

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ

Вариант № 1

1. Доказать по индукции, что  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ . Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Найти число различных 7-значных телефонных номеров.

3. Определить число слагаемых, являющихся рациональными числами, в разложении по биномиальной формуле  $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ .

4. Привести пример не всюду определенного, не функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 3-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c = d - b$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(2, 5)$ .

6. Проверить, что операция  $\circ$  на множестве всех целых чисел  $\mathbb{Z}$ , определенная с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так:  $x \circ y = x + y - xy$ , коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве  $\mathbb{Z}$  нейтральный элемент относительно этой операции?

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = -13; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 12; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 10; \\ -3x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_5 = -8. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x - 2$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 9 & 17 & 15 \\ -3 & 0 & 4 & 10 \\ 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} X = I.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 1 & 7 & 23 \\ 1 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(2+i)^3 - (1+2i)^2}{(1+i)^2 + (3+2i)^2}$ .

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $(2 - \sqrt{3} + i)^{30}$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $1 \leq |z - 2| < 2$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$ .

20. Вычислить  $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1}$ , где  $\varepsilon$ —корень  $n$ -й степени из 1.

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 2

1. Доказать по индукции, что  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$ .

Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательности точек и тире. Найти число различных букв, если последовательность содержит 3, 4 или 5 символов.

3. Найти коэффициент при  $x^8$  в разложении по биномиальной формуле  $(\frac{2}{x} + 3x^2)^{10}$ .

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c = b - d$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(2, 5)$ .

6. Проверить, что операция  $\circ$  на множестве всех рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , определенная с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так:  $x \circ y = x + y - xy$ , коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве  $\mathbb{Q}$  нейтральный элемент относительно этой операции?

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -1; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 1; \\ 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 9, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = -3x^3 + x^2 + 3x + 3$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 7 & 12 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -4 & -4 \\ -3 & -3 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & 0 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(1 + 2i)^3 - (2 - i)^2}{(1 - i)^2 + (1 - 2i)^2}$ .

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $(2 + \sqrt{3} + i)^{60}$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $2 \leq |z - 1| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$ .

20. Найти сумму  $\cos \frac{2\pi}{n} + 2 \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + (n - 1) \cos \frac{2(n - 1)\pi}{n}$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 3

1. Доказать по индукции, что  $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$

Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Буквы некоторой азбуки образуются как последовательность точек, тире и пробелов. Найти число различных букв, если последовательность содержит 3 или 4 символа.

3. Найти коэффициент при  $x^k$  в разложении  $(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})^2$ .

4. Привести пример не всюду определенного, функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 3-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c = d - b$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(2, 5)$ .

6. Проверить, что операция  $\circ$  на множестве всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ , определенная с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так:  $x \circ y = x + y - xy$ , коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве  $\mathbb{R}$  нейтральный элемент относительно этой операции?

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -2; \\ -4x_1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = -8; \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -3; \\ -3x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 2; \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 & 9 \\ 1 & 10 & 14 & 16 \\ 1 & 9 & 8 & 15 \\ 1 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 \\ 1 & 10 & 25 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(1-i)^3 - (1+2i)^2}{(-1+i)^2 + (1+2i)^2}$ .

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $(2 - \sqrt{3} - i)^{90}$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $1 \leq |z - 1 + i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$ .

20. Вычислить  $\prod_{i=1}^n \varepsilon^i$ , где  $\varepsilon$ —корень  $n$ -й степени из 1.

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 4

1. Доказать по индукции, что  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ . Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Найти число различных делителей числа 100000000.

3. Найти слагаемое, не содержащее  $x$ , в разложении по биномиальной формуле  $(x + x^{-4})^{10}$ .

4. Привести пример не всюду определенного, не функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c = b - d$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(2, 5)$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на множестве всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ , определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так:  $x \circ y = x + y - xy$ . Будет ли  $(\mathbb{R}, \circ)$  группой?

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 2; \\ -4x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = -12; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4; \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -4, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = -4x^3 + x^2 + 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения 
$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 10 & 9 \\ -1 & 7 & 16 & 15 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 6 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(1+i)^3 - (1-i)^2}{(3+i)^2 + (-1+2i)^2}$ .

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $(2 + \sqrt{3} - i)^{120}$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $2 \leq |z - 1 - i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$ .

20. Найти сумму  $\sin \frac{2\pi}{n} + 2 \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$ .



Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ

Вариант № 5

1. Доказать по индукции, что  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ .

Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Найти число различных делителей числа  $2^{10}3^75^4$ .

3. Найти 6-е слагаемое в разложении по биномиальной формуле  $(\sqrt{y} + \sqrt[3]{x})^n$ , если биномиальный коэффициент третьего от конца слагаемого равен 45.

4. Привести пример не всюду определенного, не функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c = d - b$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(1, 6)$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на множестве всех рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так:  $x \circ y = x + y - xy$ . Будет ли  $(\mathbb{Q}, \circ)$  группой?

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 - 3x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + 2x_5 = -1; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 2; \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 6x^3 + 7x^2 + 2x + 1$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 30 & 13 \\ 1 & 3 & 17 & 15 \\ 1 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} X = I.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
.

13. Вычислить определитель порядка  $n$

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ -3 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \\ x_1 - x_3 = -12; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(2-i)^3 - (1+i)^2}{(1-i)^2 + (3-2i)^2}$ .

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{45}}{(\sqrt{3} + i)^{33}}$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $1 \leq |z - 1 + 2i| < 2$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n j \cos jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 6

1. Доказать по индукции, что  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ . Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Определить число возможных исходов эксперимента, связанного с  $n$  бросаниями монеты. (Исходы двух экспериментов считаются различными, если по крайней мере в одном бросании с одним и тем же номером монета выпала в этих экспериментах разными сторонами.)

3. Найти слагаемое, содержащее  $x^2$ , в разложении по биномиальной формуле  $(\frac{x}{a} + \frac{a}{x^2})^8$ .

4. Привести пример всюду определенного, функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c = b - d$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(1, 6)$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на множестве действительных чисел  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так:  $x \circ y = x + y - xy$ . Убедиться, что  $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$  является абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -6; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 1; \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -9, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения 
$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 12 & 12 \\ 1 & 12 & 24 & 19 \\ 1 & 10 & 13 & 18 \\ 1 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель порядка  $n$  
$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 23; \\ x_1 - x_3 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(-2+i)^3 - (-1+2i)^2}{(-1+i)^2 + (-3+2i)^2}.$

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\frac{(1-\sqrt{3}i)^{45}}{(\sqrt{3}-i)^{33}}.$

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $2 \leq |z - 1 - 3i| < 3.$

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i}.$

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n j \sin jx.$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 7

1. Доказать по индукции, что  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ .  
Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Найти число таких перестановок семи предметов, при которых три определенных предмета находятся рядом друг с другом.

3. Найти слагаемое, содержащее  $x^4$ , в разложении по биномиальной формуле  $\left(\frac{x^3}{a} + \frac{a}{x^2}\right)^{12}$ .

4. Привести пример не всюду определенного, функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c = d - b$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(1, 6)$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на множестве рациональных чисел  $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$ , определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так:  $x \circ y = x + y - xy$ . Убедиться, что  $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$  является абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 = -6; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 6; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1; \\ -2x_1 - x_2 - 3x_4 - 2x_5 = -8. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2x + 2$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)\right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения 
$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 7 \\ 1 & 12 & 9 & 13 \\ 1 & 12 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 & -3 \\ -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель порядка  $n$   $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(2 - 3i)^3 - (1 - 2i)^2}{(1 - i)^2 + (3 - 2i)^2}$ .

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\frac{(-1 + \sqrt{3}i)^{45}}{(\sqrt{3} - i)^{33}}$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $1 \leq |z - 3 + i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n \cos^2 jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ

Вариант № 8

1. Доказать по индукции, что  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ .  
Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. На полке стоит собрание сочинений в 12 томах. Найти число способов, которыми можно их переставить так, чтобы тома 1 и 2 стояли рядом.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 1024. Найти степень бинома.

4. Привести пример не всюду определенного, не функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a - c = b - d$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(1, 6)$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на множестве  $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(0, 0)\}$  упорядоченных пар множества рациональных чисел определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так:  $(x, y) \circ (a, b) = (xa - yb, xb + ya)$ . Убедиться, что  $(M, \circ)$  является абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0; \\ -4x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = -5; \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = -7; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4x - 1$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения 
$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 7 & 13 \\ 1 & 12 & 17 & 22 \\ 1 & 11 & 8 & 23 \\ 1 & 11 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель порядка  $n$  
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

a)  $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 10 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -31; \\ x_1 - x_3 = -11; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -17. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(1 - 3i)^3 + (3 - 2i)^2}{(2 - i)^3 - (3 - 2i)^2}.$

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{45}}{(\sqrt{3} - i)^{33}}.$

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $2 \leq |z - 1 - 2i| < 3.$

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}.$

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n \sin^2 jx.$



Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 9

1. Доказать по индукции, что  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ .

Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. На полке стоит собрание сочинений в 12 томах. Найти число способов, которыми можно их переставить так, чтобы тома 1 и 2 не стояли рядом.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения, стоящих нечетных местах, равна 2048. Найти степень бинома.

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(2, 4)$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на множестве  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$  упорядоченных пар множества действительных чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так:

$$(x, y) \circ (a, b) = (xa - yb, xb + ya).$$

Убедиться, что  $(M, \circ)$  является абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 14; \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 2; \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 12; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 1; \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 2x + 2$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 6 & 6 \\ 1 & 13 & 13 & 12 \\ -4 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 12 & 6 & 7 \end{pmatrix} X = I.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель порядка  $n$   $\begin{vmatrix} n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ -2 & 1 & 12 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ x_1 - x_3 = 9; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(2+i)^3 - (1+2i)^2}{(1+i)^2 + (3+2i)^2}$ .

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{30}$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $5 \leq |z - 2| < 8$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n j \cos^2 jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 10

1. Доказать по индукции, что  $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$ . Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и 5 членов некоторой комиссии. Найти число возможных комиссий.

3. Найти слагаемые, являющиеся рациональными числами, в разложении по биномиальной формуле  $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$ .

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, не инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(1, 3)$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{7} | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что  $(M, +, \cdot)$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 4; \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -6; \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 10, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 13 \\ 1 & 7 & 15 & 19 \\ 1 & 8 & 8 & 24 \\ 1 & 6 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель порядка  $n$  
$$\begin{vmatrix} -n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1x_2 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(1+2i)^3 + (2-i)^2}{(1-i)^2 - (1-2i)^2}.$

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{30}.$

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $5 \leq |z - 1| < 7.$

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - i}.$

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n j \sin^2 jx.$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 11

1. Доказать по индукции, что если  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$  и для всякого  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , имеет место равенство  $a_k = 3a_{k-1} - 2a_{k-2}$ , то  $a_n = 2^n + 1$ .

2. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Определить число способов, которыми это можно сделать.

3. В разложении бинома первые три коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Найти степень бинома.

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 1-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(2, 4)$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что  $(M, +, \cdot)$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_5 = -5; \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3; \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 7; \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 3x - 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 7 \\ -3 & 1 & 10 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} X = I.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель порядка  $n$   $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 1 & 10 & 17 \\ 1 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(1+i)^3 + (1+2i)^2}{(-1+i)^3 - (1-2i)^2}$ .

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{30}$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $4 \leq |z - 1 + i| < 8$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n j \cos 2jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 12

1. Доказать по индукции, что  $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$ . Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. В колоде 36 карт, среди них 4 туза. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза.

3. Найти наибольшее слагаемое в разложении по биномиальной формуле  $(1+1)^n$ .

4. Привести пример всюду определенного, функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(1, 8)$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{13} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что  $(M, +, \cdot)$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 4; \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -7; \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = -9, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 10 & 10 & 17 \\ 4 & 10 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель порядка  $n$  
$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14; \\ x_1 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(1+i)^3 + (1-i)^2}{(3+i)^2 - (-1+2i)^3}.$

17. Вычислить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{30}.$

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $4 \leq |z - 1 - i| < 6.$

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i}.$

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n j \sin 2jx.$



Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 13

1. Доказать по индукции, что  $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ . Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. В колоде 52 карты. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза и 2 дамы.

3. В разложении бинома второй и девятый коэффициенты равны. Найти степень бинома.

4. Привести пример всюду определенного, функционального, не инъективного и сюръективного соответствия 3-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное, а 2-элементное на 1-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(3, 9)$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{17} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что  $(M, +, \cdot)$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_5 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 8; \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -8; \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения  $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ .

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 - b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 - b_n \end{vmatrix}$ .

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -2 & 1 & 13 \\ 1 & 6 & 13 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(2-i)^3 + (1+i)^2}{(1-i)^3 - (3-2i)^2}$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\sin 6x$  в виде произведения  $\cos x$  и многочлена от  $\sin x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $5 \leq |z - 1 + 2i| < 9$ .

19. Решить уравнение  $z^7 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n \sin 3jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 14

1. Доказать по индукции, что  $\cos \alpha \cos 2\alpha \dots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}$ . Записать произведение в левой части с помощью символа  $\prod$ .

2. В колоде 52 карты. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ .

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное, а 2-элементное на 1-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(1, 2)$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{17} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

, где  $\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что  $(M, +, \cdot)$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = -13; \\ -4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -6; \\ -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 4x_5 = -13; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 10, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x - 1$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 & 6 \\ 1 & 9 & 15 & 12 \\ 1 & 9 & 10 & 13 \\ 1 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -4 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 1 & 10 & 15 \\ 1 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(-2+i)^3 + (-1+2i)^2}{(-1+i)^3 - (-3+2i)^2}$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\cos 6x$  в виде многочлена от  $\cos x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $3 \leq |z - 1 - 3i| < 7$ .

19. Решить уравнение  $z^7 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n \cos 3jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 15

1. Доказать по индукции, что при любом натуральном  $n > 1$  справедливо неравенство  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ . Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. В колоде 52 карты. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 10 карт так, чтобы среди них были туз и король одной масти.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(2 - a)^8$ .

4. Привести пример не всюду определенного, функционального, инъективного и сюръективного соответствия 3-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное, а 2-элементное на 1-элементное?

5. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(6, 9)$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{13} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

, где  $\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что  $(M, +, \cdot)$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_5 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 8; \\ -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = -2; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1; \\ -2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 2x + 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 13 & 6 \\ 1 & 6 & 7 & 14 \\ 1 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} X = I.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 1 & 11 & 18 \\ 1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -10; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(2-3i)^3 - (1-2i)^2}{(1-i)^3 + (3-2i)^2}$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\cos 7x$  в виде многочлена от  $\cos x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $5 \leq |z - 3 + i| < 8$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n j \sin 3jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 16

1. Доказать по индукции, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

2. В колоде 52 карты. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 3 карты так, чтобы это были тройка, семерка и туз.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(2, 1)^6$ .

4. Привести пример всюду определенного, функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $M = A \times A$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $M$ , определенное так:  $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ , является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $(9, 6)$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

, где  $\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что  $(M, +, \cdot)$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -2x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2; \\ -x_1 + x_3 = 0; \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -10; \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = -7, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = -3x^3 + 4x - 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 12 & 6 \\ -1 & 1 & 10 & 9 \\ 3 & 11 & 13 & 12 \\ 3 & 11 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & -4 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 1 & 7 & 19 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 23; \\ x_1 - x_3 = 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases}$$

16. Вычислить  $\frac{(1-3i)^3 + (3-2i)^2}{(2-i)^3 - (3-2i)^2}$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\cos 8x$  в виде многочлена от  $\cos x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $4 \leq |z - 1 - 2i| < 7$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n j \cos 3jx$ .



Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 17

1. Доказать по индукции, что при любом натуральном  $n > 1$

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

2. Комплексная бригада состоит из двух маляров, двух штукатуров и одного столяра. Найти число всевозможных комплексных бригад, которые можно составить из рабочего коллектива, включающего 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(1, 3)^5$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{N}^2$  в  $\mathbb{Q}$ , состоящее из всех пар вида  $\left((m, n); \frac{m}{n}\right)$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$ .

5. Пусть  $A = \{-20, -19, \dots, 19, 20\}$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $A$ , определенное так:  $a\rho b \Leftrightarrow a - b$  делится на 5, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента 1.

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

где  $\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что  $(M, +, \cdot)$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 5; \\ -2x_1 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1; \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -9; \\ -2x_2 - 4x_3 - x_4 + 3x_5 = -4; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left(\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\right)^n\right)$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения  $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 & 11 \\ -3 & 10 & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 12 & 21 \\ 1 & 7 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ .

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$ .

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 1 & 0 & 12 \\ 1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\sin 7x$  в виде многочлена от  $\sin x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $1 \leq |z - 2 + 4i| < 2$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \cos jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 18

1. Доказать по индукции, что  $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n$ , где  $a + b > 0$ ,  $a \neq b$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ .

2. Дано множество из 10 точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой и никакие 4 не лежат на одной окружности. Найти число окружностей, проходящих через три точки данного множества.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(0,97)^4$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{Q}^+$  в  $\mathbb{N}^2$ , состоящее из всех пар вида  $\left(\frac{m}{n}; (m, n)\right)$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$ .

5. Пусть  $A = \{-20, -19, \dots, 19, 20\}$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $A$ , определенное так:  $a\rho b \Leftrightarrow a - b$  делится на 6, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $-1$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0\}$$

замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли  $(M, \cdot)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ -4x_1 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 7; \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -7, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right)\right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 9 \\ -5 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} X = I.$$

12. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -31; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -9; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -17. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\sin 8x$  в виде произведения  $\cos x$  и многочлена от  $\sin x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $2 \leq |z - 1 - 3i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \sin jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 19

1. Доказать по индукции, что при любом  $x > 0$  и любом натуральном  $n$  справедливо равенство  $x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1$ .

2. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Найти число способов, которыми можно составить 4 смешанные пары.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(29)^4$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , состоящее из всех пар вида  $(x; \cos x)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ .

5. Пусть  $A = \{-16, -15, \dots, 15, 16\}$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $A$ , определенное так:  $a\rho b \Leftrightarrow a - b$  делится на 4, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента 3.

6. Убедиться, что множество действительных чисел  $M = \{a + b\sqrt{11} | a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0\}$  замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли  $(M, \cdot)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -10; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 7; \\ 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 8; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -5; \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & 7 \\ -2 & 7 & 7 & 6 \\ -2 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 11 & 6 & 8 \end{pmatrix} X = I.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$ .

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 9 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ -x_1x_2 - 3x_3 = 7; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\cos^5 x$  в виде  $a \cos 5x + b \cos 3x + c \cos x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $1 \leq |z - 1 + 5i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \cos^2 jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 20

1. Доказать по индукции, что при любом  $\alpha > -1$ ,  $\alpha \neq 0$  и любом натуральном  $n > 1$  справедливо неравенство  $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$ .

2. Найти число всевозможных четырехзначных чисел, составленных из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7 так, что в записи каждого числа присутствует одна цифра 1.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(99)^3$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , состоящее из всех пар вида  $(x; \operatorname{ctg} x)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ .

5. Пусть  $A = \{-25, -24, \dots, 24, 25\}$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $A$ , определенное так:  $a\rho b \Leftrightarrow a - b$  делится на 8, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента  $-3$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{13} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0\}$$

замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли  $(M, \cdot)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 = -6; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -8; \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -10, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 1$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 & 8 \\ 1 & 11 & 17 & 16 \\ 1 & 10 & 10 & 18 \\ 1 & 10 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -3 & 1 & 12 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\cos^7 x$  в виде  $a \cos 7x + b \cos 5x + c \cos 3x + d \cos x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $2 \leq |z - 5 - i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \sin^2 jx$ .



Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 21

1. Доказать по индукции, что  $n$  различных прямых, проведенных через одну точку, делят плоскость на  $2n$  частей.

2. Найти число всевозможных четырехзначных чисел, составленных из цифр  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  так, что в записи каждого числа присутствует по крайней мере одна цифра 1 и все цифры различны.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(4 + \sqrt{3})^6$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , состоящее из всех пар вида  $(\cos x; x)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ .

5. Привести пример нереклексивного, симметричного и транзитивного отношения на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{17} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0\}$$

замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли  $(M, \cdot)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -1; \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3; \\ x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 0; \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -7; \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -4. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ; б)  $X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 7 \\ -3 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & 15 \\ 1 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} X = I$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 2 & 19 & 25 \\ 1 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\sin^5 x$  в виде  $a \sin 5x + b \sin 3x + c \sin x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $1 \leq |z - 3 + 2i| < 2$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \cos^2 2jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 22

1. Доказать по индукции, что при любом натуральном  $n$   $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ . Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. На плоскости дано  $n$  точек, из которых  $m$  лежат на одной прямой, а среди остальных точек нет трех, лежащих на одной прямой. Найти число прямых, проходящих через две из этих точек.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(6 - 5\sqrt{2})^5$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , состоящее из всех пар вида  $(\operatorname{ctg} x; x)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ .

5. Привести пример рефлексивного, несимметричного и транзитивного отношения на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{17} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}$$

замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли  $(M, \cdot)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_5 = -5; \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_5 = 9; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1; \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = -1, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x - 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 10 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \dots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & 1 + x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 17 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16; \\ x_1 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\sin^7 x$  в виде  $a \sin 7x + b \sin 5x + c \sin 3x + d \sin x$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $2 \leq |z - 1 - 3i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j + 1) \sin^2 2jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 23

1. Пусть  $\alpha + \beta = m$ ,  $\alpha\beta = a$ ,  
 $A_2 = m - \frac{a}{m-1}$ ,  $A_3 = m - \frac{a}{A_2}$ , ...,  $A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k}$  при  $k > 1$ .

Доказать по индукции, что  $A_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}$ .

2. В пространстве дано  $n$  точек, из которых  $m$  лежат на одной плоскости, а среди остальных точек нет четырех, лежащих в одной плоскости. Найти число плоскостей, проходящих через три из этих точек.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(1 + \sqrt{3})^6$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ , состоящее из всех пар вида  $(n^2 - 4; n^2 - 5)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Привести пример рефлексивного, симметричного и нетранзитивного отношения на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{13} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}$$

замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли  $(M, \cdot)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 4; \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 + x_5 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_5 = -2; \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x - 1$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 13 \\ -1 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель порядка  $2n$   $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -2 & 1 & 13 \\ -1 & 7 & 26 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 13; \\ x_1 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 - 8x^2 + 25 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\cos^6 x$  в виде  $a \cos 6x + b \cos 4x + c \cos 2x + d$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $1 \leq |z - 3 + 4i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \cos 2jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 24

1. Доказать по индукции, что если  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 13$  и для всякого  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , имеет место равенство  $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ , то  $a_n = 2^n + 3^n$ .

2. На плоскости дано  $n$  точек, из которых  $m$  лежат на одной прямой, а среди остальных точек нет трех, лежащих на одной прямой. Найти число треугольников, которые можно получить, соединяя точки по три.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})^6$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ , состоящее из всех пар вида  $(n - 4; n^2 - 5)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Привести пример нереклексивного, антисимметричного и транзитивного отношения на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\},$$

где  $\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли  $(M, \cdot)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 1; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 15; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 9, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 7x - 1$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 9 & 10 & 13 \\ 1 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель порядка  $n$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 1 & 10 & 15 \\ 2 & 18 & 17 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 + 8x^2 + 25 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\cos^8 x$  в виде  $a \cos 8x + b \cos 6x + c \cos 4x + d \cos 2x + f$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $2 \leq |z - 4 - 2i| < 3$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \sin 2jx$ .



Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 25

1. Доказать по индукции, что если  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 29$  и для всякого  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , имеет место равенство  $a_k = 7a_{k-1} - 10a_{k-2}$ , то  $a_n = 2^n + 5^n$ .

2. Имеется 6 шаров: 3 черных, 1 красный, 1 белый, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по четыре.

3. Вычислить по биномиальной формуле  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{Z}$ , состоящее из всех пар вида  $(n^2 - 5; n - 1)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

5. Привести пример рефлексивного, неантисимметричного и транзитивного отношения на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

6. Убедиться, что множество действительных чисел

$$M = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\},$$

где  $\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли  $(M, \cdot)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 2; \\ -x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -8; \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 5; \\ -3x_1 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 6. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 17 & 9 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 1 & 11 & 18 \\ 3 & 31 & 33 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 + 30x^2 + 289 = 0$ .

17. Перевести в тригонометрическую форму комплексное число  $1 - (2 + \sqrt{3})i$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $5 \leq |z - 2 + 5i| < 8$ .

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{1 - i}{1 - \sqrt{3}i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j + 1) \sin 3jx$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 26

1. Доказать по индукции, что если  $a_1 = 8$ ,  $a_2 = 34$  и для всякого  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , имеет место равенство  $a_k = 8a_{k-1} - 15a_{k-2}$ , то  $a_n = 3^n + 5^n$ .

2. Имеется 6 шаров: 2 черных, 2 красных, 1 белый, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по четыре.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 2048. Найти степень бинома.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{Z}^2$  в  $\mathbb{Q}$ , состоящее из всех пар вида  $\left( (m, n); \frac{m}{n} \right)$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

5. Привести пример рефлексивного, антисимметричного и нетранзитивного отношения на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на декартовой степени  $M = \mathbb{Q}^2$  множества всех рациональных чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так:  $(x, y) \circ (a, b) = (xa + yb, xb + ya)$ . Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли  $(M, \circ)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 8; \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 = -7; \\ -x_1 + 3x_3 - 4x_4 = -2; \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения 
$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 12 & 6 \\ -1 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 11 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

13. Доказать равенство 
$$\begin{vmatrix} 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}.$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

a)  $\begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 1 & 7 & 19 \\ 3 & 18 & 32 \end{pmatrix}.$

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 23; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 33; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 + 24x^2 + 169 = 0.$

17. Перевести в тригонометрическую форму комплексное число

$$1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $5 \leq |z - 1 - 6i| < 7.$

19. Решить уравнение  $z^6 = \frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}.$

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \cos 3jx.$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 27

1. Доказать по индукции, что если  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 25$  и для всякого  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , имеет место равенство  $a_k = 7a_{k-1} - 12a_{k-2}$ , то  $a_n = 3^n + 4^n$ .

2. Имеется 7 шаров: 2 черных, 2 красных, 2 белых, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по четыре.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения, стоящих нечетных местах, равна 1024. Найти степень бинома.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{Z}^2$ , состоящее из всех пар вида  $\left(\frac{m}{n}; (m, n)\right)$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

5. Пусть  $A = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $A$ , определенное так:  $a\rho b \Leftrightarrow a - b$  делится на 3, является отношением эквивалентности, и найти фактормножество  $A/\rho$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на декартовой степени  $M = \mathbb{R}^2$  множества всех действительных чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так:  $(x, y) \circ (a, b) = (xa + yb, xb + ya)$ . Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли  $(M, \circ)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -4x_1 + x_3 - x_4 - 2x_5 = -6; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 8; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 3$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения 
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 & 11 \\ -3 & 10 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 7 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a \end{vmatrix}$ .

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 3 & 20 & 25 \\ 1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 - 24x^2 + 169 = 0$ .

17. Перевести в тригонометрическую форму комплексное число

$$1 - (2 - \sqrt{3})i.$$

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $4 \leq |z - 5 + 3i| < 8$ .

19. Решить уравнение  $z^7 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + \sqrt{3}i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \sin(2j+1)x$ .

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 28

1. Доказать по индукции, что если  $a_1 = 9$ ,  $a_2 = 41$  и для всякого  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , имеет место равенство  $a_k = 9a_{k-1} - 20a_{k-2}$ , то  $a_n = 4^n + 5^n$ .

2. Имеется 6 шаров: 2 черных, 2 красных, 1 белый, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по пять.

3. Найти слагаемые, являющиеся рациональными числами, в разложении по биномиальной формуле  $(\sqrt[8]{3} + \sqrt[9]{2})^{24}$ .

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{R}^+$  в  $\mathbb{R}$ , состоящее из всех пар вида  $(n^2 - 5; n - 1)$ , где  $n \in \mathbb{R}$ .

5. Пусть  $A = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $A$ , определенное так:  $a\rho b \Leftrightarrow a - b$  делится на 4, является отношением эквивалентности, и найти фактормножество  $A/\rho$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на декартовой степени  $M = \mathbb{Z}^2$  множества всех целых чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так:  $(x, y) \circ (a, b) = (xa + yb, xb + ya)$ . Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли  $(M, \circ)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_5 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1; \\ -2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1; \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 = -1, \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x + 4$  от матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить  $\left( \left( \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 9 \\ -5 & 6 & 7 & 9 \\ -2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 22 & 21 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -31; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -40; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -17. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$ .

17. Перевести в тригонометрическую форму комплексное число  $1 - (-2 + \sqrt{3})i$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $4 \leq |z - 4 - 3i| < 6$ .

19. Решить уравнение  $z^7 = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - \sqrt{3}i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=0}^n (j+1) \cos(2j+1)x$ .



Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 29

1. Доказать по индукции, что если  $a_1 = 9$ ,  $a_2 = 45$  и для всякого  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , имеет место равенство  $a_k = 9a_{k-1} - 18a_{k-2}$ , то  $a_n = 3^n + 6^n$ .

2. Имеется 7 шаров: 2 черных, 2 красных, 2 белых, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по пять.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 4096. Найти степень бинома.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , состоящее из всех пар вида  $(n^2 - 5; n - 1)$ , где  $n \in \mathbb{R}$ .

5. Пусть  $A = \{-6, -5, \dots, 5, 6\}$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $A$ , определенное так:  $a\rho b \Leftrightarrow a - b$  делится на 5, является отношением эквивалентности, и найти фактормножество  $A/\rho$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на декартовой степени  $M = \mathbb{Z}^2$  множества всех целых чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так:  $(x, y) \circ (a, b) = (xa, xb + ya + yb)$ . Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли  $(M, \circ)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 13; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -3; \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = -9; \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$  от матриц  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $X \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения 
$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 11 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & -4 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 9 \\ 5 & 22 & 31 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -11; \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 = 26; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 - 10x^2 + 169 = 0$ .

17. Перевести в тригонометрическую форму комплексное число  $1 + (2 - \sqrt{3})i$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $5 \leq |z - 6 + 4i| < 9$ .

19. Решить уравнение  $z^9 = \frac{2 - 2i}{1 - \sqrt{3}i}$ .

20. Вычислить  $1 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \dots + n\varepsilon^{2(n-1)}$ , где  $\varepsilon$ —корень  $n$ -й степени из 1.

Домашнее задание № 1 по основам алгебры  
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение МХ ПМ  
Вариант № 30

1. Доказать по индукции, что  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ .

Записать сумму в левой части с помощью символа  $\sum$ .

2. Имеется 7 шаров: 2 черных, 2 красных, 2 белых, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по шесть.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 8192. Найти степень бинома.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , состоящее из всех пар вида  $(n^2 - 6; n + 11)$ , где  $n \in \mathbb{R}$ .

5. Пусть  $A = \{-7, -6, \dots, 5, 6, 7\}$ . Убедиться, что отношение  $\rho$  на множестве  $A$ , определенное так:  $a\rho b \Leftrightarrow a - b$  делится на 7, является отношением эквивалентности, и найти фактормножество  $A/\rho$ .

6. Пусть операция  $\circ$  на декартовой степени  $M = \mathbb{Z}^2$  множества всех целых чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так:  $(x, y) \circ (a, b) = (xb + ya + yb, xa)$ . Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли  $(M, \circ)$  абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 13; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -3; \\ x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 5x_5 = -22; \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 2$  от матриц  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

9. Вычислить  $\left( \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$ .

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)  $X \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ .

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения 
$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 22 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ .

13. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 9 \\ 3 & 15 & 24 \end{pmatrix}$ .

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 = 26; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

16. Решить уравнение  $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$ .

17. Выразить с помощью тригонометрической формы комплексного числа  $\cos^8 x$  в виде  $a \cos 8x + b \cos 6x + c \cos 4x + d \cos 2x + e$ .

18. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых  $5 \leq |z - 4 + 3i| < 7$ .

19. Решить уравнение  $z^8 = \frac{2 - 2i}{1 + \sqrt{3}i}$ .

20. Найти сумму  $\sum_{j=1}^n (j + 1) \cos(2j - 1)x$ .