Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 31

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -4 & -4 & -4 & 2 \\ -6 & 12 & 8 & 2 & 10 & -4 \\ -4 & 8 & 12 & -12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов
$a_1 = (2, 2, 5, -6, -5)$, $a_2 = (3, -9, 3, 7, 2)$, $a_3 = (1, -9, 7, -2, 7)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (6, 3, -7, 8, -6)$, $a_2 = (4, 3, 6, 2, -2)$, $a_3 = (4, 1, 1, -5, 6)$, $a_4 = (18, 12, 11, 14, -12)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 5×2, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 4k + 1$, $j = 3m + 2$ $(k, m = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, 8, 3, -4, 2)$, $a_2 = (1, 8, 7, -2, 5)$, $a_3 = (4, 7, 14, -5, 11)$, $a_4 = (-4, 18, 0, 2, -2)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 1. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 - 2x_6 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 8x_5 - 6x_6 = -7. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^5$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:
$a_1 = (6, -5, -8, -8, 3)$, $a_2 = (3, 7, 9, -5, -3)$, $a_3 = (9, -3, -5, 2, -6)$;
$b_1 = (6, -1, -6, 6, 4)$, $b_2 = (18, -2, -8, -11, -12)$.
Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C\cdot X\cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (5, 1, -3, 2)$, $a_2 = (1, 0, -3, 4)$, $a_3 = (3, 3, 4, 4)$, $a_4 = (-1, 3, 1, 0)$ в векторы $b_1 = (-20, -9, -11)$, $b_2 = (-7, -6, -1)$, $b_3 = (1, -47, 48)$, $b_4 = (-4, -11, 7)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-1, 4, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 4, 1)$ и $f_1 = (1, -4, -3)$, $f_2 = (0, 1, 2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. (3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 32

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (7, -5, 3, -5, -8)$, $a_2 = (5, -9, -1, 6, -3)$, $a_3 = (3, -4, 7, 1, -2)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (5, -4, -5, 5, -3)$, $a_2 = (4, -6, 5, -5, 5)$, $a_3 = (7, 6, -5, 4, 3)$, $a_4 = (-10, -18, 15, -13, -1)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 10, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $3k+1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (5, -4, -5, 5, -3)$, $a_2 = (4, -6, 5, -5, 5)$, $a_3 = (11, 0, 0, -1, 8)$, $a_4 = (-10, -18, 15, -13, -1)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 1. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 - 2x_4 - x_5 - x_6 = 4; \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = -2; \\ -8x_1 - 8x_2 - 7x_3 + x_4 + 3x_6 = -14. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^5$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:
$a_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 4, -1, 7, -7)$, $a_3 = (9, 8, 4, -2, 6)$;
$b_1 = (8, 4, -8, 6, 1)$, $b_2 = (10, 12, 6, 10, -1)$.
Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (0, -3, -3, 0)$, $a_2 = (-2, -5, 2, -3)$, $a_3 = (-4, 1, -1, -1)$, $a_4 = (-2, 2, -1, 0)$ в векторы $b_1 = (0, 12, 0)$, $b_2 = (13, -19, 0)$, $b_3 = (0, -14, 0)$, $b_4 = (-3, -5, 0)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (3, 0, 1, 0)$, $e_4 = (-4, 4, 1, 1)$ и $f_1 = (1, -2, -1)$, $f_2 = (0, 1, -2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. (3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 33

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & -4 & -4 & 3 & -4 \\ 10 & -12 & 16 & 8 & -20 & 10 \\ 6 & -13 & 12 & 4 & -17 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов

$a_1 = (5, 2, 3, 1, 6)$, $a_2 = (2, -9, 7, 6, -3)$, $a_3 = (1, -4, -3, 2, -4)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (1, 4, -2, 0, 7)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 10×5, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 2k + 1$, $j = 5m + 2$ $(k, m = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (7, 2, 14, -2, 3)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (1, 4, -2, 0, 7)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 3x_2 + 3\alpha x_3 + 3x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 1. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ -2x_1 + x_2 - x_4 - x_5 + x_6 = -5; \\ -x_3 + x_4 - x_6 = -1; \\ 6x_1 - 7x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 5x_6 = 9. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1, 2, -3, -3)$, $a_2 = (2, -3, 2, -3)$, $a_3 = (1, 2, -2, 1)$;

$b_1 = (-1, 1, -2, 2)$, $b_2 = (2, -3, -5, -2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (1, 1, 0, 3)$, $a_2 = (0, 1, 4, -1)$, $a_3 = (2, 0, -2, 3)$, $a_4 = (-1, 3, -3, -2)$ в векторы $b_1 = (0, -1, 1)$, $b_2 = (8, -1, 9)$, $b_3 = (-5, -5, 0)$, $b_4 = (8, 2, 6)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 4, 1, 0)$, $e_4 = (0, 3, -4, 1)$ и $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 4)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. (3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 34

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 10 & -2 \\ 4 & 8 & 6 & 1 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (2, -5, 3, 8, 9)$, $a_2 = (7, -2, 2, 4, -2)$, $a_3 = (4, 1, 7, -9, -1)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (1, 6, -7, 4, -9)$, $a_2 = (1, -7, 9, -7, 2)$, $a_3 = (5, -4, 8, 1, 1)$, $a_4 = (2, -1, 2, -3, -7)$, $a_5 = (-4, -3, 1, -8, 1)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 8, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $5k + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, 6, -7, 4, -9)$, $a_2 = (1, -7, 9, -7, 2)$, $a_3 = (6, -11, 17, -6, 3)$, $a_4 = (2, -1, 2, -3, -7)$, $a_5 = (-4, -3, 1, -8, 1)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 - x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + 3\alpha x_3 + 2x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 1. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_4 = -2; \\ -2x_1 - x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 2; \\ -x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 3; \\ -4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 + 2x_6 = 1. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:
$a_1 = (1, -2, -1, 1)$, $a_2 = (1, -1, -2, -2)$, $a_3 = (1, -3, 1, 2)$;
$b_1 = (1, -2, -2, -1)$, $b_2 = (3, -4, 2, -3)$.
Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-4, 2, -3, 3)$, $a_2 = (0, 4, -1, 0)$, $a_3 = (3, 2, -3, 0)$, $a_4 = (-2, 4, 3, -1)$ в векторы $b_1 = (31, -32, 63)$, $b_2 = (13, -7, 20)$, $b_3 = (-3, -2, -1)$, $b_4 = (15, 2, 13)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (4, 1, 0, 0)$, $e_3 = (4, -4, 1, 0)$, $e_4 = (2, 3, 3, 1)$ и $f_1 = (1, 3, 1)$, $f_2 = (0, 1, -4)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. (3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 35

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -2 & -1 & -4 \\ 7 & 2 & -6 & -8 & 10 & -2 \\ 11 & 10 & -3 & -7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (8, -8, 4, 8, 5)$, $a_2 = (9, 6, 8, -4, -7)$, $a_3 = (5, -7, -9, 5, 4)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (7, 6, -7, -4, -4)$, $a_2 = (2, 1, -7, 4, -8)$, $a_3 = (7, -2, -8, -5, 8)$, $a_4 = (-17, 8, 10, 23, -40)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×5, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 2k + 1$, $j = 4m + 2$ $(k, m = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (7, 6, -7, -4, -4)$, $a_2 = (9, -1, -15, -1, 0)$, $a_3 = (7, -2, -8, -5, 8)$, $a_4 = (-17, 8, 10, 23, -40)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 3x_2 + 2\alpha x_3 + 3x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 1. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = -3; \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -3; \\ -x_2 + x_3 - 2x_5 - x_6 = -1; \\ -2x_1 - 7x_2 - 3x_4 - 3x_5 - 3x_6 = 3. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:
$a_1 = (1, -2, -2, 1)$, $a_2 = (1, 3, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, -2, 2)$;
$b_1 = (2, -2, -2, -1)$, $b_2 = (1, 2, -1, 1)$.
Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot C^\top$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 4 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. (3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, 1, 2, 0)$, $a_2 = (4, 2, 1, 2)$, $a_3 = (0, 1, 3, -1)$, $a_4 = (-2, -2, 2, -3)$ в векторы $b_1 = (1, 8, 0)$, $b_2 = (-13, -19, 0)$, $b_3 = (1, -6, 0)$, $b_4 = (12, 7, 0)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (4, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-3, 0, 1, 0)$, $e_4 = (-4, 1, -3, 1)$ и $f_1 = (1, 1, -4)$, $f_2 = (0, 1, 2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. (3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 36

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов

$a_1 = (6, -1, -6, -8, -3)$, $a_2 = (4, -4, -3, -4, -9)$, $a_3 = (4, -2, 3, 4, 3)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (10, 1, 3, -5, 7)$, $a_5 = (1, 4, -2, 0, 7)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 9, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $5k + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (7, 2, 14, -2, 3)$, $a_4 = (10, 1, 3, -5, 7)$, $a_5 = (1, 4, -2, 0, 7)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 1. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 2x_6 = 10; \\ -2x_1 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = -8; \\ -x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 4; \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 5x_5 - 3x_6 = 48. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (2, -2, -3, -1)$, $a_2 = (1, 2, 2, 2)$, $a_3 = (1, 2, -2, 2)$;

$b_1 = (1, -1, 2, -1)$, $b_2 = (2, 2, 0, 3)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A}:\mathbb{R}^{2\times 2}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X=C\cdot X\cdot C^{\top}$, где $C=\begin{pmatrix}3&4\\6&5\end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix}0&-2&2&-2&2&1\\1&-3&3&-2&3&0\\2&-3&3&-2&3&-1\\1&-2&2&-2&3&0\\1&-1&1&-1&2&0\\1&-2&2&-2&2&0\end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix}0&-1&2&-1&0\\0&-3&3&-3&4\\0&-2&1&-2&4\\1&-3&3&-3&4\\1&-2&2&-2&3\end{pmatrix}$.

(3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1=(5,1,-2,0),\ a_2=(3,3,3,-1),\ a_3=(-3,4,1,-2),\ a_4=(2,0,-1,-3)$ в векторы $b_1=(-20,-3,-17),\ b_2=(-11,-6,-5),\ b_3=(-11,10,-21),\ b_4=(-13,-11,-2)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1=(1,0,0,0),\ e_2=(0,1,0,0),\ e_3=(4,4,1,0),\ e_4=(-1,-2,-1,1)$ и $f_1=(1,-3,3),\ f_2=(0,1,-4),\ f_3=(0,0,1)$.
(3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix}4&-2&0\\0&0&1\\6&-3&0\end{pmatrix}$.

Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 37

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & 4 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -12 & 4 & 7 & 20 \\ 8 & 2 & -9 & -4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (1, -5, -9, -1, -2)$, $a_2 = (7, 1, 3, 4, 6)$, $a_3 = (1, -1, 5, -4, -7)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (6, 5, 7, -6, -9)$, $a_2 = (2, 5, -8, 8, -4)$, $a_3 = (6, 5, -1, 5, -1)$, $a_4 = (-14, -5, -13, 1, -5)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 5×3, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 7k + 1$, $j = 5m + 2$ $(k, m = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (6, 5, 7, -6, -9)$, $a_2 = (2, 5, -8, 8, -4)$, $a_3 = (6, 5, -1, 5, -1)$, $a_4 = (-14, -5, -13, 1, -5)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3 - x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + x_2 + 3\alpha x_3 + x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 1. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_6 = -3; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -4; \\ -2x_1 - x_5 - x_6 = -2; \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_6 = -3. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:
$a_1 = (2, -1, 3, 2)$, $a_2 = (2, 2, -2, -1)$, $a_3 = (2, 2, 1, -2)$;
$b_1 = (-1, 2, -2, 1)$, $b_2 = (3, 3, 2, -2)$.
Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot C^{\top}$, где $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, -3, 3, -2)$, $a_2 = (3, -1, 0, -1)$, $a_3 = (3, -4, -3, 4)$, $a_4 = (2, 2, 2, -3)$ в векторы $b_1 = (9, 11, 2)$, $b_2 = (12, 3, -9)$, $b_3 = (6, -26, -32)$, $b_4 = (7, 18, 11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (3, 1, 1, 0)$, $e_4 = (-3, -2, -3, 1)$ и $f_1 = (1, 4, -2)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. (3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 38

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & 8 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ -7 & 4 & 3 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (8, 3, 3, 6, -2)$, $a_2 = (8, -4, 3, -6, 1)$, $a_3 = (5, 2, 1, -8, 9)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (5, -8, 1, 7, -4)$, $a_2 = (1, 2, -3, -8, -4)$, $a_3 = (1, -4, 1, -6, -4)$, $a_4 = (7, -4, -5, -9, -12)$, $a_5 = (-1, 10, -5, 4, 4)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 9, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $7k + 2$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (5, -8, 1, 7, -4)$, $a_2 = (1, 2, -3, -8, -4)$, $a_3 = (1, -4, 1, -6, -4)$, $a_4 = (6, 6, -10, -5, -8)$, $a_5 = (-1, 10, -5, 4, 4)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + 3\alpha x_3 + 2x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 3. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = -1; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -8; \\ -x_1 - 2x_3 - x_5 - x_6 = -5; \\ -8x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 - 4x_6 = -9. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:
$a_1 = (2, -3, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2, 2)$, $a_3 = (2, 2, -1, -2)$;
$b_1 = (2, 1, -2, 2)$, $b_2 = (5, 0, 5, 2)$.
Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot C^{\top}$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, 3, -3, -4)$, $a_2 = (4, -1, 3, -2)$, $a_3 = (-3, 0, 0, -1)$, $a_4 = (3, -4, 0, 4)$ в векторы $b_1 = (6, 9, -3)$, $b_2 = (-26, -14, -12)$, $b_3 = (3, 9, -6)$, $b_4 = (6, -5, 11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (4, 3, 1, 0)$, $e_4 = (1, 1, -3, 1)$ и $f_1 = (1, 4, -4)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. (3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 39

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 11 & 0 & -2 & -8 & 11 \\ -2 & 12 & 0 & -2 & -10 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов
$a_1 = (4, 2, 9, 6, -3)$, $a_2 = (-1, 6, -2, -8, -3)$, $a_3 = (3, 0, -3, -7, -9)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (5, 6, 7, -7, -7)$, $a_2 = (7, 2, 7, -6, -8)$, $a_3 = (5, -5, -7, -2, 8)$, $a_4 = (-3, 12, 21, -2, -24)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×5, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 3k + 1$, $j = 4m + 1$ $(k, m = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (5, -8, 1, 7, -4)$, $a_2 = (1, 2, -3, -8, -4)$, $a_3 = (7, 2, -9, -11, -12)$, $a_4 = (6, 6, -10, -5, -8)$, $a_5 = (-1, 10, -5, 4, 4)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 3. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_6 = 6; \\ x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 4; \\ -5x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 4. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:
$a_1 = (1, -1, -1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)$, $a_3 = (1, 1, -1, -2)$;
$b_1 = (1, 2, -2, -1)$, $b_2 = (3, -6, -2, -4)$.
Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C\cdot X\cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (1, 0, 3, 1)$, $a_2 = (-3, 0, 3, -2)$, $a_3 = (2, 2, 5, -4)$, $a_4 = (-4, 3, -1, 3)$ в векторы $b_1 = (17, 1, 16)$, $b_2 = (-11, -24, 13)$, $b_3 = (3, -8, 11)$, $b_4 = (-13, 4, -17)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-4, 3, 1, 0)$, $e_4 = (-2, 4, 3, 1)$ и $f_1 = (1, -1, 3)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. (3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Домашнее задание № 1 по линейной алгебре

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 40

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 14 & 4 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (7, -5, 3, -5, -8)$, $a_2 = (5, -9, -1, 6, -3)$, $a_3 = (3, -4, 7, 0, -2)$.

3. Будет ли система векторов $a_1 = (6, -5, -7, -6, -1)$, $a_2 = (6, -7, 0, 0, -8)$, $a_3 = (4, -3, 2, -8, 3)$, $a_4 = (2, -4, -2, 8, -11)$ линейно зависимой?

4. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 11, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $3k + 2$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность. (2 балла)

5. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (2, 2, -1, 1, 6)$, $a_2 = (5, 7, 3, 1, -1)$, $a_3 = (5, 6, 4, 7, -7)$, $a_4 = (12, 16, 5, 3, 4)$, $a_5 = (-5, -5, -5, -13, 13)$.

6. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна: (2 балла)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 3. \end{cases}$$

7. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 = 8; \\ -x_2 - 2x_4 - 2x_5 = 4; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 14; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 4x_5 - 8x_6 = 26. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

8. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:
$a_1 = (1, 2, 1, -3)$, $a_2 = (2, 1, 3, -2)$, $a_3 = (-3, -3, -2, -2)$;
$b_1 = (2, 1, 3, 2)$, $b_2 = (5, 2, -8, 4)$.
Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

9. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -4 & 3 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

11. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
(3 балла)

12. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (0, 3, 2, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 3)$, $a_3 = (3, 0, 4, -4)$, $a_4 = (1, -4, -3, -4)$ в векторы $b_1 = (20, -1, 21)$, $b_2 = (19, -2, 21)$, $b_3 = (0, 21, -21)$, $b_4 = (-23, 4, -27)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-4, 1, 0, 0)$, $e_3 = (1, -2, 1, 0)$, $e_4 = (2, -4, 4, 1)$ и $f_1 = (1, -3, -1)$, $f_2 = (0, 1, -2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.
(3 балла)

13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 \\ -9 & 8 & 0 \\ 9 & -7 & 1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.