Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 1

1. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Найти число различных 7-значных телефонных номеров.

3. Определить число слагаемых, являющихся рациональными числами, в разложении по биномиальной формуле $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$.

4. Привести пример не всюду определенного, не функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 3-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow a-c=d-b$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2,5)$.

6. Проверить, что операция $\circ$ на множестве всех целых чисел $\mathbb{Z}$, определенная с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так: $x\circ y=x+y-xy$, коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве $\mathbb{Z}$ нейтральный элемент относительно этой операции?

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -3x_1-4x_2-3x_3-4x_4+x_5=-13;\\ 4x_1+x_2+3x_3+2x_4+2x_5=12;\\ x_1+x_2+4x_3+x_4+3x_5=10;\\ -3x_1+3x_3-2x_4+3x_5=1;\\ -x_1-x_2-4x_3-2x_5=-8.\end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x)=3x^3-3x^2+x-2$ от матриц
$A=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-3&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&0&-4\\-4&3&-3\\2&-4&-4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\-3&-2\end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix}1&8&7&6\\1&9&17&15\\-3&0&4&10\\1&8&6&7\end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-3&1&-3&-2\\4&1&-1&1\\1&1&1&-3\\-1&-2&-4&0\end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \ldots n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \ldots n-1 & n \\ . & . & . & \ldots. & . \\ 1 & 2 & 3 & \ldots 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 1 & 7 & 23 \\ 1 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 2

1. Доказать по индукции, что $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательности точек и тире. Найти число различных букв, если последовательность содержит 3, 4 или 5 символов.

3. Найти коэффициент при x^8 в разложении по биномиальной формуле $(\frac{2}{x}+3x^2)^{10}$.

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d) \leftrightarrow a-c=b-d$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2,5)$.

6. Проверить, что операция $\circ$ на множестве всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$, определенная с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $x \circ y = x+y-xy$, коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве $\mathbb{Q}$ нейтральный элемент относительно этой операции?

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -1; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 1; \\ 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 9, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = -3x^3 + x^2 + 3x + 3$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 6 & 12 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -4 & -4 \\ -3 & -3 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & 0 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 3

1. Доказать по индукции, что $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Буквы некоторой азбуки образуются как последовательность точек, тире и пробелов. Найти число различных букв, если последовательность содержит 3 или 4 символа.

3. Найти коэффициент при x^k в разложении $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^2$.

4. Привести пример не всюду определенного, функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 3-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и $M = A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d) \leftrightarrow a-c = d-b$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2,5)$.

6. Проверить, что операция $\circ$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, определенная с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $x\circ y = x+y-xy$, коммутативна и ассоциативна. Имеется ли в множестве $\mathbb{R}$ нейтральный элемент относительно этой операции?

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3-3x_4-3x_5=-2; \\ -4x_1-4x_2+x_3-4x_4+3x_5=-8; \\ -4x_1+4x_2-2x_3-2x_4+x_5=-3; \\ -3x_1+2x_3+2x_4+x_5=2; \\ -4x_1+3x_2-x_3-x_4=-3. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3-2x^2-x-3$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 & 9 \\ 1 & 10 & 14 & 16 \\ 1 & 9 & 8 & 15 \\ 1 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \ldots & 3 & 2 & 2 \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ 2 & n-1 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 \\ 1 & 10 & 25 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 4

1. Доказать по индукции, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Найти число различных делителей числа 100000000.

3. Найти слагаемое, не содержащее x, в разложении по биномиальной формуле $(x+x^{-4})^{10}$.

4. Привести пример не всюду определенного, не функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow a-c=b-d$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2,5)$.

6. Пусть операция $\circ$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $x\circ y=x+y-xy$. Будет ли $(\mathbb{R},\circ)$ группой?

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-4x_4-x_5=2; \\ -4x_1-4x_2-x_3-x_4-2x_5=-12; \\ -x_1+2x_2+2x_3-x_4+2x_5=4; \\ -x_1-4x_2+3x_3-4x_4+2x_5=-4, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x)=-4x^3+x^2+4$ от матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 10 & 9 \\ -1 & 7 & 16 & 15 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 6 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 5

1. Доказать по индукции, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Найти число различных делителей числа $2^{10}3^{7}5^{4}$.

3. Найти 6-е слагаемое в разложении по биномиальной формуле $(\sqrt{y} + \sqrt[3]{x})^n$, если биномиальный коэффициент третьего от конца слагаемого равен 45.

4. Привести пример не всюду определенного, не функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow a - c = d - b$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1, 6)$.

6. Пусть операция $\circ$ на множестве всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$, определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $x \circ y = x + y - xy$. Будет ли $(\mathbb{Q}, \circ)$ группой?

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 - 3x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + 2x_5 = -1; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 2; \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 6x^3 + 7x^2 + 2x + 1$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 30 & 13 \\ 1 & 3 & 17 & 15 \\ 1 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ -3 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \\ x_1 - x_3 = -12; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение
Вариант № 6

1. Доказать по индукции, что $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Определить число возможных исходов эксперимента, связанного с n бросаниями монеты. (Исходы двух экспериментов считаются различными, если если по крайней мере в одном бросании с одним и тем же номером монета выпала в этих экспериментах разными сторонами.)

3. Найти слагаемое, содержащее x^2, в разложении по биномиальной формуле $(\frac{x}{a} + \frac{a}{x^2})^8$.

4. Привести пример всюду определенного, функционального, не инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow a - c = b - d$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1, 6)$.

6. Пусть операция $\circ$ на множестве действительных чисел $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $x \circ y = x + y - xy$. Убедиться, что $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$ является абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -6; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 1; \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -9, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 12 & 12 \\ 1 & 12 & 24 & 19 \\ 1 & 10 & 13 & 18 \\ 1 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 23; \\ x_1 - x_3 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 7

1. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Найти число таких перестановок семи предметов, при которых три определенных предмета находятся рядом друг с другом.

3. Найти слагаемое, содержащее x^4, в разложении по биномиальной формуле $(\frac{x^3}{a}+\frac{a}{x^2})^{12}$.

4. Привести пример не всюду определенного, функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow a-c=d-b$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1,6)$.

6. Пусть операция $\circ$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}\backslash\{1\}$, определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $x\circ y=x+y-xy$. Убедиться, что $(\mathbb{Q}\setminus\{1\},\circ)$ является абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases}-x_1-3x_2-3x_3+4x_4-3x_5=-6;\\ 4x_1-2x_2+3x_4+x_5=6;\\ -3x_1+x_2+2x_3-x_4=-1;\\ -x_1-x_2+2x_3-x_4=-1;\\ -2x_1-x_2-3x_4-2x_5=-8.\end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x)=5x^3+4x^2-2x+2$ от матриц $A=\begin{pmatrix}-3&2\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4&4\\0&3&4\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)$\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\-4&-3\end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix}-3&-4&-4\\4&-4&-2\\-3&-2&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&0\\0&-4\end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix}1&12&8&7\\-1&0&11&7\\1&12&9&13\\1&12&8&8\end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}4&-3&4&-3\\-3&4&3&2\\-3&-1&3&1\\-1&0&1&4\end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \ldots & -n & 1 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 1 & -n & \ldots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 8

1. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. На полке стоит собрание сочинений в 12 томах. Найти число способов, которыми можно их переставить так, чтобы тома 1 и 2 стояли рядом.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 1024. Найти степень бинома.

4. Привести пример не всюду определенного, не функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow a-c=b-d$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1,6)$.

6. Пусть операция $\circ$ на множестве $M=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\setminus\{(0,0)\}$ упорядоченных пар множества рациональных чисел определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $(x,y)\circ(a,b)=(xa-yb,xb+ya)$. Убедиться, что $(M,\circ)$ является абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1+x_2-3x_3+3x_4-4x_5=0; \\ -4x_1+x_2-3x_4+x_5=-5; \\ -4x_1-x_2+2x_3-x_4-3x_5=-7; \\ 4x_1-x_2-2x_3+2x_4=3, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x)=-3x^3+2x^2+4x-1$ от матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 7 & 13 \\ 1 & 12 & 17 & 22 \\ 1 & 11 & 8 & 23 \\ 1 & 11 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & \dots & . & . \\ 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 10 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -31; \\ x_1 - x_3 = -11; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -17. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 9

1. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. На полке стоит собрание сочинений в 12 томах. Найти число способов, которыми можно их переставить так, чтобы тома 1 и 2 не стояли рядом.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения, стоящих нечетных местах, равна 2048. Найти степень бинома.

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow ad=bc$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2,4)$.

6. Пусть операция $\circ$ на множестве $M=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ упорядоченных пар множества действительных чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $(x,y)\circ(a,b)=(xa-yb,xb+ya)$. Убедиться, что $(M,\circ)$ является абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1+4x_2+4x_3+x_4+x_5=14; \\ 4x_1-x_2-4x_3+2x_4+x_5=2; \\ -2x_1+4x_2+3x_3+3x_4+4x_5=12; \\ 2x_1+x_2-4x_3+x_4+x_5=1; \\ -x_1-3x_2+4x_3-x_4-x_5=-2. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x)=4x^3-2x^2-2x+2$ от матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 6 & 6 \\ 1 & 13 & 13 & 12 \\ -4 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 12 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 & 1 \\ . & . & \dots & . & . \\ 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ -2 & 1 & 12 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ x_1 - x_3 = 9; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 10

1. Доказать по индукции, что $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и 5 членов некоторой комиссии. Найти число возможных комиссий.

3. Найти слагаемые, являющиеся рациональными числами, в разложении по биномиальной формуле $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, не инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на себя. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1, 3)$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{7} | a, b \in \mathbb{Z}$ замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M, +, \cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 4; \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -6; \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 10, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ от матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 13 \\ 1 & 7 & 15 & 19 \\ 1 & 8 & 8 & 24 \\ 1 & 6 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} -n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ . & . & \dots & . & . \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры
Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение
Вариант № 11

1. Доказать по индукции, что если $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ и для всякого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, имеет место равенство $a_k = 3a_{k-1} - 2a_{k-2}$, то $a_n = 2^n + 1$.

2. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Определить число способов, которыми это можно сделать.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(2x + \frac{1}{x})^8$.

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 1-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(2, 4)$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{11} | a, b \in \mathbb{Z}$ замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M, +, \cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_5 = -5; \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3; \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 7; \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 3x - 4$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 7 \\ -3 & 1 & 10 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 1 & 10 & 17 \\ 1 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 12

1. Доказать по индукции, что $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. В колоде 36 карт, среди них 4 туза. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза.

3. Найти наибольшее слагаемое в разложении по биномиальной формуле $(1+1)^n$.

4. Привести пример всюду определенного, функционального, инъективного и не сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное?

5. Пусть $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и $M=A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d)\leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1,8)$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M=\{a+b\sqrt{13}|a,b\in\mathbb{Z}$ замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M,+,\cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3-x_4-2x_5=4;\\2x_1-x_2+3x_3+x_4-x_5=4;\\2x_1-4x_2-2x_3-3x_4=-7;\\3x_1-3x_2-3x_3-2x_4-4x_5=-9,\end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x)=x^3+2x^2-3x-4$ от матриц $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&3&-3\\-3&3&-2\\-3&4&1\end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix}1&1\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\4&-1\end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а)$\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&4\\2&-2\end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix}4&3&3\\4&-2&0\\2&3&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-4&-2\\1&1\\2&-3\end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix}4&10&9&11\\-1&1&7&6\\4&10&10&17\\4&10&9&12\end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2&2&0&3&-2\\2&0&-1&0&1\\1&-1&-3&-1&0\\2&4&3&1&4\\-2&1&2&-1&-1\end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а)$\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14; \\ x_1 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 13

1. Доказать по индукции, что $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. В колоде 52 карты. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза и 2 дамы.

3. В разложении бинома второй и девятый коэффициенты равны. Найти степень бинома.

4. Привести пример всюду определенного, функционального, не инъективного и сюръективного соответствия 3-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное, а 2-элементное на 1-элементное?

5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(3, 9)$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{17} | a, b \in \mathbb{Z}$ замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M, +, \cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_5 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 8; \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -8; \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$ от матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -2 & 1 & 13 \\ 1 & 6 & 13 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 14

1. Доказать по индукции, что $\cos\alpha\cos 2\alpha\ldots\cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$. Записать произведние в левой части с помощью символа $\prod$.

2. В колоде 52 карты. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(x+\frac{1}{x})^6$.

4. Привести пример всюду определенного, не функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на 3-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное, а 2-элементное на 1-элементное?

5. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $M = A\times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a,b)\rho(c,d) \leftrightarrow ad = bc$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(1,2)$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{17} | a, b \in \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M,+,\cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = -13; \\ -4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -6; \\ -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 4x_5 = -13; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 10, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x - 1$ от матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 & 6 \\ 1 & 9 & 15 & 12 \\ 1 & 9 & 10 & 13 \\ 1 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -4 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 1 & 10 & 15 \\ 1 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 15

1. Доказать по индукции, что при любом натуральном $n > 1$ справедливо неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. В колоде 52 карты. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 10 карт так, чтобы среди них были туз и король одной масти.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(2-a)^8$.

4. Привести пример не всюду определенного, функционального, инъективного и сюръективного соответствия 3-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 3-элементное множество на 2-элементное, а 2-элементное на 1-элементное?

5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow ad = bc$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(6, 9)$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{13} | a, b \in \mathbb{Q}\}$, где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M, +, \cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_5 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 8; \\ -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = -2; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1; \\ -2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ от матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 13 & 6 \\ 1 & 6 & 7 & 14 \\ 1 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 1 & 11 & 18 \\ 1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -10; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 16

1. Доказать по индукции, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

2. В колоде 52 карты. Найти число способов, которыми можно вынуть из колоды 3 карты так, чтобы это были тройка, семерка и туз.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(2,1)^6$.

4. Привести пример всюду определенного, функционального, инъективного и сюръективного соответствия 2-элементного множества на 2-элементное. Возможно ли заменить 2-элементное множество на 1-элементное?

5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $M = A \times A$. Убедиться, что отношение ρ на множестве M, определенное так: $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow ad = bc$, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента $(9, 6)$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{11} | a, b \in \mathbb{Q}\}$, где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M, +, \cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -2x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2; \\ -x_1 + x_3 = 0; \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -10; \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = -7, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = -3x^3 + 4x - 4$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 3 & 11 & 12 & 6 \\ -1 & 1 & 10 & 9 \\ 3 & 11 & 13 & 12 \\ 3 & 11 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & -4 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 1 & 7 & 19 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 23; \\ x_1 - x_3 = 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 17

1. Доказать по индукции, что при любом натуральном $n > 1$ $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

2. Комплексная бригада состоит из двух маляров, двух штукатуров и одного столяра. Найти число всевозможных комплексных бригад, которые можно составить из рабочего коллектива, включающего 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(1,3)^5$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{N}^2$ в $\mathbb{Q}$, состоящее из всех пар вида $\left((m,n); \frac{m}{n}\right)$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

5. Пусть $A = \{-20, -19, \ldots, 19, 20\}$. Убедиться, что отношение ρ на множестве A, определенное так: $a\rho b \leftrightarrow a - b$ делится на 5, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента 1.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{7} | a, b \in \mathbb{Q}\}$, где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел. Проверить, что $(M, +, \cdot)$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Выяснить, является ли оно полем.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 5; \\ -2x_1 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1; \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -9; \\ -2x_2 - 4x_3 - x_4 + 3x_5 = -4; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 & 11 \\ -3 & 10 & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 12 & 21 \\ 1 & 7 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 1 & 0 & 12 \\ 1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 18

1. Доказать по индукции, что $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$, где $a+b > 0$, $a \neq b$, $n\mathbb{N}$, $n > 1$.

2. Дано множество из 10 точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой и никакие 4 не лежат на одной окружности. Найти число окружностей, проходящих через три точки данного множества.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(0,97)^4$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{Q}^+$ в $\mathbb{N}^2$, состоящее из всех пар вида $\left(\frac{m}{n};(m,n)\right)$, где $m,n \in \mathbb{N}$.

5. Пусть $A = \{-20,-19,\ldots,19,20\}$. Убедиться, что отношение ρ на множестве A, определенное так: $a\rho b \leftrightarrow a-b$ делится на 6, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента -1.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{7} | a,b \in \mathbb{Z}, a^2+b^2 > 0\}$ замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли $(M,\cdot)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -2x_1+2x_2-x_3=-1; \\ -4x_1-x_3+2x_4=-3; \\ 4x_1+4x_2+3x_3-3x_4-x_5=7; \\ -3x_1-3x_2-x_3-2x_4+2x_5=-7, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = -x^3+2x^2-2x+4$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 9 \\ -5 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ . & . & . & \dots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -31; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -9; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -17. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 19

1. Доказать по индукции, что при любом $x > 0$ и любом натуральном n справедливо равенство $x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1$.

2. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Найти число способов, которыми можно составить 4 смешанные пары.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(29)^4$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, состоящее из всех пар вида $(x; \cos x)$, где $x \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $A = \{-16, -15, \ldots, 15, 16\}$. Убедиться, что отношение ρ на множестве A, определенное так: $a\rho b \leftrightarrow a - b$ делится на 4, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента 3.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{11} | a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0\}$ замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли $(M, \cdot)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -10; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 7; \\ 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 8; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -5; \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & 7 \\ -2 & 7 & 7 & 6 \\ -2 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 11 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots n^3 \\ . & . & . & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots n^{2n-1} \end{vmatrix}$.

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 9 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 20

1. Доказать по индукции, что при любом $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ и любом натуральном $n > 1$ справедливо неравенство $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$.

2. Найти число всевозможных четырехзначных чисел, составленных из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7 так, что в записи каждого числа присутствует одна цифра 1.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(99)^3$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, состоящее из всех пар вида $(x; \operatorname{ctg} x)$, где $x \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $A = \{-25, -24, \ldots, 24, 25\}$. Убедиться, что отношение ρ на множестве A, определенное так: $a\rho b \leftrightarrow a - b$ делится на 8, является отношением эквивалентности, и найти класс эквивалентности элемента -3.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{13} | a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0\}$ замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли $(M, \cdot)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 = -6; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -8; \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -10, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 1$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 & 8 \\ 1 & 11 & 17 & 16 \\ 1 & 10 & 10 & 18 \\ 1 & 10 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -3 & 1 & 12 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 21

1. Доказать по индукции, что n различных прямых, проведенных через одну точку, делят плоскость на $2n$ частей.

2. Найти число всевозможных четырехзначных чисел, составленных из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7 так, что в записи каждого числа присутствует по крайней мере одна цифра 1 и все цифры различны.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(4+\sqrt{3})^6$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, состоящее из всех пар вида $(\cos x; x)$, где $x \in \mathbb{R}$.

5. Привести пример нерефлексивного, симметричного и транзитивного отношения на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{17} | a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0\}$ замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли $(M, \cdot)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -1; \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3; \\ x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 0; \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -7; \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -4. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 4$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 7 \\ -3 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & 15 \\ 1 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ . & . & \dots & . \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 2 & 19 & 25 \\ 1 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 22

1. Доказать по индукции, что при любом натуральном n $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. На плоскости дано n точек, из которых m дежат на одной прямой, а среди остальных точек нет трех, лежащих на одной прямой. Найти число прямых, проходящих через две из этих точек.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(6-5\sqrt{2})^5$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, состоящее из всех пар вида $(\operatorname{ctg} x; x)$, где $x\in\mathbb{R}$.

5. Привести пример рефлексивного, несимметричного и транзитивного отношения на множестве $A=\{1,2,3,4\}$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M=\{a+b\sqrt{17}|a,b\in\mathbb{Q}, a^2+b^2>0\}$ замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли $(M,\cdot)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -4x_1-4x_2+4x_3-x_5=-5;\\ -2x_1+3x_2+4x_3+4x_5=9;\\ 2x_1-x_2-x_3+2x_4-x_5=1;\\ -x_1-2x_2-3x_3+x_4+4x_5=-1,\end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x)=5x^3+2x^2-3x-4$ от матриц $A=\begin{pmatrix}1&-4\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3&3\\3&3&-2\\-3&4&-1\end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix}-1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\2&1\end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а)$X\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&-2\end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix}4&3&0\\4&-2&0\\2&3&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-4&-2\\1&1\\2&-3\end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix}4&10&9&11\\-1&1&7&6\\0&0&1&6\\4&10&9&12\end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&-3&3&0&3\\1&3&-4&2&-4\\-1&-4&-4&-2&1\\0&0&1&-3&-2\\-2&3&1&4&1\end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ . & . & \dots & . \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 17 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16; \\ x_1 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 23

1. Пусть $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=a$,
$A_2=m-\dfrac{a}{m-1}$, $A_3=m-\dfrac{a}{A_2}$, …, $A_{k+1}=m-\dfrac{a}{A_k}$ при $k>1$.
Доказать по индукции, что $A_n=\dfrac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}$.

2. В пространстве дано n точек, из которых m дежат на одной плоскости, а среди остальных точек нет четырех, лежащих в одной плоскости. Найти число плоскостей, проходящих через три из этих точек.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(1+\sqrt{3})^6$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, состоящее из всех пар вида $(n^2-4; n^2-5)$, где $n\in\mathbb{N}$.

5. Привести пример рефлексивного, симметричного и нетранзитивного отношения на множестве $A=\{1,2,3,4\}$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M=\{a+b\sqrt{13}|a,b\in\mathbb{Q}, a^2+b^2>0\}$ замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли $(M,\cdot)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1+3x_2-3x_3-x_4+2x_5=4;\\ 3x_1-x_2-4x_3+4x_4+x_5=3;\\ 2x_1-3x_2-4x_3+3x_5=-2;\\ 2x_1-3x_2-3x_3=-4;\\ 4x_1+x_3-x_4-x_5=3.\end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x)=4x^3+2x^2-5x-1$ от матриц
$A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\2&3&-2\end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\-3&-2\end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а)$X\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-1\end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix}4&0&0\\-2&-2&1\\-1&-4&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&-4\\0&2\\2&3\end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix}-1&8&6&8\\-2&1&6&7\\0&-1&7&13\\-1&8&6&9\end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка $2n$ $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -2 & 1 & 13 \\ -1 & 7 & 26 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 13; \\ x_1 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 24

1. Доказать по индукции, что если $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ и для всякого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, имеет место равенство $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$, то $a_n = 2^n + 3^n$.

2. На плоскости дано n точек, из которых m дежат на одной прямой, а среди остальных точек нет трех, лежащих на одной прямой. Найти число треугольников, которые можно получить, соединяя точки по три.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})^6$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, состоящее из всех пар вида $(n-4; n^2-5)$, где $n \in \mathbb{N}$.

5. Привести пример нерефлексивного, антисимметричного и транзитивного отношения на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{11} | a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}$, где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли $(M, \cdot)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 1; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 15; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 9, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 7x - 1$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а)$X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 9 & 10 & 13 \\ 1 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель порядка n $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 1 & 10 & 15 \\ 2 & 18 & 17 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 25

1. Доказать по индукции, что если $a_1 = 7$, $a_2 = 29$ и для всякого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, имеет место равенство $a_k = 7a_{k-1} - 10a_{k-2}$, то $a_n = 2^n + 5^n$.

2. Имеется 6 шаров: 3 черных, 1 красный, 1 белый, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по четыре.

3. Вычислить по биномиальной формуле $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$, состоящее из всех пар вида $(n^2 - 5; n - 1)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

5. Привести пример рефлексивного, неантисимметричного и транзитивного отношения на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Убедиться, что множество действительных чисел $M = \{a + b\sqrt{7} | a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}$, где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, замкнуто относительно обычной операции умножения действительных чисел. Выяснить, является ли $(M, \cdot)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 2; \\ -x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -8; \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 5; \\ -3x_1 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 6. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ от матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)$X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 17 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 1 & 11 & 18 \\ 3 & 31 & 33 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 26

1. Доказать по индукции, что если $a_1 = 8$, $a_2 = 34$ и для всякого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, имеет место равенство $a_k = 8a_{k-1} - 15a_{k-2}$, то $a_n = 3^n + 5^n$.

2. Имеется 6 шаров: 2 черных, 2 красных, 1 белый, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по четыре.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 2048. Найти степень бинома.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{Q}$, состоящее из всех пар вида $\left((m,n); \frac{m}{n}\right)$, где $m, n \in \mathbb{Z}$.

5. Привести пример рефлексивного, антисимметричного и нетранзитивного отношения на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Пусть операция $\circ$ на декартовой степени $M = \mathbb{Q}^2$ множества всех рациональных чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения рациональных чисел так: $(x, y) \circ (a, b) = (xa + yb, xb + ya)$. Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли $(M, \circ)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 8; \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 = -7; \\ -x_1 + 3x_3 - 4x_4 = -2; \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а)$X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 3 & 11 & 12 & 6 \\ -1 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 11 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

13. Доказать равенство $\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 1 & 7 & 19 \\ 3 & 18 & 32 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 23; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 33; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 27

1. Доказать по индукции, что если $a_1 = 7$, $a_2 = 25$ и для всякого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, имеет место равенство $a_k = 7a_{k-1} - 12a_{k-2}$, то $a_n = 3^n + 4^n$.

2. Имеется 7 шаров: 2 черных, 2 красных, 2 белых, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по четыре.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения, стоящих нечетных местах, равна 1024. Найти степень бинома.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Z}^2$, состоящее из всех пар вида $\left(\frac{m}{n}; (m, n)\right)$, где $m, n \in \mathbb{Z}$.

5. Пусть $A = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$. Убедиться, что отношение ρ на множестве A, определенное так: $a\rho b \leftrightarrow a - b$ делится на 3, является отношением эквивалентности, и найти фактормножество A/ρ.

6. Пусть операция $\circ$ на декартовой степени $M = \mathbb{R}^2$ множества всех действительных чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения действительных чисел так: $(x, y) \circ (a, b) = (xa + yb, xb + ya)$. Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли $(M, \circ)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -4x_1 + x_3 - x_4 - 2x_5 = -6; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 8; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 3$ от матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)$X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 & 11 \\ -3 & 10 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 7 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 3 & 20 & 25 \\ 1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 28

1. Доказать по индукции, что если $a_1 = 9$, $a_2 = 41$ и для всякого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, имеет место равенство $a_k = 9a_{k-1} - 20a_{k-2}$, то $a_n = 4^n + 5^n$.

2. Имеется 6 шаров: 2 черных, 2 красных, 1 белый, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по пять.

3. Найти слагаемые, являющиеся рациональными числами, в разложении по биномиальной формуле $(\sqrt[8]{3} + \sqrt[9]{2})^{24}$.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}$, состоящее из всех пар вида $(n^2 - 5; n - 1)$, где $n \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $A = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$. Убедиться, что отношение ρ на множестве A, определенное так: $a\rho b \leftrightarrow a - b$ делится на 4, является отношением эквивалентности, и найти фактормножество A/ρ.

6. Пусть операция $\circ$ на декартовой степени $M = \mathbb{Z}^2$ множества всех целых чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так: $(x, y) \circ (a, b) = (xa + yb, xb + ya)$. Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли $(M, \circ)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_5 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1; \\ -2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1; \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 = -1, \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x + 4$ от матриц
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:
а)$X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 9 \\ -5 & 6 & 7 & 9 \\ -2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 22 & 21 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -31; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -40; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -17. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 29

1. Доказать по индукции, что если $a_1 = 9$, $a_2 = 45$ и для всякого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, имеет место равенство $a_k = 9a_{k-1} - 18a_{k-2}$, то $a_n = 3^n + 6^n$.

2. Имеется 7 шаров: 2 черных, 2 красных, 2 белых, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по пять.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 4096. Найти степень бинома.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, состоящее из всех пар вида $(n^2 - 5; n - 1)$, где $n \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $A = \{-6, -5, \ldots, 5, 6\}$. Убедиться, что отношение ρ на множестве A, определенное так: $a\rho b \leftrightarrow a - b$ делится на 5, является отношением эквивалентности, и найти фактормножество A/ρ.

6. Пусть операция $\circ$ на декартовой степени $M = \mathbb{Z}^2$ множества всех целых чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так: $(x, y) \circ (a, b) = (xa, xb + ya + yb)$. Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли $(M, \circ)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 13; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -3; \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = -9; \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)$X \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 11 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & -4 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 9 \\ 5 & 22 & 31 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -11; \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 = 26; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1 по основам алгебры

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 30

1. Доказать по индукции, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$. Записать сумму в левой части с помощью символа $\sum$.

2. Имеется 7 шаров: 2 черных, 2 красных, 2 белых, 1 синий. Найти число способов, которыми можно разложить их в ряд по шесть.

3. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 8192. Найти степень бинома.

4. Определить, какими из свойств всюду определенности, функциональности, инъективности и сюръективности обладает соответствие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, состоящее из всех пар вида $(n^2-6; n+11)$, где $n \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $A = \{-7, -6, \ldots, 5, 6, 7\}$. Убедиться, что отношение ρ на множестве A, определенное так: $a\rho b \leftrightarrow a - b$ делится на 7, является отношением эквивалентности, и найти фактормножество A/ρ.

6. Пусть операция $\circ$ на декартовой степени $M = \mathbb{Z}^2$ множества всех целых чисел, определена с помощью обычных операций сложения и умножения целых чисел так: $(x, y) \circ (a, b) = (xb + ya + yb, xa)$. Убедиться, что эта операция коммутативна и ассоциативна. Выяснить, является ли $(M, \circ)$ абелевой группой.

7. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 13; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -3; \\ x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 5x_5 = -22; \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

8. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ от матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right)^n$.

10. Решить следующие матричные уравнения:

а)$X \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу к данной матрице с помощью решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 22 & 12 & 15 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}$

14. Найти обратные матрицы для следующих матриц по формуле через присоединенную матрицу

а) $\begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 9 \\ 3 & 15 & 24 \end{pmatrix}$.

15. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 = 26; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$