Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 31

1. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 12 & 9 & -12 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix}$. (2 балла)

2. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $5x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

3. Привести уравнение квадрики $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла)

4. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(11 + 2t)x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_3^2 + (16 + 2t)x_1x_2 + (6 + 2t)x_1x_3 + 6x_2x_3$ положительно определена.

5. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в аффинном пространстве $\mathbb{R}^5$, если в стандартном репере $A(3, 5, 3, 5, 3)$, $B(7, 5, 5, 5, 7)$, $C(6, 8, 6, 8, 6)$. Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A. (2 балла)

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (2, -2, -1, 1)$, $a_2 = (5, -3, -2, -4)$, $a_3 = (3, -3, -2, -4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (1, 1, -13, -3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, -1, 1)$, $a_2 = (5, -3, -2, -4)$, $a_3 = (4, -3, -2, -4)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 32

1. Найти площадь треугольника ABC в аффинном пространстве $\mathbb{R}^5$, если в стандартном репере $A(1,3,1,3,1)$, $B(5,3,3,3,5)$, $C(4,6,4,6,4)$. Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A. (2 балла)

2. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 10x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_1x_4 - 8x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz - 6x + 6y + 6z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла).

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(3+2t)x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - (4+2t)x_1x_2 - (2+2t)x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,1,2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-3,0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1,1,2,2),\ a_2 = (2,2,3,1),\ a_3 = (1,1,3,1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-8,-11,10,6)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1,2,1,2)^\top$, $[a_2]_B = (2,1,2,1)^\top$. (2

балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, 2),\ a_2 = (2, 2, 3, 1),\ a_3 = (1, 1, 3, 1)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (-4, -2, 1, 0),\ e_3 = (-6, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 33

1. Параллелотоп в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ построен на векторах $\vec{a}_1 = (0,2,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,-2,0,3)$, $\vec{a}_3 = (2,2,1,-1)$, $\vec{a}_4 = (3,2,2,5)$, отложенных от точки $p_0(3,1,0,1)$. Проверить, лежит ли точка $q(4,2,1,5)$ внутри или вне этого параллелотопа. (2 балла)

2. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла).

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(8+2t)x_1^2 + (7-2t)x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 - (8+2t)x_1x_3 + (8-2t)x_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,1,2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1,0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1,-1,1,1)$, $a_2 = (1,-3,4,-2)$, $a_3 = (1,-2,3,-2)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-5,1,9,1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1,2,1,2)^\top$, $[a_2]_B = (2,1,2,1)^\top$. (2

балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, -5, 1, 1),\ a_2 = (1, -3, 4, -2),\ a_3 = (1, -2, 3, -2)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (2, 2, -1, 0),\ e_3 = (0, -1, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 34

1. Параллелотоп в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ построен на векторах $\vec{a}_1 = (0, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 1, -1)$, $\vec{a}_4 = (3, 2, 2, 5)$, отложенных от точки $p_0(3, 1, 0, 1)$. Найти длину высоты этого параллелотопа, опущенной из конца вектора $\vec{a}_4$ на грань $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. (2 балла)

2. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $6x_1^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла).

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(24 + 2t)x_1^2 + (7 - 2t)x_2^2 + (3 + 2t)x_3^2 + 16x_1x_2 + 4tx_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1, 1, -2, 2)$, $a_2 = (2, 0, -3, 3)$, $a_3 = (3, -1, -4, 0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (6, -8, 2, 8)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2

балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 1, -7, 2),\ a_2 = (2, 5, -3, 3),\ a_3 = (3, -1, -4, 1)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, -2, 0),\ e_2 = (-1, 1, 2, 0),\ e_3 = (0, -3, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 35

1. Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ точку B, симметричную точке $A(7,4,-10,5)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(3,1,0,1)$, $\vec{a}_1 = (0,2,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,-2,0,3)$, $\vec{a}_3 = (2,2,1,-1)$. (2 балла)

2. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 - 8x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $x^2 + 7y^2 + z^2 - 8xy + 16xz + 8yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла)

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(24+2t)x_1^2 + 3x_2^2 + (4+2t)x_3^2 + (2t-8)x_1x_2 + (16+4t)x_1x_3 + 2tx_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,-1,2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1,0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1,-1,0,-1)$, $a_2 = (0,-2,-1,-4)$, $a_3 = (-3,-1,-2,-5)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-1,1,3,-5)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама
$G_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1,2,1,2)^\top$, $[a_2]_B = (2,1,2,1)^\top$. (2 балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, 1, 1)$, $a_2 = (5, 3, -7, -4)$, $a_3 = (4, -3, -2, -1)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 2, 0)$, $e_2 = (2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, -1, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 36

1. Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ пересечение двумерных плоскостей $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2$ и $x = q_0 + t_1\vec{a}_3 + t_2\vec{a}_4$, где $p_0(3,1,0,1)$, $\vec{a}_1 = (1,0,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,0,0)$, $q_0(2,1,1,3)$, $\vec{a}_3 = (1,1,1,1)$, $\vec{a}_4 = (1,-1,1,-1)$. (2 балла)

2. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 11y^2 + 2z^2 - 16xy - 20xz + 4yz + 2x + 10y - 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла).

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $(7-2t)x_1^2 + 3x_2^2 + (4-2t)x_3^2 + (2t-8)x_1x_2 + (4t-8)x_1x_3 + (4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,-1,2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,-1,1,2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (0,1,0,0)$, $a_2 = (-1,2,1,0)$, $a_3 = (-1,1,1,0)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-2,1,0,1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1,2,1,2)^\top$, $[a_2]_B = (2,1,2,1)^\top$. (2 балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, -2, 2)$, $a_2 = (-2, 2, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, -3, 1)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, -6, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 37

1. Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ расстояние от точки $A(7,4,-10,5)$ до гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(3,1,0,1)$, $\vec{a}_1 = (5,3,1,2)$, $\vec{a}_2 = (1,-2,0,3)$, $\vec{a}_3 = (2,2,1,-1)$. (2 балла)

2. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $x^2 + 10y^2 - 2z^2 - 20xy + 28xz + 8yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла).

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $7x_1^2 + 3x_2^2 + (4-2t)x_3^2 + (2t-6)x_1x_2 + (2t-4)x_1x_3 + (4-2t)x_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1,0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1,2,-1,-1)$, $a_2 = (3,0,-2,-5)$, $a_3 = (3,-2,-1,-7)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-5,1,9,1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1,2,1,2)^\top$, $[a_2]_B = (2,1,2,1)^\top$. (2 балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 5, 1, 1)$, $a_2 = (1, 3, 4, -2)$, $a_3 = (1, 2, 3, -2)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -2, 0, 0)$, $e_2 = (0, 4, -1, 0)$, $e_3 = (0, -3, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре
Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение
Вариант № 38

1. Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ точки пересечения сферы $|x-p| = 6$, где $p(13,3,7,13)$ и прямой, проходящей через точки $A(1,3,1,1)$, $B(5,3,3,5)$. (2 балла)

2. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 8x_2x_3 - 2x_2x_4 + 6x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $-7x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 4xy + 20xz + 16yz + 10x + 2y + 2z - t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла).

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $18x_1^2 + 7x_2^2 + (4+2t)x_3^2 + (18+2t)x_1x_2 - (12+2t)tx_1x_3 - (8+2t)x_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, 1, -1, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1, 0)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (2, 0, 1, 1)$, $a_2 = (2, 0, 1, -4)$, $a_3 = (2, 0, 1, -9)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (2, 1, 3, -3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 7 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 2, 1, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, 1, 2, 1)^\top$. (2 балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1,1,7,2)$, $a_2 = (2,5,3,3)$, $a_3 = (3,-1,4,1)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1,0,-1,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 39

1. Аффинное преобразование $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^3$ переводит точки $A(1,2,3)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,1,3)$, $D(0,1,7)$ в точки $A'(2,7,6)$, $B'(1,10,8)$, $C'(-2,4,2)$, $D'(-5,14,8)$ соответственно. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти образ точки $q(2,-1,4)$ при этом отображении. (2 балла)

2. Найти канонический ортонормированный базис и матрицу ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 10x_2x_4 - 10x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $5x^2 + 14y^2 - z^2 - 28xy + 32xz + 4yz + 2x - 2y + 10z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла)

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3,1,1,2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (1,1,2,-2)$, $a_2 = (2,-1,1,-4)$, $a_3 = (1,-1,1,-4)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (7,-13,11,3)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3,2,3,2)^\top$, $[a_2]_B = (2,-1,2,-1)^\top$. (2

балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (2, -2, -1, -1)$, $a_2 = (5, -3, -2, 4)$, $a_3 = (4, -3, -2, 4)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)

Домашнее задание № 2 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 40

1. Изометрия $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^2$, сохраняющая ориентацию, переводит точку $(1,0)$ в точку $(0,0)$, а точку $(0,1)$ в точку $(\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти также неподвижную точку этой изометрии. (2 балла)

2. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. (2 балла)

3. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому и к нормальному виду. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

4. Привести уравнение квадрики $7x^2 + y^2 + z^2 - 8xy - 8xz - 16yz + 10x + 2y + 2z + t = 0$ к каноническому виду и определить ее тип в зависимости от значения параметра t. (2 балла).

5. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Проверить, что векторы $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0)$ и $a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3, -1, 1, 2)$ образуют ортонормированную систему и дополнить ее до ортонормированного базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Дано подпространство U, линейного пространства $\mathbb{R}^4$ порожденное векторами $a_1 = (-1, 0, -1, 1),\ a_2 = (-2, 0, -1, 1),\ a_3 = (-3, 0, 1, 1)$.

а) Применив процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортонормированный базис U.

б) Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$.

в) Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x = (-4, 1, 0, -1)$ относительно подпространства U.

г) Найти длину вектора x и угол, который он образует с подпространством U. (3 балла)

9. Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (3, 2, 3, 2)^\top$, $[a_2]_B = (2, -1, 2, -1)^\top$. (2 балла)

10. Найти обобщенное векторное произведение векторов $a_1 = (1, 3, 2, -2)$, $a_2 = (2, 2, 3, -1)$, $a_3 = (1, 1, 3, -1)$.

11. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = (1, -3, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу Грама указанного базиса и матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. (2 балла)