Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 31

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 7 & 12 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -4 & -4 \\ -3 & -3 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & 0 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу
а) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

8. Проверить, что операция $\circ$ на множестве всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$, определенная с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $x \circ y = x + y - xy$, коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве $\mathbb{Q}$ нейтральный элемент относительно этой операции?

9. Доказать по индукции, что $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательности точек и тире. Найти число различных букв, если последовательность содержит 3, 4 или 5 символов.

11. Найти коэффициент при x^8 в разложении по биномиальной формуле $(\frac{2}{x}+3x^2)^{10}$.

12. Пусть $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow a-c=b-d$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2,5)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -3x_1-x_2-3x_3+4x_4+2x_5=-1; \\ x_1-x_2+4x_3+2x_4+2x_5=8; \\ 3x_1+2x_2-x_3-4x_4+x_5=1; \\ 2x_2+4x_3+3x_5=9, \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x)=-3x^3+x^2+3x+3$ от матриц
$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример всюду определенного, не функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 32

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 & 9 \\ 1 & 10 & 14 & 16 \\ 1 & 9 & 8 & 15 \\ 1 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \ldots & 3 & 2 & 2 \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ 2 & n-1 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 \\ 1 & 10 & 25 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

8. Проверить, что операция $\circ$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, определенная с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $x \circ y = x + y - xy$, коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве $\mathbb{R}$ нейтральный элемент относительно этой операции?

9. Доказать по индукции, что $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. Буквы некоторой азбуки образуются как последовательность точек, тире и пробелов. Найти число различных букв, если последовательность содержит 3 или 4 символа.

11. Найти коэффициент при x^k в разложении $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^2$.

12. Пусть $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow a-c=d-b$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2,5)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3-3x_4-3x_5=-2; \\ -4x_1-4x_2+x_3-4x_4+3x_5=-8; \\ -4x_1+4x_2-2x_3-2x_4+x_5=-3; \\ -3x_1+2x_3+2x_4+x_5=2; \\ -4x_1+3x_2-x_3-x_4=-3. \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x)=3x^3-2x^2-x-3$ от матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример не всюду определенного, функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 3-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 33

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:
а)$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 10 & 9 \\ -1 & 7 & 16 & 15 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 6 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу
а)$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

8. Пусть операция $\circ$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $x \circ y = x + y - xy$. Будет ли $(\mathbb{R}, \circ)$ группой?

9. Доказать по индукции, что $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. Найти число различных делителей числа 100000000.

11. Найти слагаемое, не содержащее x, в разложении по биномиальной формуле $(x + x^{-4})^{10}$.

12. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow a - c = b - d$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2, 5)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 2; \\ -4x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = -12; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4; \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -4, \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x) = -4x^3 + x^2 + 4$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример не всюду определенного, не функционального, не инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 34

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 30 & 13 \\ 1 & 3 & 17 & 15 \\ 1 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу
а) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ -3 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \\ x_1 - x_3 = -12; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

8. Пусть операция $\circ$ на множестве всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$, определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $x \circ y = x + y - xy$. Будет ли $(\mathbb{Q}, \circ)$ группой?

9. Доказать по индукции, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. Найти число различных делителей числа $2^{10}3^7 5^4$.

11. Найти 6-е слагаемое в разложении по биномиальной формуле $(\sqrt{y} + \sqrt[3]{x})^n$, если биномиальный коэффициент третьего от конца слагаемого равен 45.

12. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow a - c = d - b$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1, 6)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 - 3x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + 2x_5 = -1; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 2; \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x) = 6x^3 + 7x^2 + 2x + 1$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример не всюду определенного, не функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 35

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 12 & 12 \\ 1 & 12 & 24 & 19 \\ 1 & 10 & 13 & 18 \\ 1 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу
а) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 23; \\ x_1 - x_3 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

8. Пусть операция $\circ$ на множестве действительных чисел $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $x \circ y = x + y - xy$. Убедиться, что $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$ является абелевой группой.

9. Доказать по индукции, что $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. Определить число возможных исходов эксперимента, связанного с n бросаниями монеты. (Исходы двух экспериментов считаются различными,

если если по крайней мере в одном бросании с одним и тем же номером монета выпала в этих экспериментах разными сторонами.)

11. Найти слагаемое, содержащее x^2, в разложении по биномиальной формуле $(\frac{x}{a} + \frac{a}{x^2})^8$.

12. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow a - c = b - d$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1, 6)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -6; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 1; \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -9, \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример всюду определенного, функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 36

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 7 \\ 1 & 12 & 9 & 13 \\ 1 & 12 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 & -3 \\ -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ . & . & \dots & . & . \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу
а) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

8. Пусть операция $\circ$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$, определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $x \circ y = x + y - xy$. Убедиться, что $(\mathbb{Q}\setminus\{1\}, \circ)$ является абелевой группой.

9. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. Найти число таких перестановок семи предметов, при которых три определенных предмета находятся рядом друг с другом.

11. Найти слагаемое, содержащее x^4, в разложении по биномиальной формуле $(\frac{x^3}{a} + \frac{a}{x^2})^{12}$.

12. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow a - c = d - b$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1, 6)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 = -6; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 6; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1; \\ -2x_1 - x_2 - 3x_4 - 2x_5 = -8. \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2x + 2$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример не всюду определенного, функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 37

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 7 & 13 \\ 1 & 12 & 17 & 22 \\ 1 & 11 & 8 & 23 \\ 1 & 11 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & \dots & . & . \\ 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 10 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -31; \\ x_1 - x_3 = -11; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -17. \end{cases}$$

8. Пусть операция $\circ$ на множестве $M = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\setminus\{(0,0)\}$ упорядоченных пар множества рациональных чисел определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $(x, y)\circ(a, b) = (xa-yb, xb+ya)$. Убедиться, что $(M, \circ)$ является абелевой группой.

9. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. На полке стоит собрание сочинений в 12 томах. Найти число способов, которыми можно их переставить так, чтобы тома 1 и 2 стояли рядом.

11. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 1024. Найти степень бинома.

12. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow a - c = b - d$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1, 6)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0; \\ -4x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = -5; \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = -7; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4x - 1$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример не всюду определенного, не функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 38

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 6 & 6 \\ 1 & 13 & 13 & 12 \\ -4 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 12 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 & 1 \\ . & . & \dots & . & . \\ 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ -2 & 1 & 12 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ x_1 - x_3 = 9; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

8. Пусть операция $\circ$ на множестве $M = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ упорядоченных пар множества действительных чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $(x,y)\circ(a,b) = (xa-yb, xb+ya)$. Убедиться, что $(M,\circ)$ является абелевой группой.

9. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. На полке стоит собрание сочинений в 12 томах. Найти число способов, которыми можно их переставить так, чтобы тома 1 и 2 не стояли рядом.

11. Сумма биномиальных коэффициентов разложения, стоящих нечетных местах, равна 2048. Найти степень бинома.

12. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow ad = bc$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2, 4)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 14; \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 2; \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 12; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 1; \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример всюду определенного, не функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 39

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 13 \\ 1 & 7 & 15 & 19 \\ 1 & 8 & 8 & 24 \\ 1 & 6 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} -n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ . & . & \dots & . & . \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу
а)$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

8. Убедиться, что множество действительных чисел $= \{a + b\sqrt{7} | a, b \in \mathbb{Z}$ замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M, +, \cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

9. Доказать по индукции, что $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

10. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и 5 членов некоторой комиссии. Найти число возможных комиссий.

11. Найти слагаемые, являющиеся рациональными числами, в разложении по биномиальной формуле $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}$.

12. Пусть $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1,3)$.

13. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1+3x_2-2x_3-x_5=4; \\ -3x_1-3x_2+2x_3-4x_4+2x_5=-6; \\ -3x_1+x_2+3x_3+2x_4=3; \\ 4x_1+x_2+3x_3-x_4+3x_5=10, \end{cases}$

14. Найти значение многочлена $f(x)=2x^3+3x^2+2x-2$ от матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

15. Привести пример всюду определенного, не функционального, не инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 40

1. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

2. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 9 & 17 & 15 \\ -3 & 0 & 4 & 10 \\ 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \ldots n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \ldots n-1 & n \\ . & . & . & \ldots. & . \\ 1 & 2 & 3 & \ldots 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

6. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 1 & 7 & 23 \\ 1 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

8. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

9. Найти число различных 7-значных телефонных номеров.

10. Определить число слагаемых, являющихся рациональными числами, в разложении по биномиальной формуле $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$.

11. Привести пример не всюду определенного, не функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 3-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

12. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d) \leftrightarrow a - c = d - b$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2,5)$.

13. Проверить, что операция $\circ$ на множестве всех целых чисел $\mathbb{Z}$, определенная с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так: $x \circ y = x + y - xy$, коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве $\mathbb{Z}$ нейтральный элемент относительно этой операции?

14. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = -13; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 12; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 10; \\ -3x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_5 = -8. \end{cases}$

15. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x - 2$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.