1)$, $D(0, 1, -1)$ в точки $A'(1, 2, 3)$, $B'(-1, -2, 1)$, $C'(0, 1, 0)$, $D'(-1, 0, 0)$ соответственно. Найдите координаты точки p_0 и матрицу $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]$ оператора $\vec{\mathrm{A}}$ в стандартном базисе.

5. В аффинном пространстве даны четыре различные точки A, B, C, D. Точки K, L, M, N делят отрезки AB, BC, CD, DA в одина-

ковом отношении λ $(0 < \lambda < 1)$, при этом не являясь серединами этих отрезков. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм тогда и только тогда, когда $KLMN$ – параллелограмм.

Указание. Используйте то, что четыре различные точки тогда и только тогда образуют параллелограмм, когда их радиус-векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ удовлетворяют условию $\vec{x}_1 + \vec{x}_3 = \vec{x}_2 + \vec{x}_4$.

6. Докажите, что ортогональные проекции вершин n-мерного куба на любую большую диагональ этого куба делят ее на n равных частей.

Указание. Рассмотрите проекции радиус-векторов вершин на вектор – большую диагональ, выходящий из начала координат.

7. Докажите, что существует такое аффинное преобразование $\mathrm{A}(x) = p_0 + \vec{\mathrm{A}}(\vec{x})$, $p_0 = O + \vec{x}$, которое переводит произвольный параллелограмм в произвольный прямоугольник, и найдите его матрицу $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]$ и координаты точки p_0.

Указание. Докажите, что с помощью некоторого аффинного оператора данный параллелограмм можно перевести в квадрат с единичными сторонами; затем докажите, что с помощью другого аффинного оператора этот квадрат можно перевести в произвольный прямоугольник.

8. Докажите, что существует такой аффинный оператор $\mathrm{A}(x) = p_0 + \vec{\mathrm{A}}(\vec{x})$, $p_0 = \mathrm{A}(O)$, $x = O + \vec{x}$, который переводит данную трапецию в равнобедренную трапецию с таким же отношением оснований; найдите его матрицу $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]$ и координаты точки p_0.

Указание. Докажите, что данную трапецию можно перевести при помощи некоторого аффинного оператора в некоторую равнобедренную с единичной высотой и большим основанием, равным 2, а затем докажите, что полученную трапецию можно перевести в равнобедренную трапецию при помощи другого аффинного оператора.

9. Найдите параметрические уравнения аффинного подпространства пространства $\mathbb{R}^4$, заданного общими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Указание. Представьте аффинное пространство в виде $W = \{ p + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 \mid t_1,\ t_2 \in \mathbb{R} \}$, где p – частное решение данной неоднородной системы линейных уравнений, а $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы линейных уравнений.

10. Аффинный оператор $\mathrm{A}(x) = p_0 + \vec{\mathrm{A}}(\vec{x})$, $p_0 = \mathrm{A}(O)$, $x = O + \vec{x}$ пространства $\mathbb{R}^2$ переводит точки $A(-1,\ 1)$, $B(1,\ 2)$, $C(2,\ 3)$ в точки $A'(0,\ 1)$, $B'(1,\ 3)$, $C'(2,\ 2)$. Найдите координаты точки p_0 и матрицу $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]$ оператора A в стандартном базисе.

11. Пусть точка O является центром эллипса и X, Y – некоторые точки на эллипсе. Предположим, что касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P. Пусть Q – точка пересечения отрезков XY и OP, а R – точка пересечения отрезка OP с эллипсом. Докажите, что $\dfrac{|OQ|}{|OR|} = \dfrac{|OR|}{|OP|}$.

Указание. Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

12. Пусть ABC – треугольник и точка D лежит на стороне BC. Пусть точки X и Y – центры тяжести треугольников ABD и ACD. С помощью аффинной геометрии докажите, что прямая XY параллельна прямой BC.

Указание. Введите аффинный оператор, который переводит данный треугольник в равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами, и решите задачу для последнего.

13. Докажите, что если трапеция вписана в эллипс, то линия, соединяющая середины параллельных сторон трапеции, проходит через центр эллипса.

Указание. Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

14. Эллипс вписан в четырехугольник $ABCD$. Предполагая, что эллипс касается сторон BC и DA в их серединах, а стороны AB и CD параллельны, докажите, что четырехугольник является параллелограммом.

Указание. Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

15. Изометрия $\mathrm{A}(x) = p_0 + \vec{\mathrm{A}}(\vec{x})$, $p_0 = \mathrm{A}(O)$, $x = O + \vec{x}$ плоскости, сохраняющая ориентацию, переводит точку $C(0,\ 0)$ в точку $C'(0,\ 1)$, а точку $D(1,\ 0)$ – в точку $D'\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}+1\right)$. Найдите координаты точки p_0, матрицу $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]$ оператора $\vec{\mathrm{A}}$ и образ точки $Q(1,\ 1)$ при этом отображении.

Указание. Используйте то, что $\vec{\mathrm{A}}$ – оператор поворота плоскости.

16. Найдите общее уравнение плоскости в $\mathbb{R}^5$, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + t_2, \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x_3 = -3 + t_1 + 2t_2, \\ x_4 = 3 + 3t_1 + t_2, \\ x_5 = 1 + t_1 + 3t_2, \end{cases}$$

т. е. найдите систему неоднородных линейных уравнений с переменными x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, множеством решений которой является данная плоскость.

Указание. Запишите параметрические уравнения плоскости в векторном виде: $p = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2$ и докажите, что любая строка $\vec{x}$ основной матрицы искомой системы удовлетворяет однородной системе линейных уравнений $\left\langle \vec{a}_1, \vec{x} \right\rangle = 0, \left\langle \vec{a}_2, \vec{x} \right\rangle = 0.$

17. Укажите все случаи взаимного расположения трех различных плоскостей пространства $\mathbb{R}^3$, заданных общими уравнениями

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3.$$

Для каждого случая дайте необходимое и достаточное условие при помощи понятия ранга матрицы.

Указание. Рассмотрите различные значения, которые могут принимать ранги основной и расширенной матриц системы.

18. Докажите, что аффинный оператор $\mathrm{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{A}(x) = p_0 + \vec{\mathrm{A}}(\vec{x})$, где $p_0 = \mathrm{A}(O)$, $x = O + \vec{x}$, переводит гиперплоскость $\mathbb{R}^n$ аффинного пространства в некоторую гиперплоскость этого же пространства. Напишите уравнение полученной гиперплоскости, если уравнение исходной гиперплоскости имеет вид

$$q = q_0 + t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_{n-1}\vec{a}_{n-1},$$

где $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1} \in \vec{\mathbb{R}}^n$.

19. Найдите площадь треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^4$ для точек $A(-1, 1, 0, 1)$, $B(1, 2, -1, 0)$, $C(1, -1, 1, 1)$, если координаты указаны в репере $(0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$, а матрица Грама базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ равна $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

20. Найдите угол между большой диагональю n-мерного куба со стороной a и его произвольным ребром и предел этого угла при $n \to \infty$.

Указание. Найдите угол между вектором – большой диагональю и вектором – ребром.

21. Укажите все случаи взаимного расположения трех прямых на плоскости, заданных общими уравнениями

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y &= b_1,\\
a_{21}x + a_{22}y &= b_2,\\
a_{31}x + a_{32}y &= b_3.
\end{aligned}
$$

Для каждого случая дайте необходимое и достаточное условие при помощи понятия ранга матрицы.

Указание. Рассмотрите различные значения рангов матриц $A = (a_{ij})$ и $(A \mid b)$, где $b = (b_i)$, а также, если это необходимо, рангов некоторых матриц с коэффициентами (a_{ij}), (b_i).

22. Найдите угол между вектором $\vec{x} = (2, 1, 3, 1)$ и подпространством, порожденным векторами $\vec{a} = (1, 1, 0, 0)$ и $\vec{b} = (0, -1, 0, 1)$.

Указание. Найдите векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – ортогональные проекции вектора $\vec{x}$ на подпространства $\overrightarrow{W} = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ и $\overrightarrow{W}^{\perp}$ соответственно. Затем найдите угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{x}_1$.

23. Найдите ортонормированный базис, порождающий тот же орфлаг, что и базис (a_1, a_2), подпространства $\overrightarrow{W}$ пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}}^3$, если матрица Грама базиса, в котором даны координаты $\vec{a}_1 = {}^t(1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = {}^t(0, 1, 1)$, такова:

$$
G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
$$

24. Пусть ABC – треугольник, BD – медиана треугольника ABC, X и Y – две точки на отрезке BC такие, что $|BX| = |XY| = |YC|$. Пусть отрезок AX пересекает медиану BD в точке Z. Используя аффинную геометрию, докажите, что точка Z является серединой отрезка BD.

Указание. Введите аффинный оператор, который переводит данный треугольник в равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами, и решите задачу для последнего.

25. Опишите взаимное расположение двух гиперплоскостей, заданных уравнениями

$$
a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a = 0, \; b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n + b = 0,
$$

в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Указание. Проведите рассуждения, аналогичные описанию взаимного расположения двух плоскостей в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ответы

№ 4. $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1 & -1/4 \end{pmatrix}$, $p_0=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 15/4 \end{pmatrix}$.

№ 9. $W=\left\{ {}^t(-1,2,0,0)+t_1\cdot {}^t(3,-1,1,0)+t_2\cdot {}^t(-4,1,0,1) \;\middle|\; t_1,t_2\in\mathbb{R} \right\}$.

№ 10. $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $p_0=\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

№ 15. $\left[\vec{\mathrm{A}}\right]=\begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{10}} & -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} & \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$, $p_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}(Q)=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$.

№ 16. $\begin{cases} -3x_1+x_2+x_3=-8, \\ x_1-2x_2+x_4=3, \\ -5x_1+2x_2+x_5=-7. \end{cases}$

№ 19. $\dfrac{1}{2}\sqrt{94}$.

№ 20. Угол $\varphi_n=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\dfrac{\pi}{2}$.

№ 22. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

№ 23. $c_1={}^t\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $c_2={}^t\left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.

2. ГЛАДКИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть гладкая линия l_1 на плоскости дана как образ плоской гладкой регулярной кривой $\alpha(t)$. Тогда вектор $\dot{\alpha}(t_0)$ направляет касательную к l_1 в точке $\alpha(t_0)$.

Длиной кривой $\alpha(t)$ от точки $\alpha(t_1)$ до точки $\alpha(t_2)$ называется число $l[\alpha]\Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\,\dot{\alpha}(t)\,|\, dt.$

Пусть гладкая линия l_2 на плоскости задана как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где F – гладкая функция и $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ F\,\big|_{l_2} \neq \vec{0}$. Тогда вектор $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F$ перпендикулярен касательной к линии l_2 в любой точке этой линии.

Две произвольные плоские гладкие линии *касаются* друг друга, если в общей точке они имеют общую касательную. Пусть $f(t) = F(\alpha(t))$. Если $f(t_0) = f'(t_0) = \ldots = f^{(k)}(t_0) = 0$, а $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$, то говорят, что линии l_1 и l_2 имеют в точке $p_0 = \alpha(t_0)$ касание k-го порядка.

Пусть C^t, $t \in I$ – семейство плоских гладких линий, заданных уравнением $F(x, y, t) = 0$, и для любого $t \in I$ вектор $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ F\,\big|_{C^t} \neq \vec{0}$. Линия C называется огибающей семейства линий C^t, если:

(1) C является образом некоторой гладкой регулярной кривой α: $I \to \mathbb{R}^2$,

(2) C касается C^t в точке $\alpha(t)$ для любого $t \in I$.

Необходимое условие огибающей. Для любой точки $c = (x, y) = \alpha(t)$ огибающей C выполняются равенства

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0, \\ F_t'(x, y, t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Множество точек, удовлетворяющих системе (1), называется *дискриминантой*. В общем случае дискриминанта кроме точек огибающей содержит точки самопересечения, особые точки кривых семейства и т. д.

Задача 2. Прямая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг точки, равномерно движущейся по второй прямой. Найдите огибающую этого семейства прямых.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпадала со второй прямой, а ось Oy – с первоначальным положением первой прямой l.

Пусть прямая l вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω и равномерно движется вдоль оси Ox со скоростью v. Тогда точка A пересечения прямой l с осью Ox в момент времени t имеет координаты $(vt, 0)$, а прямая l наклонена к оси Ox под углом $\varphi(t) = \pi/2 - \omega t$ (рис. 3). Следовательно, уравнение прямой l в момент времени t имеет вид $y = \operatorname{tg} \varphi(t)(x - vt)$ или

$$y - \operatorname{ctg} \omega t \cdot (x - vt) = 0. \qquad (2)$$

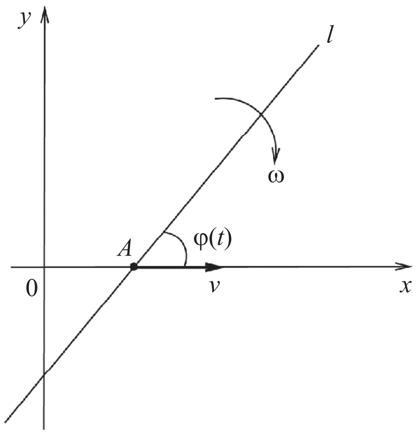

Рис. 3

Уравнение (2) при $\omega t \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ описывает в неявном виде исходное семейство прямых. Продифференцируем его по t, получим

$\frac{\omega}{\sin^2 \omega t}(x - vt) + v \operatorname{ctg} \omega t = 0$ и умножим на $\sin^2 \omega t$. Таким образом, выполняется равенство

$$\omega(x - vt) + v \sin \omega t \cdot \cos \omega t = 0. \qquad (3)$$

Уравнения (2), (3) задают дискриминанту. Заметим, что $\overrightarrow{\text{grad}}\, F = (-\operatorname{ctg} \omega t, 1) \neq \vec{0}$ для любого t. Исключим параметр t из системы уравнений (2), (3). Для этого выразим $x - vt = -\frac{v}{\omega} \sin \omega t \cdot \cos \omega t$ из уравнения (3) и подставим в уравнение (2): $y + \frac{v}{\omega} \cos^2 \omega t = 0$.

Итак, дискриминанта задается системой

$$\begin{cases} x = vt - \dfrac{v}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t, \\ y = -\dfrac{v}{\omega} \cos^2 \omega t \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{2\omega}(2\omega t - \sin 2\omega t), \\ y = -\dfrac{v}{2\omega}(1 + \cos 2\omega t). \end{cases} \qquad (4)$$

Обозначим через $a = \frac{v}{2\omega}$, $\tau = 2\omega t$. Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} x = a(\tau - \sin \tau), \\ y = -a(1 + \cos \tau), \end{cases}$$

где $\tau \neq 2\pi n$.

Последняя система задает, очевидно, циклоиду $\alpha(\tau) = = {}^t(a(\tau - \sin \tau), a(1 - \cos \tau) - 2a)$, опущенную на $2a$ вдоль оси Oy (рис. 4).

Из рис. 4 видно, что кривая $\alpha(\tau)$ является огибающей для исходного семейства прямых.

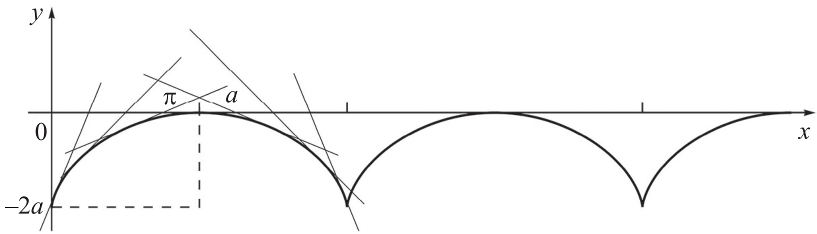

Рис. 4

Ответ. Огибающей является циклоида

$$\alpha(\tau) = {}^t(a(\tau - \sin\tau),\ a(1 - \cos\tau) - 2a).$$

Задания

1. Найдите огибающую семейства прямых, являющихся одной из сторон прямого угла, перемещающегося на плоскости так, что другая его сторона проходит через фиксированную точку F, а вершина прямого угла описывает прямую. Сделайте чертеж.

Указание. Введите прямоугольную систему координат так, чтобы прямая, по которой скользит вершина прямого угла, совпадала бы с осью Oy, а точка F лежала бы на оси Ox.

2. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы $y^2 = 2px$, перпендикулярных к ее оси. Сделайте чертеж.

3. Найдите огибающую семейства линий $t^2(x - a) - ty - a = 0$. Сделайте чертеж.

4. Дано семейство парабол параметра p, оси которых параллельны оси Ox, а вершины описывают параболу $y^2 = 2qx$. Найдите огибающую этого семейства. Сделайте чертеж.

5. Покажите, что площадь, ограниченная цепной линией $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$, прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ и осью абсцисс, пропорциональна длине соответствующей дуги с коэффициентом пропорциональности, равным a. Сделайте чертеж.

6. Найдите длину всей кривой, заданной уравнением $\rho = a\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$. Сделайте чертеж.

Указание. Найдите сначала период этой кривой.

7. Найдите касательные к астроиде $\alpha(t) = {}^t(a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, наиболее удаленные от начала координат. Сделайте чертеж.

8. Найдите огибающую семейства прямых, образующих с координатными осями треугольники постоянной площади. Сделайте чертеж.

9. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R, где $R = n\cdot r,\ n\in\mathbb{N},$ оставаясь вне ее. Известно, что полученная линия (эпициклоида) имеет параметризацию

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\frac{r}{R}t - r\cos\frac{R+r}{R}t, \\ y = (R+r)\sin\frac{r}{R}t - r\sin\frac{R+r}{R}t. \end{cases}$$

Найдите длину одной арки эпициклоиды ($t\in[0,\ 2\pi]$). Сделайте чертеж.

Указание. Используйте формулы синуса суммы (разности) или косинуса суммы (разности).

10. Составьте уравнения касательной и нормали к лемнискате Бернулли $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ в произвольной точке $p_0=(x_0,y_0)$. Сделайте чертеж.

11. Найдите огибающую семейства линий $3(y-t)^2-2(x-t)^3=0$. Сделайте чертеж.

12. Покажите, что ордината любой точки цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ есть среднее геометрическое ее параметра и радиуса кривизны в этой точке.

13. Составьте уравнение касательной и нормали к линии $(x^2+y^2)\,x-ay^2=0$ в точке $A\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$. Сделайте чертеж.

14. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных как на диаметрах на хордах эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$, параллельных его малой оси. Сделайте чертеж.

Указание. Примените параметризацию эллипса:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

15. Докажите, что только одна нормаль линии $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ проходит через начало координат.

16. Найдите огибающую семейства линий $y^3 - (x - t)^2 = 0$. Сделайте чертеж.

17. Составьте уравнение касательной к спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$ в произвольной точке. Сделайте чертеж. Докажите, что угол между касательной и радиус-вектором, проведенным из полюса в точку касания, стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $\varphi \to \infty$.

Указание. Примените параметризацию

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi$$

в полярных координатах.

18. Докажите, что линия $y = e^{kx}\sin(mx)$ касается каждой из линий $y = e^{kx}$ и $y = e^{-kx}$ в точках пересечения с ними. Сделайте чертеж.

19. Покажите, что тангенс угла, образованного касательной к кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и радиус-вектором, проведенным в точку касания, задается формулой $\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\dot\rho}$.

Указание. Примените параметризацию

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi$$

в полярных координатах.

20. Пусть даны кривые в полярных координатах

$$\rho = \rho_1(\varphi),\ \rho = \rho_2(\varphi).$$

Покажите, что они пересекаются под прямым углом тогда и только тогда, когда $\rho_1\rho_2 + \dot\rho_1\dot\rho_2 = 0$.

Указание. Примените параметризации

$$\alpha_i(\varphi) = (\rho_i(\varphi)\cos\varphi,\ \rho_i(\varphi)\sin\varphi),\ i \in \{1, 2\}.$$

21. Найдите параметрические уравнения огибающей семейства прямых, на которых лежит отрезок постоянной длины a, если его концы скользят по осям прямоугольной системы координат. Сделайте чертеж.

Указание. В качестве параметра возьмите острый угол наклона прямых к оси Ox.

22. Докажите, что кардиоиды $\rho_1 = a(1 + \cos\varphi)$ и $\rho_2 = a(1 - \cos\varphi)$ пересекаются под прямым углом. Сделайте чертеж.

Указание. Примените параметризации

$$\alpha_i(\varphi) = (\rho_i(\varphi)\cos\varphi,\ \rho_i(\varphi)\sin\varphi),\ i \in \{1, 2\}.$$

23. Найдите огибающую семейства линий $x\cos t + y\sin t - p = 0$ при $p = \text{const}$. Сделайте чертеж.

24. Составьте уравнения парабол, оси которых параллельны координатным осям, имеющих с линией $y = \ln x$ в точке $M(1, 0)$ наивысший порядок касания. Сделайте чертеж.

25. Найдите угол, составленный касательной в произвольной точке логарифмической спирали $\rho = ca^{\varphi}$ $(a > 0)$, с радиус-вектором точки касания. Докажите, что он постоянный. Сделайте чертеж.

Указание. Примените параметризацию

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ \ y = \rho(\varphi)\sin\varphi.$$

Ответы

№ 1. $y^2 = 4\,px.$

№ 2. $y^2 = 2p\,(x + p/2).$

№ 3. $y^2 = -4a\,(x - a).$

№ 4. $y^2 = 2\,(p + q)\,x.$

№ 6. $\dfrac{3}{2}\pi a.$

№ 7. $x \pm y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $x \pm y = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

№ 8. $y = \pm\frac{S}{2x}$.

№ 9. $8r \cdot \frac{n+1}{n}$.

№ 10. Уравнение касательной:

$$x_0(x^2{}_0 + y^2{}_0 - a^2)\,(x - x_0) + y_0(x^2{}_0 + y^2{}_0 + a^2)(y - y_0) = 0.$$

Уравнение нормали:

$$y_0(x_0^2 + y_0^2 + a^2)\,(x - x_0) - x_0(x_0^2 + y_0^2 - a^2)\,(y - y_0) = 0.$$

№ 11. Уравнения дискриминанты: $y = x$ и $y = x - \frac{2}{9}$. Прямая $y = x - \frac{2}{9}$ – огибающая, прямая $y = x$ состоит из особых точек семейства.

№ 13. Уравнение касательной: $4x - 2y - a = 0$.

Уравнение нормали: $2x + 4y - 3a = 0$.

№ 14. Эллипс $\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

№ 16. Уравнение дискриминанты, состоящей из особых точек семейства: $y = 0$.

№ 17. $(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\,x - (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\,y - a\varphi^2 = 0$.

№ 21. Астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

№ 23. $x^2 + y^2 = p^2$.

№ 24. $x = \frac{1}{2}y^2 + y + 1$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$; касание второго порядка.

№ 25. $\arccos\frac{|\ln a|}{\sqrt{\ln^2 a + 1}}$.

3. КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

Гладкая кривая $\alpha(t)\colon I \to \mathbb{R}^n$ называется к р и в о й е д и н и ч н о й с к о р о с т и, если $\left|\dot{\alpha}(t)\right| = 1$ для любого $t \in I$.

Теорема. Любая гладкая регулярная кривая эквивалентна кривой единичной скорости.

Пусть $\alpha(t)\colon\ I \to \mathbb{R}^n$ – гладкая регулярная кривая.

Длина $s = l[\alpha]\Big|_{t_0}^{t} = \int\limits_{t_0}^{t} \left|\dot{\alpha}(\tau)\right| d\tau$ кривой $\alpha(t)$ от точки $\alpha(t_0)$ до точки $\alpha(t)$ называется н а т у р а л ь н ы м п а р а м е т р о м.

Кривая $\beta(s) = \alpha(t(s))$, где $t = t(s)$ – функция, обратная к функции $s = s(t)$, называется *натуральной параметризацией кривой* $\alpha(t)$. Кривая $\beta(s)$ является кривой единичной скорости, эквивалентной исходной кривой $\alpha(t)$.

Базис Френе плоской гладкой кривой $\alpha(t)$ вычисляется следующим образом:

$$E_1(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\left|\dot{\alpha}(t)\right|};$$

вектор $E_2(t)$ получен поворотом вектора $E_1(t)$ на угол, равный $\dfrac{\pi}{2}$.

Кривизна кривой $\alpha(t)$ равна $k(t) = \dfrac{\det\left[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)\right]}{\left|\dot{\alpha}(t)\right|^3}$.

Для базиса Френе справедливы уравнения Френе:

$$\begin{cases} \dot{E}_1(t) = \left|\dot{\alpha}(t)\right| k(t) E_1(t), \\ \dot{E}_2(t) = -\left|\dot{\alpha}(t)\right| k(t) E_2(t). \end{cases}$$

Соприкасающейся окружностью к плоской бирегулярной кривой $\alpha(t)$ в точке $\alpha(t_0)$ называется окружность с центром в *центре кривизны* $\alpha(t_0)+\dfrac{1}{k(t_0)}E_2(t_0)$, радиус которой равен *радиусу кривизны* $R(t_0)=\dfrac{1}{|k(t_0)|}$ в точке $\alpha(t_0)$. Соприкасающаяся окружность имеет с кривой касание не менее второго порядка. В точках, где кривизна экстремальна, соприкасающаяся окружность имеет с кривой касание не ниже третьего порядка.

Эволютой гладкой бирегулярной кривой $\alpha(t)$ называется множество ее центров кривизны. Кривая $\beta(t)=\alpha(t)+\dfrac{1}{k(t)}E_2(t)$ задает уравнение эволюты кривой $\alpha(t)$.

Эволюта – это гладкая бирегулярная кривая. Она является огибающей нормалей к исходной кривой, а длина дуги эволюты равна модулю разности радиусов кривизны исходной кривой в соответствующих точках.

В точках, где кривизна кривой $\alpha(t)$ принимает экстремальное значение, эволюта $\beta(t)$ имеет особую точку – возврат первого рода.

Эвольвентой гладкой бирегулярной кривой $\beta(t)$ называется такая кривая $\alpha(t)$, что $\beta(t)$ – эволюта для $\alpha(t)$. Если $\beta(s)$ – бирегулярная кривая единичной скорости, то уравнение $\alpha_c(s)=\beta(s)+(c-s)E_1^{\beta}(s)$, где c – const, задает семейство всех ее эвольвент.

Пусть $k(s)$ – кривизна кривой единичной скорости $\beta(s)$. Тогда $k(s)=\dot{\theta}(s)$, где $\theta(s)$ – угол наклона касательной к $\beta(s)$ над осью Ox. Уравнения

$$\theta(s)=\int_{s_0}^{s}k(\sigma)\,d\sigma+\theta_0,$$

$$\beta(\mathrm{s})=\big(x(s),y(s)\big)=\left(\int_{s_0}^{s}\cos\theta\big(\sigma\big)d\sigma+x_0,\int_{s_0}^{s}\sin\theta\big(\sigma\big)d\sigma+y_0\right),$$

где $\theta_0=\theta(s_0)$, $x_0=x(s_0)$, $y_0=y(s_0)$, называются *натуральными уравнениями кривой* $\beta(s)$. Натуральным уравнением кривой называется также зависимость (явная или неявная) кривизны k от натурального параметра s.

Задача 3. Доказать, что эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная данной.

Решение. Кривая $\alpha(t) = {}^t(a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t))$ задает циклоиду. Рассмотрим первую арку циклоиды ($t \in (0,\ 2\pi)$). Кривая $\beta(t) = \alpha(t) + \dfrac{1}{k(t)} E_2(t)$ – эволюта для кривой $\alpha(t)$. Здесь $k(t) = \dfrac{\det\left[\dot\alpha(t),\ \ddot\alpha(t)\right]}{|\ \dot\alpha(t)\ |^3}$ – кривизна кривой $\alpha(t)$, а $(E_1(t),\ E_2(t))$ – базис Френе. Найдем $\dot\alpha(t),\ \ddot\alpha(t)$: $\dot\alpha(t) = {}^t(a\,(1 - \cos t),\ a\sin t), \ddot\alpha(t) = {}^t(a\sin t,\ a\cos t)$. Найдем также $|\,\dot\alpha(t)\,|$ с учетом того, что $t \in (0;\ 2\pi)$: $|\ \dot\alpha(t)\ | = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\left|\ \sin\dfrac{t}{2}\ \right| = 2a\sin\dfrac{t}{2}$. Тогда $\det\left[\dot\alpha(t), \ddot\alpha(t)\right] = a^2(\cos t - 1) = -2a^2\sin^2\dfrac{t}{2}$. Следовательно, $k(t) = -\dfrac{1}{4a\sin\dfrac{t}{2}}$.

Найдем $E_1(t)$:

$$E_1(t) = \frac{\dot\alpha(t)}{|\ \dot\alpha(t)\ |} = \frac{1}{2a\sin\dfrac{t}{2}}\ {}^t\!\left(2a\sin^2\frac{t}{2},\ 2a\sin\frac{t}{2}\ \cos\frac{t}{2}\right) = {}^t\!\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right).$$

Следовательно, $E_2(t) = {}^t\!\left(-\cos\dfrac{t}{2},\ \sin\dfrac{t}{2}\right)$. Тогда

$$\frac{1}{k(t)}E_2(t) = {}^t\!\left(4a\sin\frac{t}{2}\ \cos\frac{t}{2},\ -4a\sin^2\frac{t}{2}\right) = {}^t\!\left(2a\sin t, 2a\left(\cos t - 1\right)\right).$$

Значит, $\beta(t) = {}^t(x(t),\ y(t)) = {}^t(a\,(t + \sin t),\ a(\cos t - 1))$. Сделаем параллельный перенос системы координат xOy:

$$\begin{cases} x = x' + \pi a, \\ y = y' - 2a. \end{cases}$$

В системе координат $x'O'y'$ эволюта примет вид

$$\beta'(t) = {}^t(x'(t),\ y'(t)) = {}^t(a\,(t - \pi + \sin t),\ a\,(1 + \cos t)).$$

Сделав замену параметра $\tau = t - \pi$, получим

$$\beta'(\tau) = {}^t(a\,(\tau - \sin \tau),\ a\,(1 - \cos \tau)).$$

А это и есть уравнение циклоиды, смещенной относительно исходной вправо на πa и вниз на $2a$ (рис. 5), что и требовалось показать.

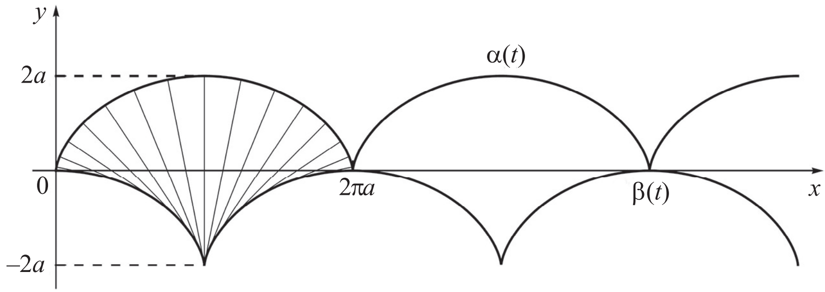

Рис. 5

Задания

1. Найдите кривизну кривой $y = \sin x$. Где кривизна равна нулю, а где принимает максимальное по модулю значение?

2. Найдите кривизну кривой $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$. В какой точке она принимает максимальное значение? Сделайте чертеж.

3. Найдите кривизну линии $y^2 = 2px$. В каких точках модуль кривизны принимает максимальное значение? Сделайте чертеж.

4. Составьте натуральные уравнения кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Указание. Используйте тригонометрические формулы

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},\quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

и формулы для синуса (косинуса) суммы или разности. Найдите кривизну $k = k(\varphi)$ и длину дуги $s = s(\varphi)$. Выразите k через s явно или неявно, исключая параметр φ.

5. Найдите кривизну эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b)$. В каких точках она принимает максимальное и минимальное значения? Сделайте чертеж.

Указание. Примените параметризацию эллипса:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

6. Найдите кривизну правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ В каких точках она принимает максимальное по модулю значение? Сделайте чертеж.

Указание. Примените параметризацию гиперболы:

$$x = a\operatorname{ch} t,\ y = b\operatorname{sh} t.$$

7. Найдите базис Френе и кривизну цепной линии $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. Ответ выразите через y. Сделайте чертеж.

8. Докажите формулу кривизны в полярных координатах $k(\varphi)=\frac{\rho^2-\rho\ddot{\rho}+2\dot{\rho}^2}{\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ для кривой $\rho = \rho(\varphi)$.

Указание. Примените параметризацию кривой:

$$\alpha(\varphi) = {}^t(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi).$$

9. Найдите кривизну кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$. В каких точках она принимает минимальное по модулю значение? Сделайте чертеж.

Указание. Используйте формулу для кривизны в полярных координатах (см. задание 8).

10. Найдите кривизну спирали Архимеда $\rho = \alpha\varphi$ $(a > 0)$. Покажите, что функция $k(\varphi)$ строго убывает с увеличением φ и при $\varphi\to\infty$ кривизна стремится к 0. Сделайте чертеж.

Указание. Используйте формулу для кривизны в полярных координатах (см. задание 8).

11. Найдите координаты центра и радиус соприкасающейся окружности параболы $y^2 = 2px$. В какой точке параболы окружность имеет с ней касание третьего порядка?

Указание. Используйте то, что центр соприкасающейся окружности – это центр кривизны, а соприкасающаяся окружность имеет касание не ниже третьего порядка в точке, где кривизна экстремальна.

12. На удлиненной циклоиде $\alpha(t) = {}^t(at - d\sin t,\ a - d\cos t)$ $(d > a)$ найдите точки, где модуль кривизны принимает экстремальное значение. Сделайте чертеж.

Указание. Пусть $u = \cos t$. Выразите модуль кривизны $K(t) = |\, k(t)\, |$ через $u = u(t)$ $(K(t) = K(u(t)))$. Тогда $\dot K(t) = \dot K(u) \cdot \dot u(t)$. Покажите, что $\dot K(u) > 0$ для любого $u \in [-1, 1]$. Таким образом, точки экстремума функции $K(t)$ – это точки экстремума функции $u(t)$.

13. Найдите радиус кривизны параболы $y = \dfrac{x^2}{2p}$ и докажите, что он равен $\dfrac{p}{\cos^3 \alpha}$, где α – угол наклона касательной к оси абсцисс.

Указание. Используйте то, что $\operatorname{tg} \alpha = \dot y(x)$.

14. Найдите эволюту эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\left(a > b\right)$. Сделайте чертеж.

Указание. Примените параметризацию эллипса:

$$x = a \cos t,\ \ y = b \sin t.$$

15. Составьте натуральные уравнения кривой $y = x^{3/2}$.

Указание. Найдите кривизну $k(t)$ кривой $\alpha(t) = {}^t(t,\ \ y(t))$; найдите длину $s = s(t)$ дуги этой кривой и выразите k через s, исключив параметр t.

16. Составьте уравнение и начертите эволюту гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Указание. Примените параметризацию гиперболы:

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = b\,\mathrm{sh}\,t.$$

17. Найдите эволюту логарифмической спирали $\rho = ce^{\varphi}$ и покажите, что она является логарифмической спиралью, полученной из данной поворотом вокруг полюса на некоторый угол.

Указание. Используя параметризацию

$$\alpha(\varphi) = {}^t(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi)$$

и формулу для кривизны в полярных координатах (см. задание 8), найдите эволюту $\beta(\varphi)$ и покажите, что $\beta(\varphi) = J\alpha(\varphi)$, где J – матрица оператора поворота на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

18. Составьте уравнение и начертите эволюту кривой $y = \ln x$. Найдите особую точку эволюты – возврат первого рода.

Указание. Найдите точку $t = t_0$ локального максимума модуля кривизны. При $t = t_0$ эволюта имеет особую точку – возврат первого рода.

19. Найдите кривую $\beta(s)$ единичной скорости, которая задается натуральным уравнением $k = \dfrac{a}{a^2 + s^2}$, если $\beta(0) = (0,\ 0)$. Докажите, что эта кривая – натуральная параметризация цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$.

Указание. Найдите кривую $\beta(s)$, используя натуральные уравнения.

20. Найдите эволюту кардиоиды $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. Покажите, что она тоже является кардиоидой. Сделайте чертеж.

Указание. При нахождении кривизны используйте формулу в полярных координатах (см. задание 8). Докажите, что эволюта $\beta(\varphi)$ получена из исходной кардиоиды $\alpha(\varphi)$ сжатием в 3 раза, поворотом вокруг полюса на π и сдвигом вдоль полярной оси влево на $(2/3)a$.

21. Найдите соприкасающиеся окружности к гиперболе $xy = 1$ в точках, где радиус кривизны достигает своего минимального значения. Сделайте чертеж.

Указание. Докажите, что радиус кривизны достигает своего минимального значения в точках $M_1(1,\ 1)$, $M_2(-1,\ -1)$.

22. Найдите параболу $y = ax^2 + bx + c$, имеющую с синусоидой $y = \sin x$ в точке $A(\pi/2,\ 1)$ общую касательную и одинаковую кривизну. Сделайте чертеж.

23. Найдите параметризацию эволюты кривой $y = \sin x$. Сделайте чертеж. Найдите особые точки и асимптоты эволюты.

Указание. Используйте то, что эволюта $\beta(x)$ кривой $\alpha(x)$ имеет особую точку (возврат первого рода) при $x = x_1$, где кривизна $k(x)$ кривой $\alpha(x)$ экстремальна; и эволюта имеет асимптоту при $x = x_2$, если $k(x_2) = 0$.

24. Составьте параметризацию кривой, для которой радиус кривизны равен $R(\theta) = a \cdot \theta$ $(a > 0)$, где θ – угол наклона касательной к оси Ox, если известно, что при $\theta = 0$ кривая проходит через точку $p_0 = (a, 0)$. Докажите, что кривая является эвольвентой окружности $x^2 + y^2 = a^2$, выходящей из точки p_0. Сделайте чертеж.

Указание. Используя то, что $R(s) = \dfrac{1}{k(s)}$ и $k(s) = \dot{\theta}(s)$, решите дифференциальное уравнение относительно $\theta = \theta(s)$ с начальным условием $\theta(0) = 0$, где s – натуральный параметр. Затем найдите натуральную параметризацию $\beta(s)$ искомой кривой, учитывая, что $\theta(s)$ – угол, образованный вектором $\dot{\beta}(s)$ и осью Ox. Найдите искомую кривую в виде $\gamma(\theta) = \beta(s(\theta))$, где $s = s(\theta)$ – функция, обратная к функции $\theta = \theta(s)$.

25. Найдите кривизну астроиды $\alpha(t) = {}^t(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$. В каких точках ее модуль принимает минимальное значение, при каких стремится к ∞? Сделайте чертеж.

Указание. Используйте формулу для кривизны в полярных координатах (см. задание 8).

Ответы

№ 1. $k(x) = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{(2 - \sin^2 x)^3}}$, $k(x) = 0$ при $x = \pi n$; значение $|k(x)|$ максимально при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

№ 2. Кривизна $k(x) = \dfrac{1}{a \operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{a}}$ максимальна при $x = 0$.

№ 3. $k=-\dfrac{p^2}{\sqrt{\left(y^2+p^2\right)^3}}=-\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{\left(p+2x\right)^3}}$, значение $\left|k(x)\right|$ максимально при $x=0$ ($y=0$).

№ 4. $s^2+9R^2=16a^2$ ($R=1/k$).

№ 5. Кривизна $k(t)=\dfrac{ab}{\sqrt{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^3}}=\dfrac{a^4b^4}{\sqrt{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^3}}$ максимальна в точках ($\pm a$, 0) и минимальна в точках (0, $\pm b$).

№ 6. Кривизна $k(t)=-\dfrac{ab}{\sqrt{\left(a^2\operatorname{sh}^2 t+b^2\operatorname{ch}^2 t\right)^3}}=-\dfrac{a^4b^4}{\sqrt{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^3}}$, значение $|\,k(t)\,|$ максимально в точке (a, 0).

№ 7. $E_1={}^t\!\left(\dfrac{a}{y},\dfrac{\sqrt{y^2-a^2}}{y}\right)$, $E_2={}^t\!\left(-\dfrac{\sqrt{y^2-a^2}}{y},\dfrac{a}{y}\right)$, $k=\dfrac{a}{y^2}$.

№ 9. Кривизна $k(\varphi)=\dfrac{3}{4a\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|}$ минимальна при $\varphi=0$.

№ 10. $k(\varphi)=\dfrac{2+\varphi^2}{a\left(1+\varphi^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

№ 11. ${}^t\!\left(p+\dfrac{3y_0^2}{2p},-\dfrac{y_0^3}{p^2}\right)$ – координаты центра, $\dfrac{\left(p^2+y_0^2\right)^{3/2}}{p^2}$ – радиус соприкасающейся окружности к параболе в точке M_0 (x_0, y_0). Соприкасающаяся окружность имеет касание третьего порядка с параболой в начале координат.

№ 12. $k(t)=d\cdot\dfrac{a\cos t-d}{\left(a^2+d^2-2ad\cos t\right)^{\frac{3}{2}}}$, значение $|\,k(t)\,|$ максимально в точках ${}^t(2\pi na,\ a-d)$, т. е. при $t=2\pi n$, и минимально в точках ${}^t(\pi a(2n+1),\ a+d)$, т. е. при $t=\pi(2n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$.

№ 13. $R=\dfrac{\left(x^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$

№ 14. $\beta(t)={}^t\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t\right)$ – астроида.

№ 15. $k(t)=\dfrac{6}{\sqrt{t}\,(9t+4)^{3/2}},\ \ s=\dfrac{(9t+4)^{3/2}-8}{27},$

$$k(s)=\frac{18}{(27s+8)\left((27s+8)^{\frac{2}{3}}-4\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

№ 16. $\beta(t)={}^t\left(\dfrac{a^2+b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t,\ -\dfrac{a^2+b^2}{b}\operatorname{sh}^3 t\right).$

№ 17. $\beta(\varphi)=ce^{\varphi}\cdot{}^t(-\sin\varphi,\cos\varphi).$

№ 18. Эволюта $\beta(x)={}^t\left(\dfrac{2x^2+1}{x},\ \ln x-x^2-1\right)$ имеет возврат первого рода при $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

№ 19. $\beta(s)={}^t\left(a\ln\dfrac{s+\sqrt{s^2+a^2}}{a},\ \sqrt{s^2+a^2}\right).$

№ 20. $\beta(\varphi)=\dfrac{a}{3}\ {}^t(\cos^2\varphi+\cos\varphi-2,\ \sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi).$

№ 21. $(x-2)^2+(y-2)^2=2,\ (x+2)^2+(y+2)^2=2.$

№ 22. $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{\pi}{2}x+1-\dfrac{\pi^2}{8}.$

№ 23. $\beta(x)={}^t\left(x+\cos x\cdot\dfrac{1+\cos^2 x}{\sin x},\ -\dfrac{2\cos^2 x}{\sin x}\right).$

№ 24. $\beta(\theta)=a\,{}^t(\theta\sin\theta+\cos\theta,\ \sin\theta-\theta\cos\theta).$

№ 25. $k(t) = -\dfrac{2}{3a}\dfrac{1}{|\sin 2t|}$, значение $|k(t)|$ минимально при $t \in \left\{\pm\dfrac{\pi}{4}, \pm\dfrac{3\pi}{4}\right\}$, $|k(t)| \to \infty$ при $t \to 0$, $t \to \pm\dfrac{\pi}{2}$, $t \to \pi$.

4. КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Базис Френе $(E_1(t), E_2(t), E_3(t))$ бирегулярной кривой $\alpha(t)$: $I \to \mathbb{R}^3$ вычисляется следующим образом:

$$E_1(t) = \frac{\dot\alpha(t)}{|\,\dot\alpha(t)\,|},\ E_3(t) = \frac{\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)}{|\,\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)\,|},\ E_2(t) = E_3(t) \times E_1\left(t\right).$$

Кривизна $k_1(t)$ и кручение $k_1(t)$ вычисляются по формулам

$$k_1(t) = \frac{|\,\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)\,|}{|\,\dot\alpha(t)\,|^3},\ k_2(t) = \frac{\left(\dot\alpha(t), \ddot\alpha(t), \dddot\alpha(t)\right)}{|\,\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)\,|^2}.$$

Для базиса Френе справедливы уравнения Френе:

$$\begin{cases} \dot E_1(t) = |\,\dot\alpha(t)\,|\, k_1(t) E_2(t), \\ \dot E_2(t) = |\,\dot\alpha(t)\,| \left(-k_1(t) E_1(t) + k_2(t) E_3(t)\right), \\ \dot E_3(t) = -|\,\dot\alpha(t)\,|\, k_2(t) E_2(t). \end{cases}$$

Векторы $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E_3(t)$ являются направляющими векторами для касательной, нормали и бинормали к кривой в точке $\alpha(t)$ соответственно, а также нормальными векторами для нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей к кривой в этой же точке соответственно.

Задача 4. Составьте уравнение нормали и соприкасающейся плоскости винтовой линии $\alpha(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, bt)$. Докажите, что нормаль пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а бинормаль образует с ней постоянный угол. Найдите кривизну и кручение винтовой линии. При каких значениях a и b кривизна и кручение равны? При каком значении b при фиксированном a кручение принимает максимальное значение?

Решение. Найдем сначала первые три производные кривой $\alpha(t)$:

$$\dot{\alpha}(t) = {}^t\!\left(-a\sin t,\ a\cos t, b\right),$$

$$\ddot{\alpha}(t) = {}^t\!\left(-a\cos t, -a\sin t, 0\right),$$

$$\dddot{\alpha}(t) = {}^t\!\left(a\sin t, -a\cos t, 0\right).$$

Тогда $\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = a\left(b\sin t, -b\cos t, a\right)$ и

$\left(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}\right) = \left(\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}\right) = a^2 b,\ |\dot{\alpha}| = \sqrt{a^2+b^2},\ |\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}| = a\sqrt{a^2+b^2}.$

Теперь можно найти векторы базиса Френе, а также кривизну и кручение:

$$E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin t,\ a\cos t, b\right),$$

$$E_3 = \frac{\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin t, -b\cos t, a\right),$$

$$E_2 = E_3\times E_1 = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b\sin t & -b\cos t & a \\ -a\sin t & a\cos t & b \end{vmatrix} = \left(-\cos t, -\sin t, 0\right),$$

$$k_1 = \frac{|\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$k_2(t) = \frac{\left(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dddot{\alpha}(t)\right)}{|\dot{\alpha}(t)\times\ddot{\alpha}(t)|^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Нормаль к кривой в точке $\alpha(t)$ направляет вектор $E_2(t)$, следовательно $\dfrac{x-a\cos t}{-\cos t} = \dfrac{y-a\sin t}{-\sin t} = \dfrac{z-bt}{0}$ – каноническое уравнение нормали. Очевидно, точка $(0, 0, bt)$, принадлежащая оси Oz, лежит на нормали. Кроме того, вектор $E_2(t)$ параллелен плоскости xOy. Значит, действительно, нормаль пересекает ось Oz под прямым углом.

Бинормаль направляет вектор $E_3(t)$. Обозначим через φ угол между векторами $E_3(t)$ и e_3. Поскольку

$$\left\langle E_3(t), e_3 \right\rangle = \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{const},$$

бинормаль образует с осью Oz постоянный угол. Соприкасающаяся плоскость в точке $\alpha(t)$ имеет в качестве нормального вектора вектор $E_3(t)$. Поэтому мы можем записать уравнение этой плоскости в общем виде:

$$b\sin t\,(x - a\cos t) - b\cos t\,(y - a\sin t) + a\,(z - bt) = 0,$$

или

$$b\sin t\cdot x - b\cos t\cdot y + a\cdot z - abt = 0.$$

Очевидно, $k_1(t) = k_2(t)$ тогда и только тогда, когда $a = b$. Найдем $\dfrac{dk_2}{db} = \dfrac{a^2-b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$. Следовательно, $\dfrac{dk_2}{db} = 0$ при $b = a$, $\dfrac{dk_2}{db} > 0$ при $b < a$, $\dfrac{dk_2}{db} < 0$ при $b > a$. Значит, при $b = a$ кручение принимает максимальное значение.

Ответ. $\dfrac{x - a\cos t}{-\cos t} = \dfrac{y - a\sin t}{-\sin t} = \dfrac{z - bt}{0}$ – уравнение нормали, $b\sin t\cdot x - b\cos t\cdot y + a\cdot z - abt = 0$ – уравнение соприкасающейся плоскости; $k_1 = \dfrac{a}{a^2+b^2}$ – кривизна, $k_2(t) = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ – кручение; $k_1(t) = k_2(t)$ тогда и только тогда, когда $a = b$; кручение максимально при $b = a$.

Задания

1. Докажите, что для кривой единичной скорости справедливо тождество $\left(\dot{E}_3, \ddot{E}_3, \dddot{E}_3\right) = k_2^5\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{\bullet}$.

2. Покажите, что коническая спираль

$$\alpha(\varphi) = {}^t(a \cdot e^{\varphi} \cos \varphi,\ a \cdot e^{\varphi} \sin \varphi,\ ae^{\varphi})$$

лежит на конусе $x^2 + y^2 = z^2$. Найдите ее радиус кривизны и докажите, что он пропорционален расстоянию от точки спирали до оси конуса.

Указание. Радиус кривизны $R(\varphi) = \dfrac{1}{k_1(\varphi)}$ должен быть равен значению $b\rho(\varphi)$ для любого φ, где $\rho(\varphi) = \sqrt{x^2(\varphi) + y^2(\varphi)}$, $b = \mathrm{const}$.

3. Докажите, что для кривой $\alpha(t) = {}^t(a\ \mathrm{ch}\ t,\ a\ \mathrm{sh}\ t,\ at)$ кривизна и кручение равны.

4. Найдите уравнения соприкасающихся плоскостей кривой $\alpha(t) = {}^t(t, t^2, t^3)$, проходящих через данную точку $M_0(2, -1/3, -6)$.

5. На бинормалях винтовой линии отложены отрезки равной длины. Докажите, что концы этих отрезков лежат на другой винтовой линии.

Указание. Если $\alpha(t) = {}^t(a \cos t,\ a \sin t,\ bt)$ – исходная винтовая линия, то $\beta(t) = \alpha(t) + cE_3(t)$ – кривая, задающая полученную линию. Докажите, что $\beta(t)$ – винтовая линия.

6. Докажите, что для кривой $\alpha(t) = {}^t(3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3)$ кривизна и кручение равны.

7. Докажите, что для кривой единичной скорости выполняется тождество $\left(\dot{E}_1, \ddot{E}_1, \dddot{E}_1\right) = k_1^5 \left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)^{\bullet}$.

8. Найдите кривизну и кручение линии $\alpha(t) = {}^t\left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$.

Указание. Перейдите к гиперболическим функциям $\mathrm{ch}\ t$, $\mathrm{sh}\ t$ либо используйте тождество $(e^t + e^{-t})^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2$.

9. На нормалях винтовой линии $\alpha(t) = (a \cos t,\ a \sin t,\ bt)$ отложены отрезки равной длины c, $c \neq a$. Докажите, что концы этих отрезков лежат на другой винтовой линии.

Указание. Докажите, что кривая $\beta(t) = \alpha(t) + cE_2(t)$, задающая полученную линию, является винтовой линией.

10. Найдите кривизну и кручение линии

$$\alpha(t) = {}^t\!\left(ct, \sqrt{2}c\ln t, \frac{c}{t}\right), \; c > 0.$$

11. Найдите значения a и b, при которых кривизна кривой $\alpha(t) = {}^t(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, bt)$ во всех точках равна кручению данной кривой.

Указание. Найдите кривизну $k_1(t)$ и кручение $k_2(t)$ кривой $\alpha(t)$ и используйте тождество $k_1(t) = k_2(t)$.

12. Покажите, что прямая, проведенная из произвольной точки кривой $\alpha(t) = {}^t(t, t^2, t^3)$ параллельно плоскости $z = 0$ до встречи с осью Oz, лежит в соприкасающейся плоскости кривой в этой точке.

13. При каком условии центр кривизны винтовой линии лежит на том же цилиндре, что и сама винтовая линия?

Указание. Покажите, что множество центров кривизны винтовой линии является тоже винтовой линией, и найдите параметризацию последней.

14. Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к линии пересечения двух цилиндров $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ в произвольной точке $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $(y_0 \neq 1)$.

Указание. Используйте то, что векторы $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F\big|_{p_0}$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi\big|_{p_0}$ перпендикулярны касательным плоскостям к поверхностям, заданным неявно уравнениями $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ соответственно, а значит, эти векторы перпендикулярны касательной к линии пересечения этих поверхностей.

15. Покажите, что все нормальные плоскости кривой $\alpha(t) = {}^t(a \sin^2 t, a \sin t \cdot \cos t, a \cos t)$ проходят через начало координат.

16. Составьте уравнение касательной прямой и нормальной плоскости линии, заданной пересечением двух поверхностей $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ в точке $p_0(x_0, y_0, z_0)$ $(F(p_0) = \Phi(p_0))$, если известно, что в точке p_0 эти поверхности не касаются.

Указание. Используйте то, что векторы $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F\big|_{p_0}$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi\big|_{p_0}$ перпендикулярны касательным плоскостям к поверхностям, заданным неявно уравнениями $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ соответственно, а значит, эти векторы перпендикулярны касательной к линии пересечения этих поверхностей.

17. Найдите длину дуги линии $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$ между плоскостями $y = \dfrac{a}{3}$, $y = 9a$.

Указание. Выразите y и z через x и рассмотрите кривую $\alpha(x) = {}^t(x, y(x), z(x))$.

18. Докажите, что линия $\alpha(t) = {}^t\left(e^{t/\sqrt{2}}\cos t, e^{t/\sqrt{2}}\sin t, e^{t/\sqrt{2}}\right)$ лежит на конусе $x^2 + y^2 = z^2$ и пересекает его образующие под углом 45°.

Указание. Найдите параметризацию прямолинейной образующей $\beta(\theta)$ конуса с данным направляющим вектором $\vec{a}(\varphi)$, полученным поворотом на угол φ вокруг оси Oz вектора $\vec{a}_0$, $\left|\vec{a}_0\right| = 1$, направляющего прямолинейную образующую конуса в плоскости xOz. Затем найдите значения t и θ такие, что точка $\alpha(t) = \beta(\theta)$ является точкой пересечения прямолинейной образующей и кривой. Найдите косинус угла между векторами $\dot{\alpha}(t)$ и $\vec{a}(\varphi)$.

19. Дана кривая $\alpha(t) = {}^t(t, t^2, t^3)$. Напишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в произвольной точке. Какая линия получается в пересечении касательных к кривой $\alpha(t)$ с плоскостью xOy?

20. Найдите такую функцию $f(t)$, чтобы кривая

$$\alpha(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t, f(t))$$

была плоской.

Указание. Используйте то, что кривая является плоской тогда и только тогда, когда справедливо тождество $\left(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dddot{\alpha}(t)\right) = 0$.

21. Найдите репер Френе в произвольной точке для кривой $\alpha(t) = {}^t(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ ($\sin 2t > 0$).

Указание. Во всех формулах используйте выражения через $\sin t$, $\cos t$.

22. На бинормалях кривой $\alpha(t) = {}^t(\cos\varphi \cdot \cos t, \cos\varphi \cdot \sin t, t\sin\varphi)$, $\varphi = \mathrm{const}$, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ в положительном направлении отложены отрезки постоянной длины, равной единице. Напишите уравнение

соприкасающейся плоскости кривой $\beta(t)$, состоящей из концов этих отрезков.

Указание. Ищите кривую в виде $\beta(t) = \alpha(t) + E_3(t)$. Используйте при этом формулы синуса (косинуса) разности.

23. Покажите, что замкнутая кривая $\alpha(t)= {}^t(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ имеет длину $s = 10$.

Указание. Найдите период этой кривой.

24. Найдите точки на кривой $\alpha(t) = {}^t\left(\frac{2}{t}, \ln t, -t^2\right)$, $t > 0$, в которых бинормаль параллельна плоскости $x - y + 8z + 2 = 0$.

25. От каждой точки кривой

$$\alpha(t) = {}^t\left(a\left(t-\sin t\right),\ a\left(1-\cos t\right),\ 4a\sin\frac{t}{2}\right)$$

на главной ее нормали в направлении вектора $E_2(t)$ отложен отрезок длины $a\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}$. Докажите, что линия, составленная из концов этих отрезков, есть синусоида, лежащая в плоскости $y = a$. Напишите уравнение этой синусоиды.

Указание. Для нахождения вектора $E_2(t)$ найдите натуральную параметризацию $\beta(s)$ кривой $\alpha(t)$, затем найдите вектор $E_2(s) = \dfrac{\ddot{\beta}(s)}{|\ddot{\beta}(s)|}$.

Тогда $E_2(t) = E_2(s(t))$. Кривая $\gamma(t) = \alpha(t) + a\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}\cdot E_2(t)$ – искомая.

Ответы

№ 2. $R(\varphi) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}ae^{\varphi}$.

№ 4. $3x + 3y + z + 1 = 0$ $(t_1 = -1)$, $3x - 3y + z - 1 = 0$ $(t_2 = 1)$, $108x - 18y + z - 216 = 0$ $(t_3 = 6)$.

№ 8. $k_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4\operatorname{ch}^2 t}$, $k_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{4\operatorname{ch}^2 t}$.

№ 10. $k_1 = k_2 = \dfrac{\sqrt{2}\, t^2}{c\left(1+t^2\right)^2}$.

№ 11. При $a = b$.

№ 13. При $a = b$.

№ 14. Уравнение касательной: $\dfrac{x-x_0}{y_0 z_0} = \dfrac{y-y_0}{-x_0 z_0} = \dfrac{z-z_0}{x_0 y_0}$.

Уравнение нормальной плоскости: $\dfrac{x}{x_0} - \dfrac{y}{y_0} + \dfrac{z}{z_0} = 1$.

№ 16. Уравнение касательной: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}}$.

Уравнение нормальной плоскости: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix} = 0.$

№ 17. $9a$.

№ 19. Парабола $y = \dfrac{3}{4}x^2$.

№ 20. $f(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3$.

№ 21. $E_1 = {}^t\!\left(-\dfrac{3}{5}\cos t,\ \dfrac{3}{5}\sin t,\ -\dfrac{4}{5}\right)$, $E_2 = {}^t(\sin t, \cos t, 0)$,

$E_3 = {}^t\!\left(\dfrac{4}{5}\cos t,\ -\dfrac{4}{5}\sin t,\ -\dfrac{3}{5}\right)$.

№ 22. $x \sin\varphi \sin(t-\varphi) - y \sin\varphi \cos(t-\varphi) + z - t\sin\varphi - \cos\varphi = 0$.

№ 24. $M(1, \ln 2, -4)$, $t = 2$.

№ 25. $y = a$, $z = 3a \sin \dfrac{x}{2a}$.

5. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть f: $U \to \mathbb{R}^m$ – гладкое отображение, U – открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$, $f(u) = {}^t(f_1(u), \ldots, f_m(u))$, $f_i(u)$: $U \to \mathbb{R}$, $u = {}^t(u^1, \ldots, u^n)$.

Дифференциалом отображения f в точке $p \in U$ называется такое линейное отображение $d_p f : \overrightarrow{\mathbb{R}}^n \to \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$, что $d_p f(v) = f'(p)v$ для любого $v \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^n$. Здесь $f'(p) = [f_{u^1}, \ldots, f_{u^n}]$ – матрица Якоби отображения f в точке p, $f_{u^i} = {}^t\left(f_{1u^i}, \ldots, f_{mu^i}\right)$ – частная производная f по u^i.

Отображение f называется поверхностью, если $\operatorname{rang} f'(p) = n$, или, что то же самое, частные производные $f_{u^1}, \ldots, f_{u^n}$ линейно независимы.

Кривая $\gamma\left(u^i\right) = f\left(u_0^1, \ldots, u_0^{i-1}, u^i, u_0^{i+1}, \ldots, u_0^n\right)$, $u^i \in I \subseteq \mathbb{R}$ называется *u^i-линией* поверхности f в точке $p = {}^t(u_0^1, \ldots, u_0^n)$. Частная производная f_{u^i} является касательным вектором к u^i-линии в точке p.

Касательное пространство $T_p f$ к поверхности f в точке $p \in U$ – это множество всех касательных векторов $\dot{\beta}(t)$ кривых $\beta(t) = f(\alpha(t))$ для гладких кривых α: $I \to U$, проходящих через точку $p \in U$.

Касательное пространство $T_p f$ является подпространством аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, а частные производные $f_{u^1}, \ldots, f_{u^n}$ являются базисом соответствующего ему линейного подпространства. Этот базис называется *стандартным базисом* касательного пространства $T_p f$. Касательный вектор $\dot{\beta}$ является образом касательного вектора $\dot{\alpha}$ при действии дифференциала $d_p f$. Кроме того, координаты $\left[\dot{\beta}\right]_{f_u}$ касательного вектора $\dot{\beta}$ в стандартном базисе

$f_u = (f_{u^1}, ..., f_{u^n})$ касательного пространства совпадают с координатами $[\dot{\alpha}]_e$ касательного вектора $\dot{\alpha}$ в стандартном базисе $e = (e_1, ..., e_n)$ пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$.

П е р в о й ф у н д а м е н т а л ь н о й ф о р м о й поверхности f в точке p называется билинейная форма, определяемая равенством $\mathbf{I}_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\vec{\mathbb{R}}^m}$ для касательных векторов $X, Y \in T_p f$.

Пусть $\alpha(t)$: $I \to U$, $\delta(\tau)$: $J \to U$ – гладкие кривые, проходящие через точку $p \in U$, и $\beta = f \circ \alpha$, $\gamma = f \circ \delta$, $X = d\beta = \dot{\beta} dt$, $Y = d\gamma = \dot{\gamma} d\tau$, $\alpha(t) = {}^t(u^1(t), ..., u^n(t))$, $\delta(\tau) = {}^t(v^1(\tau), ..., v^n(\tau))$. Тогда

$$[X]_{f_u} = [d\beta]_{f_u} = [d\alpha]_e = {}^t\left(du^1, ..., du^n\right),$$

$$[Y]_{f_u} = [d\gamma]_{f_u} = [d\delta]_e = {}^t\left(dv^1, ..., dv^n\right).$$

Обозначим через $[\mathbf{I}_p] = (g_{ij})$, где $g_{ij} = \left\langle f_{u^i}, f_{u^j} \right\rangle$, матрицу первой фундаментальной формы. Получим явное представление первой фундаментальной формы

$$\mathbf{I}_p(X, Y) = {}^t[X][\mathbf{I}_p][Y] = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du^i dv^j.$$

Первой квадратичной формой поверхности f в точке p называется квадратичная форма

$$\mathbf{I}_p(X, X) = {}^t[X][\mathbf{I}_p][X] = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du^i du^j.$$

Длина кривой β на поверхности f равна

$$l[\beta] = \int_I \sqrt{\mathbf{I}_p(X, X)} = \int_I \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du^i du^j}.$$

Угол φ между кривыми β и γ на поверхности f в их точке пересечения вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{I}_p\left(d\beta, d\gamma\right)}{\sqrt{\mathbf{I}_p\left(d\beta, d\beta\right)}\sqrt{\mathbf{I}_p\left(d\gamma, d\gamma\right)}} = \frac{\mathbf{I}_p\left(X, Y\right)}{\sqrt{\mathbf{I}_p\left(X, X\right)}\sqrt{\mathbf{I}_p\left(Y, Y\right)}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} g_{ij} du^i dv^j}{\sqrt{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} g_{ij} du^i du^j}\sqrt{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} g_{ij} dv^i dv^j}}.$$

Две кривые на поверхности называются *ортогональными*, если угол между ними в точке их пересечения прямой.

Объем (площадь для $n = 2$) области $f(U)$ поверхности равен:

$$\operatorname{vol} f\left(U\right) = \int\limits_U \sqrt{g\left(p\right)}\, du^1 du^2 \dots du^n,$$

где $g(p) = \det\left(g_{ij}(p)\right)$.

Поверхностью вращения называется поверхность f, полученная вращением кривой $\alpha(u) = {}^t(x(u), 0, z(u))$, где $x(u) \neq 0$, вокруг оси Oz. Ее параметризация $f(u, v) = {}^t(x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$; u-линии, v-линии поверхности вращения называются, соответственно, *меридианами* и *параллелями* поверхности f.

Локсодромой на поверхности вращения называется линия, которая пересекает все меридианы под постоянным углом.

Задача 5. На прямом геликоиде $f(u,v) = {}^t(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$ (рис. 6) найти u-линии, v-линии; стандартный базис касательного пространства $T_p f$ и уравнение касательной плоскости; матрицу первой фундаментальной формы и саму первую фундаментальную форму; периметр и сумму углов криволинейного треугольника, образованного кривыми $u = \frac{av^2}{2}$, $u = 0$, $v = 1$, на поверхности.

Решение. Прямолинейная образующая $\alpha(u) = {}^t(u\cos v_0, u\sin v_0, av_0)$, $u \in \mathbb{R}$, пересекающая ось Oz под прямым углом в точке $(0, 0, av_0)$ с направляющим вектором $\vec{s} = (\cos v_0, \sin v_0, 0)$, является u-линией поверхности; винтовая линия $\beta(v) = {}^t(u_0\cos v,\ u_0\sin v,\ av)$ является v-линией поверхности (см. рис. 6).

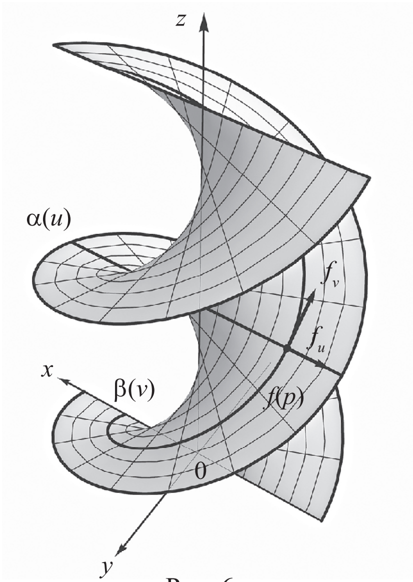

Рис. 6

Векторы $f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = {}^t(-u \sin v, u \cos v, a)$ образуют стандартный базис касательного пространства $T_p f$. Найдем вектор

$$n = f_u \times f_v = {}^t(a \sin v, -a \cos v, u),$$

вектор нормали касательной плоскости. Мы видим, что $\vec{n} \neq \vec{0}$, т. е. векторы f_u и f_v не коллинеарны для любых $u, v \in \mathbb{R}$, значит, отображение $f(u, v)$ действительно является поверхностью. Касательная плоскость $T_p f$ проходит через точку $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$, следовательно, ее уравнение

$$a \sin v (x - u \cos v) + (-a \cos v)(y - u \sin v) + u(z - av) = 0.$$

После преобразований получим $ax \sin v - ay \cos v + zu - auv = 0$.

Найдем коэффициенты матрицы $[\mathrm{I}_p]$ первой фундаментальной формы:

$$g_{11} = \langle f_u, f_u \rangle = 1, \;\; g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v \rangle = \langle f_v, f_u \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle f_v, f_v \rangle = u^2 + a^2.$$

Таким образом,

$$\left[\mathbf{I}_p\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u^2+a^2\end{pmatrix},\ \mathbf{I}_p(X,Y)=du_1\,du_2\ +(u^2+a^2)dv_1dv_2,$$

где $\left[X\right]_{f_u}={}^t\left(du_1,dv_1\right),\ \left[Y\right]_{f_v}={}^t\left(du_2,dv_2\right)$.

Пусть β_1,β_2,β_3 – стороны заданного криволинейного треугольника на геликоиде, а кривые $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ – их прообразы в области определения поверхности $\left(\beta_i=f\circ\alpha_i,\ i\in\{1,2,3\}\right)$ (рис. 7).

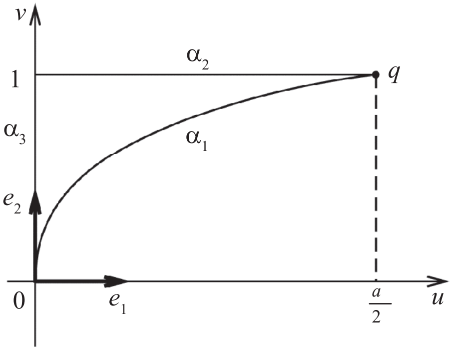

Рис. 7

Параметризуем эти кривые:

$$\alpha_1(t)=\left(u_1(t),v_1(t)\right)={}^t\left(\frac{at^2}{2},\ t\right),\ t\in[0,1],$$

$$\alpha_2(\tau)=\left(u_2(\tau),v_2(\tau)\right)={}^t\left(\tau,\ 1\right),\ \tau\in\left[0,\frac{a}{2}\right],$$

$$\alpha_3(\theta)=\left(u_3(\theta),v_3(\theta)\right)={}^t\left(0,\ \theta\right),\ \theta\in[0,1].$$

Тогда

$$\left[d\alpha_1\right]_{e_1,e_2}=\left[d\beta_1\right]_{f_u,f_v}={}^t\left(du_1,\ dv_1\right)={}^t\left(at\,dt,dt\right),$$

$$\left[d\alpha_2\right]_{e_1,e_2}=\left[d\beta_2\right]_{f_u,f_v}={}^t\left(du_2,\ dv_2\right)={}^t\left(d\tau,0\right),$$

$$\left[d\alpha_3\right]_{e_1,e_2}=\left[d\beta_3\right]_{f_u,f_v}={}^t\left(du_3,\ dv_3\right)={}^t\left(0,d\theta\right).$$

Найдем длину кривой β_1:

$$l[\beta_1]=\int_0^1\sqrt{I_p\left(d\beta_1,d\beta_1\right)}=\int_0^1\sqrt{g_{11}(p)du_1^2+2g_{12}(p)du_1dv_1+g_{22}(p)dv_1^2}=$$

$$=\int_0^1\sqrt{\left(at\,dt\right)^2+\left(u_1(t)^2+a^2\right)dt^2}=\int_0^1\sqrt{\left(at\,dt\right)^2+\left(\frac{a^2t^4}{4}+a^2\right)dt^2}=$$

$$=a\int_0^1\sqrt{\frac{t^4}{4}+t^2+1}\,dt=a\int_0^1\sqrt{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^2}\,dt=a\int_0^1\left(\frac{t^2}{2}+1\right)dt=\frac{7}{6}a.$$

Найдем дину кривой β_2:

$$l[\beta_2]=\int_0^1\sqrt{I_p\left(d\beta_2,d\beta_2\right)}=\int_0^{a/2}\sqrt{g_{11}(p)du_2^2+2g_{12}(p)du_2dv_2+g_{22}(p)dv_2^2}=$$

$$=\int_0^{a/2}\sqrt{d\tau^2}=\int_0^{a/2}d\tau=\frac{a}{2}.$$

Как мы видим, длины кривых α_2 и β_2 совпадают. Это следствие того, что образ кривой β_2 на поверхности – это отрезок u-линии, которая является прямолинейной образующей геликоида.

Наконец, найдем длину кривой β_3:

$$l[\beta_3]=\int_0^1\sqrt{I_p\left(d\beta_3,d\beta_3\right)}=\int_0^1\sqrt{g_{11}(p)du_3^2+2g_{12}(p)du_3dv_3+g_{22}(p)dv_3^2}=$$

$$=\int_0^1\sqrt{\left(u_3(\theta)^2+a^2\right)d\theta^2}=\int_0^1\sqrt{a^2d\theta^2}=\int_0^1 a\,d\theta=a.$$

Таким образом, периметр заданного треугольника равен $\frac{8}{3}a$.

Найдем угол φ между кривыми β_1 и β_2. По определению он равен углу между касательными векторами $d\beta_1$ и $d\beta_2$ в точке их пересечения $f(q)$, где q – точка пересечения кривых α_1 и α_2. Очевидно, $\alpha_1(t)=\alpha_2(\tau)$ при $t=1$, $\tau=\frac{a}{2}$, т. е. $q=\left(\frac{a}{2},1\right)$.

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{I_q\left(d\beta_1, d\beta_2\right)}{\sqrt{I_q\left(d\beta_1, d\beta_1\right)}\sqrt{I_q\left(d\beta_2, d\beta_2\right)}} =$$

$$= \frac{g_{11}(q)du_1du_2 + 2g_{12}(q)\left(du_1dv_2 + du_2dv_1\right) + g_{22}(q)dv_1dv_2}{\sqrt{g_{11}(q)du_1^2 + 2g_{12}(q)du_1dv_1 + g_{22}(q)dv_1^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{g_{11}(q)du_2^2 + 2g_{12}(q)du_2dv_2 + g_{22}(q)dv_2^2}} =$$

$$= \left.\frac{at\cdot dt\cdot d\tau}{\sqrt{\left(at\,dt\right)^2 + \left(\frac{a^2t^4}{4} + a^2\right)dt^2}\ \sqrt{d\tau^2}}\right|_{\substack{t=1,\\ \tau=\frac{a}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\dfrac{2}{3}$.

Угол ψ между кривыми β_2 и β_3 равен углу между векторами $d\beta_2$ и $d\beta_3$ или, что то же самое, углу между векторами $\dot\beta_2$ и $\dot\beta_3$ в точке пересечения кривых β_2 и β_3. Заметим, что $\dot\beta_2$ и $\dot\beta_3$ – это касательные вектора к u-линии и v-линии соответственно. Следовательно, $\dot\beta_2 = f_u$, $\dot\beta_3 = f_v$. Но $\left\langle f_u, f_v\right\rangle = g_{12} = 0$ в любой точке поверхности, значит, угол ψ прямой.

Наконец, угол μ между кривыми β_1 и β_3 равен нулю. Действительно, $\dot\alpha_1(0) = \dot\alpha_3(0) = e_2$ и $\dot\beta_1(0) = d_Of\left(\dot\alpha_1(0)\right)$, $\dot\beta_3(0) = d_Of\left(\dot\alpha_3(0)\right)$. Следовательно, $\dot\beta_1(0) = \dot\beta_3(0)$. Поскольку μ – это угол между векторами $\dot\beta_1(0)$ и $\dot\beta_3(0)$, то $\mu = 0$.

Таким образом, сумма углов заданного криволинейного треугольника равна $\varphi + \psi + \mu = \dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{2}{3}$.

Ответ. Прямолинейная образующая является u-линией, винтовая линия является v-линией.

Стандартный базис касательного пространства:

$$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)\;\; f_v = {}^t(-u \sin v, u \cos v, 0);$$

уравнение касательной плоскости:

$$ax \sin v - ay \cos v + zu - auv = 0.$$

Матрица первой фундаментальной формы: $\left[\mathbf{I}_p\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}$;

первая фундаментальная форма:

$$\mathbf{I}_p(X, Y) = du_1 du_2 + (u^2 + a^2) dv_1 dv_2,$$

где $X = {}^t\left(du_1, dv_1\right), Y = {}^t\left(du_2, dv_2\right)$;

периметр треугольника равен $\frac{8}{3}a$;

сумма углов треугольника равна $\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{2}{3}$.

Задания

1. На поверхности с первой квадратичной формой $\mathbf{I}_p(X, X) = du^2 + \mathrm{sh}^2 u dv^2$, где $X = {}^t(du, dv)$, найдите длину дуги кривой, заданной линией $u = v$, между точками M_1 (u_1, v_1) и M_2 (u_2, v_2).

2. Найдите угол между кривыми, заданными линиями $v = 2u$, $v = -2u$, на поверхности, имеющей первую квадратичную форму $\mathbf{I}_p(X, X) = du^2 + dv^2$, где $X = {}^t(du, dv)$.

3. Найдите угол между кривыми, заданными линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$, на поверхности $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, u^2)$.

4. Найдите уравнения локсодром на произвольной поверхности вращения.

5. Покажите, что площади областей на параболоидах $z = a\dfrac{x^2 + y^2}{2}$, $z = axy$, проектирующиеся на одну и ту же область плоскости xOy, равны.

Указание. Докажите, что для этих поверхностей равны определители матриц первой фундаментальной формы.

6. На поверхности $f(u, v) = {}^t(u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv)$ $(u^2 + v^2 \neq 0)$ вычислите длину дуги кривой, заданной линией $v = au$, между точками ее пересечения с v-линиями $u = 1$, $u = 2$.

7. Поверхность f является частью фигуры, образованной касательными к кривой единичной скорости $\beta(s)$, где s – натуральный параметр. Найдите матрицу первой фундаментальной формы поверхности f.

Указание. Примените параметризацию $f(s, v) = \beta(s) + vE_1(s)$, где $E_1(s)$ – направляющий вектор касательной, т. е. первый вектор базиса Френе кривой $\beta(s)$.

8. Поверхность f является частью фигуры, образованной главными нормалями к кривой единичной скорости $\beta(s)$, где s – натуральный параметр. Найдите матрицу первой фундаментальной формы поверхности f.

Указание. Примените параметризацию $f(s, v) = \beta(s) + vE_2(s)$, где $E_2(s)$ – направляющий вектор главной нормали, т. е. второй вектор базиса Френе кривой $\beta(s)$.

9. Поверхность f является частью фигуры, образованной бинормалями к кривой единичной скорости $\beta(s)$, где s – натуральный параметр. Найдите матрицу первой фундаментальной формы поверхности f.

Указание. Примените параметризацию $f(s, v) = \beta(s) + vE_3(s)$, где $E_3(s)$ – направляющий вектор бинормали, т. е. третий вектор базиса Френе кривой $\beta(s)$.

10. Напишите уравнение касательной плоскости к псевдосфере $f(u, v) = {}^t(a \sin u \cos v,\ a \sin u \sin v,\ a\,(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u))$ в произвольной точке.

11. Докажите, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема. Найдите этот объем.

12. Покажите, что касательная плоскость в произвольной точке конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ проходит через его вершину.

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(au\cos v, bu\sin v, cu).$$

13. Пусть поверхность есть часть фигуры, образованной касательными к кривой единичной скорости $\beta(s)$. Напишите уравнение касательной плоскости в произвольной точке поверхности. Исследуйте ее поведение при смещении точки касания вдоль прямолинейных образующих поверхности.

Указание. Примените параметризацию $f(s, v) = \beta(s) + vE_1(s)$, где $E_1(s)$ – направляющий вектор касательной, т. е. первый вектор базиса Френе кривой $\beta(s)$.

14. Найдите кривые на сфере

$$f(u, v) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u),$$

ортогональные к кривым, заданным семейством линий $u + v = c$.

15. Докажите, что на прямом геликоиде

$$f(u, v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$$

дифференциальное уравнение $du^2 - (u^2 + a^2)dv^2 = 0$ задает ортогональную сеть, т. е. два семейства взаимно ортогональных кривых.

16. На поверхности гиперболического параболоида $z = axy$ найдите кривые, ортогональные к ее прямолинейным образующим.

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = (u, v, auv)$$

гиперболического параболоида и докажите, что u-линии, v-линии и только они являются его прямолинейными образующими.

17. Покажите, что касательная плоскость в произвольной точке конической поверхности проходит через его вершину.

Указание. Примените параметризацию $f(u, v) = \alpha(u)\cdot v$ конической поверхности с вершиной в начале координат, где $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ – гладкая регулярная кривая, и напишите уравнение касательной плоскости в векторном виде.

18. Напишите уравнение нормали к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в произвольной точке. Убедитесь, что все нормали пересекают ось Oz.

19. Напишите параметризацию цилиндра $S_a^2 \times \mathbb{R}$, расположенного в пространстве $\mathbb{R}^4$, где S_a^2 – двумерная сфера радиуса a, расположенная в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найдите базис касательного пространства, нормальный вектор и уравнение касательной гиперплоскости в произвольной точке этого цилиндра.

Указание. Примените параметризацию сферы S_a^2:

$$g(u, v) = {}^t(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin v).$$

20. Определите, под каким углом пересекаются кривые, заданные линиями $u + v = 0$ и $u - v = 0$, на торе

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v).$$

21. Докажите, что на поверхности

$$f(u, v) = {}^t(u + \cos v, u - \sin v, \lambda u), \lambda \neq 0$$

кривые, заданные линиями $u = \sin v$, $u = 1$, касаются в точке $M(1, 0, \lambda)$.

22. Найдите объем поверхности трехмерной сферы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

в $\mathbb{R}^4$.

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v \cos w, R \cos u \sin v \cos w, R \sin u \cos w, R \sin w),$$

где $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in [0, 2\pi]$, $w \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

23. Найдите объем шара

$$f(u, v, w) = {}^t(w \cos u \cos v, w \cos u \sin v, w \sin u),$$

где $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in [-\pi, \pi]$, $w \in [0, R]$.

24. Найдите уравнения линий на прямом геликоиде

$$f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av),$$

делящих пополам углы между u-линиями, v-линиями.

25. Найдите параметризацию двумерной полусферы радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^3$ в цилиндрических (полярных) координатах.

Проверьте, что это поверхность. Найдите матрицу ее первой фундаментальной формы. Проверьте, что ее площадь равна $2\pi R^2$.

Ответы

№ 1. $|\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|$.

№ 2. arccos (3/5).

№ 3. arccos (2/3).

№ 4. $v = \int\limits_0^u \frac{\mathrm{d}u}{x(u)} \cdot \operatorname{tg}\varphi + v_0$, $\varphi = \mathrm{const}$, $v_0 = \mathrm{const}$.

№ 6. $3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}$.

№ 7. $\left[\mathbf{I}_p\right] = \begin{pmatrix} 1 + k_1^2 v^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, где k_1 – кривизна кривой $\beta(s)$.

№ 8. $\left[\mathbf{I}_p\right] = \begin{pmatrix} (1 - k_1 v)^2 + k_2^2 v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где k_1 – кривизна, а k_2 – кручение кривой $\beta(s)$.

№ 9. $\left[\mathbf{I}_p\right] = \begin{pmatrix} 1 + k_2^2 v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где k_2 – кручение кривой $\beta(s)$.

№ 10.

$\cos u \cos v \cdot x + \cos u \sin v \cdot y - \sin u \cdot z + a \ln(\operatorname{tg}(u/2)) \cdot \sin u = 0$.

№ 11. $(9/2)a^3$.

№ 13. $\left(r - \beta(s),\ \dot\beta(s),\ \ddot\beta(s)\right) = 0$ – уравнение касательной плоскости. Вдоль прямолинейных образующих касательная плоскость постоянна (не зависит от v).

№ 14. $v = \operatorname{tg} u + c$.

№ 16. $(1 + a^2x^2)y^2 = C_1$, $(1 + a^2y^2)x^2 = C_2$.

№ 18. Уравнения нормальной плоскости: $\begin{cases} x = u - 2ut, \\ y = v - 2vt, \\ z = u^2 + v^2 + t. \end{cases}$

№ 19. $x\cos u\cos v + y\cos u\sin v + z\sin u - a = 0$ – уравнение касательной плоскости.

№ 20. $\arccos\dfrac{\left|a^2-b^2\right|}{a^2+b^2}$.

№ 21. $\arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

№ 22. $2\pi^2 R^3$.

№ 23. $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

№ 24. $v = \pm\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C$.

№ 25. $\left[\mathbf{I}_p\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{R^2-\rho^2} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$.

6. ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – гиперповерхность, $f_{u^1}, \ldots, f_{u^n}$ – стандартный базис касательного пространства $T_p f$. Векторное поле $N(p) = \dfrac{f_{u^1} \times \ldots \times f_{u^n}}{\left| f_{u^1} \times \ldots \times f_{u^n} \right|}$, $p \in U$ называется **нормальным гауссовым полем**. Отображение $N : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ является гладким. Образ дифференциала нормального гауссового поля лежит в касательном пространстве $\left(d_p N\left(\overrightarrow{\mathbb{R}}^n\right) \subseteq T_p f \right)$.

Основным оператором гиперповерхности f в точке p называется оператор $L_p = - d_p N \circ [d_p f]^{-1}$ касательного пространства $T_p f$. Отсюда, в частности, следует, что $L_p(f_{u^i}) = - N_{u^i}$. Если X – касательный вектор, $X = \dot{\beta}$ для кривой $\beta = f \circ \alpha$ на гиперповерхности, где $\alpha\colon I \to U$ – гладкая регулярная кривая, $p = \alpha(t_0)$, то

$$L_p(X) = -\frac{\partial N}{\partial \dot{\alpha}} = -N\left(\alpha\left(t\right)\right)^{\bullet}\Big|_{t = t_0}$$

Следовательно, образ касательного вектора X при действии основного оператора – это производная вектора N по направлению касательного вектора $\dot{\alpha}$ в точке p, взятая с отрицательным знаком.

Пусть $X,\ Y \in T_p f$, тогда билинейная форма $\mathbf{II}_p(X, Y)$, определенная на $T_p f$ равенством $\mathbf{II}_p\left(X, Y\right) = \left\langle L_p\left(X\right), Y\right\rangle$, называется **второй фундаментальной формой** гиперповерхности. Коэффициенты матрицы $[\mathbf{II}_p]$ второй фундаментальной формы вычисляются по следующей формуле:

$$h_{ij} = -\left\langle N_{u^i}, f_{u^j} \right\rangle = \left\langle N, f_{u^i u^j} \right\rangle.$$

Таким образом, если

$$\left[X\right]_{f_u} = {}^t\left(du^1, ..., du^n\right),\ \left[Y\right]_{f_u} = \left(dv^1, ..., dv^n\right),$$

то

$$\mathbf{II}_p\left(X, Y\right) = {}^t\left[X\right]_{f_u}\left[\mathbf{II}_p\right]\left[Y\right]_{f_u} = \sum_{i,\,j=1}^{n} h_{ij}du^i dv^j.$$

Основной оператор L_p гиперповерхности f самосопряжен. Следовательно, его собственные значения $k_1, k_2, ..., k_n$ вещественны, и существует ортогональный базис $X_1, X_2, ..., X_n$ из соответствующих им собственных векторов. Значения $k_1, k_2, ..., k_n$ называются главными кривизнами, а векторы $X_1, X_2, ..., X_n$ – главными направлениями. Матрица основного оператора равна $[L_p] = [\mathbf{I}_p]^{-1}[\mathbf{II}_p]$. Главные кривизны находятся из уравнения $\det([\mathbf{II}_p] - k[\mathbf{I}_p]) = 0$, а соответствующие им главные направления – из системы линейных однородных уравнений $([\mathbf{II}_p] - k[\mathbf{I}_p])X = 0$.

Полной гауссовой кривизной гиперповерхности называется число $K = \det[L_p] = \dfrac{\det\left[\mathbf{II}_p\right]}{\det\left[\mathbf{I}_p\right]}$. Кроме того, $K = k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$.

Средней кривизной гиперповерхности называется число $H = \dfrac{1}{n}\operatorname{tr}\left[L_p\right]$. Кроме того, $H = \dfrac{1}{n}\left(k_1 + k_2 + ... + k_n\right)$.

Образ $\beta = f \circ \alpha$ кривой $\alpha: I \to U$ на гиперповерхности $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется *линией кривизны*, если для любого $t \in I$ касательный вектор $\dot\beta(t)$ является главным направлением (векторы $L_p\left(\dot\beta\right)$ и $\dot\beta$ коллинеарны). Образ кривой $\beta(t) = {}^t(u(t), v(t))$ на гиперповерхности $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ является линией кривизны, если выполняется равенство $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$

Вектор $X \in T_p f$ называется *асимптотическим* на гиперповерхности f в точке p, если вектор $L_p(X)$ перпендикулярен вектору X, т. е. $\mathbf{II}_p(X, X) = 0$.

Образ $\beta = f \circ \alpha$ кривой $\alpha \colon I \to U$ на гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется *асимптотической линией*, если для любого $t \in I$ касательный вектор $\dot{\beta}(t)$ является асимптотическим. Образ кривой $\beta(t) = {}^t(u(t),\ v(t))$ на гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ является асимптотической линией, если выполняется равенство: $h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = 0$. Если поверхность минимальна, т. е. $H = 0$, то ее асимптотические линии перпендикулярны.

Для гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ точка $f(p)$ ($p \in I$) называется *эллиптической*, если в этой точке $K = k_1k_2 > 0$; *гиперболической*, если $K = k_1k_2 < 0$; *параболической*, если $K = 0$, $H \neq 0$, т. е. точно одна из главных кривизн k_1, k_2 равна нулю; *сингулярной*, если $K = H = 0$, т. е. $k_1 = k_2 = 0$.

Эллиптическая точка называется *омбилической*, если $k_1 = k_2$. Омбилические точки находятся из равенств

$$\frac{h_{11}(p)}{g_{11}(p)} = \frac{h_{12}(p)}{g_{12}(p)} = \frac{h_{22}(p)}{g_{22}(p)}.$$

Задача 6. Для прямого геликоида $f(u, v) = {}^t(u \cos v,\ u \sin v,\ av)$ найти в произвольной точке матрицы второй фундаментальной формы и основного оператора гиперповерхности, главные кривизны и главные направления, полную гауссову кривизну и среднюю кривизну, линии кривизны и асимптотические линии; определить тип произвольной точки.

Решение. В предыдущей задаче мы уже нашли векторы

$$f_u = {}^t(\cos v,\ \sin v,\ 0),\ f_v = {}^t(-u \sin v,\ u \cos v,\ a),$$

$$f_u \times f_v = {}^t(a \sin v,\ -a \cos v,\ u).$$

Найдем нормальное гауссово поле

$$N = \frac{f_u \times f_v}{|\, f_u \times f_v \,|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \left(a \sin v, -a \cos v, u \right).$$

Коэффициенты h_{ij} матрицы второй фундаментальной формы можно вычислять либо по формуле $h_{ij} = -\left\langle N_{u^i}, f_{u^j} \right\rangle$, либо по формуле $h_{ij} = \left\langle N, f_{u^i u^j} \right\rangle$. Но вычислять N_u, N_v сложно, поэтому будем пользоваться второй формулой. Для этого найдем $f_{uu} = \vec{0}$, $f_{uv} = f_{vu} = {}^t(-\sin v, \cos v, 0)$, $f_{vv} = {}^t(-u \cos v, -u \sin v, 0)$. Следовательно, $h_{11} = \left\langle N, f_{uu} \right\rangle = 0$, $h_{12} = h_{21} = \left\langle N, f_{uv} \right\rangle = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$, $h_{22} = \left\langle N, f_{vv} \right\rangle = 0$. Таким образом, матрица второй фундаментальной формы равна

$$\left[\mathbf{II}_p \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица основного оператора гиперповерхности будет равна

$$\left[L_p \right] = \left[\mathbf{I}_p \right]^{-1} \left[\mathbf{II}_p \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{\left(u^2 + a^2\right)^3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем главные кривизны k_1, k_2 из уравнения $\det([\mathbf{II}_p] - k\,[\mathbf{I}_p]) = 0$.

Вычислим

$$\det\left(\left[\mathbf{II}_p\right]-k\left[\mathbf{I}_p\right]\right)=\begin{vmatrix} -k & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & -k\left(u^2+a^2\right) \end{vmatrix}=k^2\left(u^2+a^2\right)-\frac{a^2}{u^2+a^2}.$$

Решая уравнение относительно k, найдем $k_{1,2}=\pm\dfrac{a}{u^2+a^2}$.

Найдем главные направления X_1, X_2, решая систему однородных линейных уравнений $([\mathbf{II}_P]-k\,[\mathbf{I}_p])X=0$, подставляя вместо k значения k_1, k_2. При $k=k_1$ имеем систему

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{u^2+a^2}x_1-\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}x_2=0, \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}x_1-ax_2=0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы получено из второго умножением на $\dfrac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}$. Следовательно, система равносильна второму уравнению: $-\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}x_1-ax_2=0$. Откуда $x_1=-\sqrt{u^2+a^2}\cdot x_2$. Находим фундаментальную систему решений – вектор $X_1={}^t\left(-\sqrt{u^2+a^2},1\right)$ Этот вектор и есть главное направление, соответствующее главной кривизне k_1. Аналогично находим вектор $X_2={}^t\left(\sqrt{u^2+a^2},1\right)$ – главное направление, соответствующее главной кривизне k_2.

Проверка. Главные направления должны быть перпендикулярны. Действительно,

$$\mathbf{I}_p\left(X_1,X_2\right)={}^t\left[X_1\right]\left[\mathbf{I}_p\right]\left[X_2\right]=$$
$$=-\sqrt{u^2+a^2}\cdot\sqrt{u^2+a^2}+\left(u^2+a^2\right)\cdot 1=0.$$

Найдем полную гауссову кривизну

$$K = \det\left[L_p\right] = \frac{\det\left[\mathbf{II}_p\right]}{\det\left[\mathbf{I}_p\right]} = -\frac{a^2}{\left(u^2 + a^2\right)^2}$$

и среднюю гауссову кривизну $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[L_p\right] = 0.$

Проверка. $K = k_1 k_2 = -\frac{a^2}{\left(u^2 + a^2\right)^2}$, $H = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) = 0.$

Найдем линии кривизны поверхности из дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. из уравнения

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению $a\sqrt{u^2 + a^2}\,dv^2 - \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}du^2 = 0$ или двум дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными $dv = \pm\frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}du.$ Следовательно, линии $v = \pm\ln\left|\, u + \sqrt{u^2 + a^2} \,\right| + C$ задают линии кривизны на поверхности.

Проверка. Для линий кривизны $\beta_{1,\,2}(u) = f\,(\alpha_{1,\,2}(u))$, где $\alpha_{1,2}(u) = {}^t\!\left(u,\ \pm\ln\left|\,u+\sqrt{u^2+a^2}\,\right| + C\right)$, справедливо равенство

$$\left[d\,\beta_{1,2}\right]_{f_u} = \left[d\,\alpha_{1,2}\right]_e = {}^t(du, dv) = {}^t\!\left(du,\ \pm\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}\right).$$

А координаты главных направлений $\left[X_{1,2}\right]_{f_u} = {}^t\!\left(\mp\sqrt{u^2+a^2}, 1\right)$.

Очевидно, векторы $d\beta_1$ и X_2, $d\beta_2$ и X_1 коллинеарны. Таким образом, кривые $\alpha_{1,\,2}(u)$ действительно задают линии кривизны.

Найдем асимптотические линии из уравнения

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}\,dudv + h_{22}dv^2 = 0,$$

т. е. из уравнения $-2\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv = 0.$

Из последнего уравнения следует, что $du = 0$ или $dv = 0$, т. е. $u = u_0$, $v = v_0$ для некоторых констант $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Таким образом, асимптотическими линиями являются u-линии и v-линии.

Проверка. Касательными векторами к u-линиям, v-линиям являются векторы f_u, f_v, т. е. f_u, f_v – асимптотические направления. Поскольку поверхность является минимальной ($H = 0$), асимптотические направления должны быть перпендикулярны. Действительно, $\left\langle f_u, f_v\right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$.

Полная гауссова кривизна $K = -\dfrac{a^2}{\left(u^2+a^2\right)^2}$ отрицательна для произвольной точки поверхности. Следовательно, все точки поверхности гиперболические.

Ответ. $\left[\mathbf{II}_p\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix};$

$$\left[L_p\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{\left(u^2+a^2\right)^3}} & 0 \end{pmatrix};$$

$$k_{1,2} = \pm\frac{a}{u^2+a^2},\; X_{1,2} = {}^t\!\left(\mp\sqrt{u^2+a^2}, 1\right);\; K = -\frac{a^2}{\left(u^2+a^2\right)^2};\, H = 0;$$

линии $v = \pm\ln\left|\, u + \sqrt{u^2+a^2}\, \right| + C$ задают линии кривизны; асимптотические линии – это u-линии, v-линии; все точки поверхности гиперболические.

Задания

1. Найдите линии кривизны параболоида вращения $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2}$.

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(au\cos v, au\sin v, u^2).$$

2. Найдите линии кривизны произвольной цилиндрической поверхности, т. е. поверхности $f(u, v) = \alpha(u) + v\vec{b}$, где $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\vec{b} = \mathrm{const}$, $\vec{b} \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$.

Указание. Докажите, что прямолинейная образующая является линией кривизны; при этом можно считать, что α – кривая единичной скорости и $\left|\vec{b}\right| = 1$.

3. Докажите, что на плоскости и сфере любая линия является линией кривизны.

Указание. Докажите, что на плоскости и сфере главные кривизны в каждой точке равны ($k_1 = k_2$).

4. Вычислите главные кривизны поверхности $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ в точке $M(0, 0, 0)$.

Указание. Примените параметризацию

$$f(u,v) = {}^t\left(u, v, \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{p} + \frac{v^2}{q}\right)\right).$$

5. Найдите асимптотические линии катеноида

$$f(u, v) = {}^t(\mathrm{ch}\, u \cos v, \mathrm{ch} u \sin v, u).$$

6. Покажите, что кривая $\alpha(t) = {}^t\left(\frac{2}{1+t}, \frac{2}{1-t}, t\right)$ является асимптотической линией поверхности $z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

Указание. Найдите асимптотические линии этой поверхности, применив параметризацию

$$f(u,v) = {}^t\left(u, v, \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2}\right),$$

и покажите, что данная кривая α – одна из них.

7. Найдите полную кривизну произвольной поверхности вращения $f(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$, где $x(u) > 0$, с осью вращения Oz.

8. Покажите, что u-линии, v-линии поверхности

$$f(u, v) = {}^t(3u - u^3 + 3uv^2, v^3 - 3u^2v - 3v, 3(u^2 - v^2))$$

являются линиями кривизны.

9. Найдите омбилические точки на параболоиде вращения

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}.$$

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(au \cos v, au \sin v, u^2).$$

Используйте, что в омбилических точках $k_1 = k_2$.

10. Исследуйте характер точек на поверхности, полученной вращением синусоиды $y = \sin x$ $(x \neq k\pi)$ вокруг оси Oy.

11. Найдите омбилические точки на эллипсоиде вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a > c.$$

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u).$$

Используйте, что в омбилических точках $k_1 = k_2$.

12. Исследуйте характер точек на поверхности $x + y = z^3$.

Указание. Применив параметризацию $f(u, v) = {}^t(v, u^3 - v, u)$, докажите, что $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$ при $y \neq -x$ и $k_1 = k_2 = 0$ при $y = -x$.

13. Исследуйте характер точек на эллиптическом конусе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ без вершины.

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(au \cos v, bu \sin v, cu)$$

и докажите, что $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$.

14. Исследуйте характер точек на поверхности, полученной вращением линии $y = \ln x$ ($x > 0$, $x \neq 1$) вокруг оси Ox.

15. Найдите полную кривизну параболоида вращения $z = x^2 + y^2$.

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, u^2).$$

16. Исследуйте характер точек на поверхности, полученной вращением линии $y = \sin x$ ($x \neq k\pi$) вокруг оси Ox.

17. Исследуйте характер точек на поверхности, полученной вращением линии $y = \ln x$ ($x > 0$) вокруг оси Oy.

18. Исследуйте характер точек на гиперболическом параболоиде

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v)={}^t\left(u, v, \frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right).$$

19. Прямая перемещается параллельно плоскости xOy, пересекая ось Oz и линию $\alpha(u) = {}^t(u, u^2, u^3)$. Докажите, что u-линии, v-линии поверхности, описываемой этой прямой, являются асимптотическими.

Указание. Покажите, что $f(u, v) = \alpha(u) + v\alpha^*(u)$, где $\alpha^*(u)$ – проекция кривой $\alpha(u)$ на плоскость xOy, является параметризацией искомой поверхности.

20. Найдите линии кривизны произвольной поверхности вращения.

21. Найдите среднюю кривизну круглого цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a\cos v, a\sin v, u).$$

22. Найдите главные кривизны в вершинах двуполостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v, b \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v, c \operatorname{sh} u).$$

23. Найдите полную кривизну двуполостного гиперболоида вращения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \operatorname{sh} u \cos v, a \operatorname{sh} u \sin v, c \operatorname{ch} u).$$

24. Найдите полную кривизну эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a\cos u \cos v, a\cos u \sin v, c\sin u).$$

25. Найдите полную кривизну однополостного гиперболоида вращения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \operatorname{ch} u \cos v,\ a \operatorname{ch} u \sin v,\ c \operatorname{sh} u).$$

Ответы

№ 1. Линиями кривизны являются u-линии, v-линии.

№ 2. Прямолинейные образующие и ортогональные им плоские сечения.

№ 4. $k_1 = \dfrac{1}{p}, k_2 = \dfrac{1}{q}$.

№ 5. $u \pm v = C$.

№ 7. $K = \dfrac{\dot z \begin{vmatrix} \dot x & \ddot x \\ \dot z & \ddot z \end{vmatrix}}{x\left(\dot x^2 + \dot z^2\right)^2}$.

№ 9. Вершина параболоида.

№ 10. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Точки поверхности при

$$x \in \left(-\pi - \pi n, -\frac{\pi}{2} - \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right)$$

эллиптические, при

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} - \pi n, -\pi n\right) \cup \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$$

гиперболические, а при $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + \pi n$ параболические.

№ 11. $M_{1,2}(0, 0, \pm c)$.

№ 12. Точки поверхности при $y \neq -x$ параболические, точки при $y = -x$ сингулярные.

№ 13. Все точки поверхности параболические.

№ 14. При $x > 1$ точки поверхности эллиптические, при $0 < x < 1$ гиперболические.

№ 15. $K = \dfrac{4}{\left(1+4u^2\right)^2}$.

№ 16. Все точки поверхности эллиптические.

№ 17. Все точки поверхности гиперболические.

№ 18. Все точки поверхности гиперболические.

№ 20. Параллели и меридианы.

№ 21. $H = \dfrac{1}{2a}$.

№ 22. $k_1 = a/b^2$, $k_2 = a/c^2$.

№ 23. $K = \dfrac{c^2}{\left(a\,\mathrm{ch}^2\,u + c^2\,\mathrm{sh}^2\,u\right)^2}$.

№ 24. $K = \dfrac{c^2}{\left(a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u\right)^2}$.

№ 25. $K = -\dfrac{c^2}{\left(a^2\,\mathrm{sh}^2\,u + c^2\,\mathrm{ch}^2\,u\right)^2}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М. : Наука, 1970. 384 с.

2. *Сборник* задач по дифференциальной геометрии / под ред. А. С. Феденко. М. : Наука, 1979. 272 с.

3. *Сизый С. В.* Лекции по дифференциальной геометрии. М. : Физматлит, 2007. 376 с.

Учебное издание

Нагребецкая Юлия Вацлавовна
Перминова Ольга Евгеньевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практикум

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Е. И. Маркина*
Корректор *Е. И. Маркина*
Компьютерная верстка *Г. Б. Головина*

План изданий 2017 г. Подписано в печать 23.06.17.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 3,2. Усл. печ. л. 4,19. Тираж 50 экз. Заказ 81.

Издательство Уральского университета
620000, Екатеринбург-83, ул. Тургенева, 4.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург-83, ул. Тургенева, 4.
Тел.: + (343) 350-56-64, 350-93-22
Факс +7 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru
http://print.urfu.ru