

Полукольцевые тождества на инверсных полугруппах

М.В.Волков

Уральский федеральный университет, Екатеринбург



Москва, КВА МГУ



Моноид Брандта

Моноид Брандта B_2^1 состоит из следующих шести 2×2 -матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Моноид Брандта

Моноид Брандта B_2^1 состоит из следующих шести 2×2 -матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот набор матриц замкнут относительно матричного умножения и содержит единичную матрицу, т.е. моноид Брандта действительно является моноидом в смысле теории полугрупп.

Моноид Брандта

Моноид Брандта B_2^1 состоит из следующих шести 2×2 -матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот набор матриц замкнут относительно матричного умножения и содержит единичную матрицу, т.е. моноид Брандта действительно является моноидом в смысле теории полугрупп.

Генрих Брандт (Heinrich Brandt, 1886–1954) пришел к рассмотрению **группоидов** (в теоретико-категорном смысле), изучая композицию целочисленных квадратичных форм от четырех переменных.

Моноид Брандта

Моноид Брандта B_2^1 состоит из следующих шести 2×2 -матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот набор матриц замкнут относительно матричного умножения и содержит единичную матрицу, т.е. моноид Брандта действительно является моноидом в смысле теории полугрупп.

Генрих Брандт (Heinrich Brandt, 1886–1954) пришел к рассмотрению **группоидов** (в теоретико-категорном смысле), изучая композицию целочисленных квадратичных форм от четырех переменных. Вот цитата из его статьи «Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes» (Math. Ann. 1927. Vol. 96):

“Durch Probleme aus der Theorie der quaternären quadratischen Formen bin ich schon vor längerer Zeit auf eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes geführt worden, die auch auf anderen Gebieten von Bedeutung sein dürfte – erscheint sie doch überhaupt als eine naturgemäße und sogar notwendige Ergänzung zur gewöhnlichen Gruppentheorie . . .”

Москва, КВА МГУ

Моноид Брандта (2)

То, что $n \times n$ матричные единицы произвольного фиксированного размера n составляют группоид, сам Брандт не отмечал.

Моноид Брандта (2)

То, что $n \times n$ матричные единицы произвольного фиксированного размера n составляют группоид, сам Брандт не отмечал.

Этот факт, равно как и идея добавить к матричным единицам нулевую матрицу, чтобы получить **полугруппу** относительно матричного умножения, появились в статье Альфреда Клиффорда (Alfred H. Clifford, 1908–1992) «Matrix representation of completely simple semigroups» (Amer. J. Math. 1942, Vol. 64).

Моноид Брандта (2)

То, что $n \times n$ матричные единицы произвольного фиксированного размера n составляют группоид, сам Брандт не отмечал.

Этот факт, равно как и идея добавить к матричным единицам нулевую матрицу, чтобы получить **полугруппу** относительно матричного умножения, появились в статье Альфреда Клиффорда (Alfred H. Clifford, 1908–1992) «Matrix representation of completely simple semigroups» (Amer. J. Math. 1942, Vol. 64).

Термин «полугруппа Брандта» в этой статье еще не возникал, но он стал стандартным после выхода в 1961-м г. I-го тома монографии Клиффорда и Престона «Алгебраическая теория полугрупп».

Моноид Брандта (2)

То, что $n \times n$ матричные единицы произвольного фиксированного размера n составляют группоид, сам Брандт не отмечал.

Этот факт, равно как и идея добавить к матричным единицам нулевую матрицу, чтобы получить **полугруппу** относительно матричного умножения, появились в статье Альфреда Клиффорда (Alfred H. Clifford, 1908–1992) «Matrix representation of completely simple semigroups» (Amer. J. Math. 1942, Vol. 64).

Термин «полугруппа Брандта» в этой статье еще не возникал, но он стал стандартным после выхода в 1961-м г. I-го тома монографии Клиффорда и Престона «Алгебраическая теория полугрупп».

Полугруппы и моноиды Брандта играют исключительно важную роль как в структурной теории полугрупп, так и в теории полугрупповых многообразий.

Моноид Брандта (2)

То, что $n \times n$ матричные единицы произвольного фиксированного размера n составляют группоид, сам Брандт не отмечал.

Этот факт, равно как и идея добавить к матричным единицам нулевую матрицу, чтобы получить **полугруппу** относительно матричного умножения, появились в статье Альфреда Клиффорда (Alfred H. Clifford, 1908–1992) «Matrix representation of completely simple semigroups» (Amer. J. Math. 1942, Vol. 64).

Термин «полугруппа Брандта» в этой статье еще не возникал, но он стал стандартным после выхода в 1961-м г. I-го тома монографии Клиффорда и Престона «Алгебраическая теория полугрупп».

Полугруппы и моноиды Брандта играют исключительно важную роль как в структурной теории полугрупп, так и в теории полугрупповых многообразий. В последней теории моноид B_2^1 – универсальный «мальчиш-плохиш», т.е. источник всевозможных контрпримеров наименьшего размера.

Моноид Брандта не имеет конечного базиса тождеств

Для этого доклада важен такой результат, принадлежащий Питеру Перкинсу (Peter Perkins, «Bases for equational theories of semigroups», J. Algebra 1969, Vol. 11):

Теорема 1

Тождества 6-элементного моноида B_2^1 не имеют конечного базиса.

Моноид Брандта не имеет конечного базиса тождеств

Для этого доклада важен такой результат, принадлежащий Питеру Перкинсу (Peter Perkins, «Bases for equational theories of semigroups», J. Algebra 1969, Vol. 11):

Теорема 1

Тождества 6-элементного моноида B_2^1 не имеют конечного базиса.

Теорема Перкинса контрастирует с установленным немного раньше фактом конечности базиса тождеств любой конечной группы (Оутс и Пауэлл, 1964).

Моноид Брандта не имеет конечного базиса тождеств

Для этого доклада важен такой результат, принадлежащий Питеру Перкинсу (Peter Perkins, «Bases for equational theories of semigroups», J. Algebra 1969, Vol. 11):

Теорема 1

Тождества 6-элементного моноида B_2^1 не имеют конечного базиса.

Теорема Перкинса контрастирует с установленным немного раньше фактом конечности базиса тождеств любой конечной группы (Оутс и Пауэлл, 1964). Моноид B_2^1 был первым примером конечной полугруппы без конечного базиса тождеств.

Моноид Брандта не имеет конечного базиса тождеств

Для этого доклада важен такой результат, принадлежащий Питеру Перкинсу (Peter Perkins, «Bases for equational theories of semigroups», J. Algebra 1969, Vol. 11):

Теорема 1

Тождества 6-элементного моноида B_2^1 не имеют конечного базиса.

Теорема Перкинса контрастирует с установленным немного раньше фактом конечности базиса тождеств любой конечной группы (Оутс и Пауэлл, 1964). Моноид B_2^1 был первым примером конечной полугруппы без конечного базиса тождеств. Позднее выяснилось, что это пример с наименьшим возможным числом элементов – все полугруппы с пятью и менее элементами имеют конечный базис тождеств (Трахтман, 1991).

Моноид Брандта не имеет конечного базиса тождеств

Для этого доклада важен такой результат, принадлежащий Питеру Перкинсу (Peter Perkins, «Bases for equational theories of semigroups», J. Algebra 1969, Vol. 11):

Теорема 1

Тождества 6-элементного моноида B_2^1 не имеют конечного базиса.

Теорема Перкинса контрастирует с установленным немного раньше фактом конечности базиса тождеств любой конечной группы (Оутс и Пауэлл, 1964). Моноид B_2^1 был первым примером конечной полугруппы без конечного базиса тождеств. Позднее выяснилось, что это пример с наименьшим возможным числом элементов – все полугруппы с пятью и менее элементами имеют конечный базис тождеств (Трахтман, 1991). Более того, B_2^1 – это один из всего четырех примеров 6-элементных полугрупп без конечного базиса тождеств (Ли и Жанг, 2015).

Моноид Брандта как инверсная полугруппа

Элемент a полугруппы S называется **регулярным**, если существует элемент $b \in S$, для которого $aba = a$ и $bab = b$; говорят, что b является **инверсным** к a .

Моноид Брандта как инверсная полугруппа

Элемент a полугруппы S называется **регулярным**, если существует элемент $b \in S$, для которого $aba = a$ и $bab = b$; говорят, что b является **инверсным** к a . Полугруппа называется **инверсной**, если каждый ее элемент имеет **единственный** инверсный.

Моноид Брандта как инверсная полугруппа

Элемент a полугруппы S называется **регулярным**, если существует элемент $b \in S$, для которого $aba = a$ и $bab = b$; говорят, что b является **инверсным** к a . Полугруппа называется **инверсной**, если каждый ее элемент имеет **единственный** инверсный. В инверсной полугруппе элемент, инверсный к a , обозначают a^{-1} .

Моноид Брандта как инверсная полугруппа

Элемент a полугруппы S называется **регулярным**, если существует элемент $b \in S$, для которого $aba = a$ и $bab = b$; говорят, что b является **инверсным** к a . Полугруппа называется **инверсной**, если каждый ее элемент имеет **единственный** инверсный. В инверсной полугруппе элемент, инверсный к a , обозначают a^{-1} . Инверсные полугруппы служат абстрактной моделью **частичных** взаимно однозначных преобразований подобно тому, как группы служат абстрактной моделью **полных** взаимно однозначных преобразований.

Моноид Брандта как инверсная полугруппа

Элемент a полугруппы S называется **регулярным**, если существует элемент $b \in S$, для которого $aba = a$ и $bab = b$; говорят, что b является **инверсным** к a . Полугруппа называется **инверсной**, если каждый ее элемент имеет **единственный** инверсный. В инверсной полугруппе элемент, инверсный к a , обозначают a^{-1} . Инверсные полугруппы служат абстрактной моделью **частичных** взаимно однозначных преобразований подобно тому, как группы служат абстрактной моделью **полных** взаимно однозначных преобразований.

Инверсные полугруппы естественно рассматривать как алгебры с двумя операциями – умножением и взятием инверсного элемента.

Моноид Брандта B_2^1 – инверсная полугруппа.

Моноид Брандта как инверсная полугруппа

Элемент a полугруппы S называется **регулярным**, если существует элемент $b \in S$, для которого $aba = a$ и $bab = b$; говорят, что b является **инверсным** к a . Полугруппа называется **инверсной**, если каждый ее элемент имеет **единственный** инверсный. В инверсной полугруппе элемент, инверсный к a , обозначают a^{-1} . Инверсные полугруппы служат абстрактной моделью **частичных** взаимно однозначных преобразований подобно тому, как группы служат абстрактной моделью **полных** взаимно однозначных преобразований.

Инверсные полугруппы естественно рассматривать как алгебры с двумя операциями – умножением и взятием инверсного элемента.

Моноид Брандта B_2^1 – инверсная полугруппа. Легко проверить, что инверсным элементом к данной матрице из B_2^1 будет просто ее транспонированная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B_2^1 не имеет конечного базиса инверсных тождеств

Для инверсных полугрупп уместно изучать их **инверсные** тождества, т.е. тождества, в записи которых используются обе операции.

B_2^1 не имеет конечного базиса инверсных тождеств

Для инверсных полугрупп уместно изучать их **инверсные** тождества, т.е. тождества, в записи которых используются обе операции.

Если S – инверсная полугруппа, то, вообще говоря, связи между конечной базисуемостью ее «простых» и ее инверсных тождеств **нет**

B_2^1 не имеет конечного базиса инверсных тождеств

Для инверсных полугрупп уместно изучать их **инверсные** тождества, т.е. тождества, в записи которых используются обе операции.

Если S – инверсная полугруппа, то, вообще говоря, связи между конечной базлируемостью ее «простых» и ее инверсных тождеств **нет**: есть даже группы как такие, что их полугрупповые тождества конечно базлируемы, а их инверсные (т.е. групповые) тождества нет

B_2^1 не имеет конечного базиса инверсных тождеств

Для инверсных полугрупп уместно изучать их **инверсные** тождества, т.е. тождества, в записи которых используются обе операции.

Если S – инверсная полугруппа, то, вообще говоря, связи между конечной базлируемостью ее «простых» и ее инверсных тождеств **нет**: есть даже группы как такие, что их полугрупповые тождества конечно базлируемы, а их инверсные (т.е. групповые) тождества нет, так и такие, групповые тождества которых имеет конечный базис, состоящий из полугрупповых тождеств, в то время как полугрупповые тождества этих групп не конечно базлируемы.

B_2^1 не имеет конечного базиса инверсных тождеств

Для инверсных полугрупп уместно изучать их **инверсные** тождества, т.е. тождества, в записи которых используются обе операции.

Если S – инверсная полугруппа, то, вообще говоря, связи между конечной базлируемостью ее «простых» и ее инверсных тождеств **нет**: есть даже группы как такие, что их полугрупповые тождества конечно базлируемы, а их инверсные (т.е. групповые) тождества нет, так и такие, групповые тождества которых имеет конечный базис, состоящий из полугрупповых тождеств, в то время как полугрупповые тождества этих групп не конечно базлируемы.

Однако, как показал Евгений Клейман («О базисах тождеств многообразий инверсных полугрупп», Сиб. матем. журн., 1979, т.20), моноид B_2^1 остается «плохишом» и как инверсная полугруппа.

Теорема 2

Инверсные тождества моноида B_2^1 не имеют конечного базиса.

B_2^1 не имеет конечного базиса инверсных тождеств

Для инверсных полугрупп уместно изучать их **инверсные** тождества, т.е. тождества, в записи которых используются обе операции.

Если S – инверсная полугруппа, то, вообще говоря, связи между конечной базлируемостью ее «простых» и ее инверсных тождеств **нет**: есть даже группы как такие, что их полугрупповые тождества конечно базлируемы, а их инверсные (т.е. групповые) тождества нет, так и такие, групповые тождества которых имеет конечный базис, состоящий из полугрупповых тождеств, в то время как полугрупповые тождества этих групп не конечно базлируемы.

Однако, как показал Евгений Клейман («О базисах тождеств многообразий инверсных полугрупп», Сиб. матем. журн., 1979, т.20), моноид B_2^1 остается «плохишом» и как инверсная полугруппа.

Теорема 2

Инверсные тождества моноида B_2^1 не имеют конечного базиса.

Опять-таки это пример с наименьшим возможным числом элементов, причем на сей раз – единственный (Клейман, 1979).

Москва, КВА МГУ

Моноид Брандта как ай-полукольцо

В определении B_2^1 как множества из шести 2×2 -матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не уточнялось над каким полем рассматриваются матрицы, поскольку это не было важно

Моноид Брандта как ай-полукольцо

В определении B_2^1 как множества из шести 2×2 -матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не уточнялось над каким полем рассматриваются матрицы, поскольку это не было важно: при умножении «строка на столбец» в каждой возникающей сумме максимум одно слагаемое ненулевое.

Моноид Брандта как ай-полукольцо

В определении B_2^1 как множества из шести 2×2 -матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не уточнялось над каким полем рассматриваются матрицы, поскольку это не было важно: при умножении «строка на столбец» в каждой возникающей сумме максимум одно слагаемое ненулевое. Поэтому можно рассматривать эти же матрицы и над **булевым полукольцом** $\mathbb{B} := (\{0, 1\}, +, \cdot)$ с операциями:

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1.$$

Моноид Брандта как ай-полукольцо

В определении B_2^1 как множества из шести 2×2 -матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не уточнялось над каким полем рассматриваются матрицы, поскольку это не было важно: при умножении «строка на столбец» в каждой возникающей сумме максимум одно слагаемое ненулевое. Поэтому можно рассматривать эти же матрицы и над **булевым полукольцом** $\mathbb{B} := (\{0, 1\}, +, \cdot)$ с операциями:

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1.$$

Над $\mathbb{B}$ моноид B_2^1 имеет и другое представление 2×2 -матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Моноид Брандта как ай-полукольцо

В определении B_2^1 как множества из шести 2×2 -матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не уточнялось над каким полем рассматриваются матрицы, поскольку это не было важно: при умножении «строка на столбец» в каждой возникающей сумме максимум одно слагаемое ненулевое. Поэтому можно рассматривать эти же матрицы и над **булевым полукольцом** $\mathbb{B} := (\{0, 1\}, +, \cdot)$ с операциями:

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1.$$

Над $\mathbb{B}$ моноид B_2^1 имеет и другое представление 2×2 -матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что второй набор матриц замкнут не только относительно умножения матриц, но и относительно их сложения!

Москва, КВА МГУ

Моноид Брандта как аи-полукольцо (2)

Напомним, что алгебра $(S; +, \cdot)$ с двумя бинарными операциями называется **полукольцом**, если для всех $a, b, c \in S$

$$a + b = b + a,$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Моноид Брандта как аи-полукольцо (2)

Напомним, что алгебра $(S; +, \cdot)$ с двумя бинарными операциями называется **полукольцом**, если для всех $a, b, c \in S$

$$a + b = b + a,$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Полукольцо S называется **аддитивно идемпотентным (аи-полукольцом)**, если $a + a = a$ для всех $a \in S$.

Моноид Брандта как аи-полукольцо (2)

Напомним, что алгебра $(S; +, \cdot)$ с двумя бинарными операциями называется **полукольцом**, если для всех $a, b, c \in S$

$$\begin{aligned}a + b &= b + a, \\a + (b + c) &= (a + b) + c, \\a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, \\a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\(a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c.\end{aligned}$$

Полукольцо S называется **аддитивно идемпотентным (аи-полукольцом)**, если $a + a = a$ для всех $a \in S$.

Примерами аи-полуколец служат **тропические** полукольца, булево полукольцо $\mathbb{B}$ и полукольца матриц над $\mathbb{B}$.

Моноид Брандта как аи-полукольцо (2)

Напомним, что алгебра $(S; +, \cdot)$ с двумя бинарными операциями называется **полукольцом**, если для всех $a, b, c \in S$

$$\begin{aligned}a + b &= b + a, \\a + (b + c) &= (a + b) + c, \\a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, \\a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\(a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c.\end{aligned}$$

Полукольцо S называется **аддитивно идемпотентным (аи-полукольцом)**, если $a + a = a$ для всех $a \in S$.

Примерами аи-полуколец служат **тропические** полукольца, булево полукольцо $\mathbb{B}$ и полукольца матриц над $\mathbb{B}$.

Итак, моноид B_2^1 является аи-полукольцом.

Моноид Брандта как аи-полукольцо (2)

Напомним, что алгебра $(S; +, \cdot)$ с двумя бинарными операциями называется **полукольцом**, если для всех $a, b, c \in S$

$$\begin{aligned}a + b &= b + a, \\a + (b + c) &= (a + b) + c, \\a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, \\a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\(a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c.\end{aligned}$$

Полукольцо S называется **аддитивно идемпотентным (аи-полукольцом)**, если $a + a = a$ для всех $a \in S$.

Примерами аи-полуколец служат **тропические** полукольца, булево полукольцо $\mathbb{B}$ и полукольца матриц над $\mathbb{B}$.

Итак, моноид B_2^1 является аи-полукольцом. Легко показать, что сложение булевых матриц – единственное идемпотентное сложение, которое делает B_2^1 полукольцом.

Аи-полукольцо B_2^1 не имеет конечного базиса тождеств

Для аи-полуколец уместно изучать их тождества, в записи которых используются обе операции.

Аи-полукольцо B_2^1 не имеет конечного базиса тождеств

Для аи-полуколец уместно изучать их тождества, в записи которых используются обе операции. Связь между конечной базизируемостью тождеств аи-полукольца $(S; +, \cdot)$ и конечной базизируемостью тождеств его мультипликативной полугруппы $(S; \cdot)$ неочевидна. (Некоторые примеры будут приведены в конце доклада.)

Аи-полукольцо B_2^1 не имеет конечного базиса тождеств

Для аи-полуколец уместно изучать их тождества, в записи которых используются обе операции. Связь между конечной базизируемостью тождеств аи-полукольца $(S; +, \cdot)$ и конечной базизируемостью тождеств его мультипликативной полугруппы $(S; \cdot)$ неочевидна. (Некоторые примеры будут приведены в конце доклада.)

Но моноид B_2^1 и в этой ипостаси сохраняет «плохое» поведение:

Теорема 3

Тождества B_2^1 как аи-полукольца не имеют конечного базиса.

Аи-полукольцо B_2^1 не имеет конечного базиса тождеств

Для аи-полуколец уместно изучать их тождества, в записи которых используются обе операции. Связь между конечной базизируемостью тождеств аи-полукольца $(S; +, \cdot)$ и конечной базизируемостью тождеств его мультипликативной полугруппы $(S; \cdot)$ неочевидна. (Некоторые примеры будут приведены в конце доклада.)

Но моноид B_2^1 и в этой ипостаси сохраняет «плохое» поведение:

Теорема 3

Тождества B_2^1 как аи-полукольца не имеют конечного базиса.

Теорема 3 опубликована докладчиком («Semiring identities of the Brandt monoid», Algebra Universalis 2021, Vol.82).

Аи-полукольцо B_2^1 не имеет конечного базиса тождеств

Для аи-полуколец уместно изучать их тождества, в записи которых используются обе операции. Связь между конечной базизируемостью тождеств аи-полукольца $(S; +, \cdot)$ и конечной базизируемостью тождеств его мультипликативной полугруппы $(S; \cdot)$ неочевидна. (Некоторые примеры будут приведены в конце доклада.)

Но моноид B_2^1 и в этой ипостаси сохраняет «плохое» поведение:

Теорема 3

Тождества B_2^1 как аи-полукольца не имеют конечного базиса.

Теорема 3 опубликована докладчиком («Semiring identities of the Brandt monoid», Algebra Universalis 2021, Vol.82). Независимо и с совсем другим доказательством этот же результат нашли коллеги из Мельбурна и Сианя (Marcel Jackson, Miaomiao Ren, Xianzhong Zhao, «Nonfinitely based ai-semirings with finitely based semigroup reducts»); их статья готовится к печати.

Естественный порядок инверсной полугруппы

Мое доказательство теоремы 3 использует некоторые свойства так называемого **естественного порядка**, который определен на любой инверсной полугруппе $(S, \cdot, {}^{-1})$:

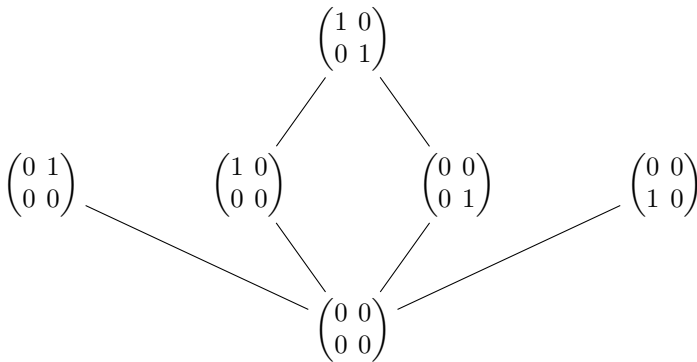
$$\leq := \{(a, b) \in S \times S \mid a = eb \text{ для некоторого идемпотента } e \in S\}$$

Естественный порядок инверсной полугруппы

Мое доказательство теоремы 3 использует некоторые свойства так называемого **естественного порядка**, который определен на любой инверсной полугруппе $(S, \cdot, ^{-1})$:

$$\leq := \{(a, b) \in S \times S \mid a = eb \text{ для некоторого идемпотента } e \in S\}$$

Пример: вот как выглядит естественный порядок на B_2^1 :



Естественный порядок инверсной полугруппы (2)

Нам понадобятся три простых и хорошо известных свойства естественного порядка:

Естественный порядок инверсной полугруппы (2)

Нам понадобятся три простых и хорошо известных свойства естественного порядка:

1) порядок $\leq$ совместим как с умножением, так и со взятием инверсного элемента

Естественный порядок инверсной полугруппы (2)

Нам понадобятся три простых и хорошо известных свойства естественного порядка:

- 1) порядок $\leq$ совместим как с умножением, так и со взятием инверсного элемента;
- 2) $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a = bf$ для некоторого идемпотента $f \in S$

Естественный порядок инверсной полугруппы (2)

Нам понадобятся три простых и хорошо известных свойства естественного порядка:

- 1) порядок $\leq$ совместим как с умножением, так и со взятием инверсного элемента;
- 2) $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a = bf$ для некоторого идемпотента $f \in S$;
- 3) если подмножество $H \subseteq S$ имеет точную нижнюю грань относительно $\leq$, то таковы и подмножества sH и Hs для любого $s \in S$ и $\inf(sH) = s(\inf H)$, $\inf(Hs) = (\inf H)s$.

Естественный порядок инверсной полугруппы (2)

Нам понадобятся три простых и хорошо известных свойства естественного порядка:

1) порядок $\leq$ совместим как с умножением, так и со взятием инверсного элемента;

2) $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a = bf$ для некоторого идемпотента $f \in S$;

3) если подмножество $H \subseteq S$ имеет точную нижнюю грань относительно $\leq$, то таковы и подмножества sH и Hs для любого $s \in S$ и $\inf(sH) = s(\inf H)$, $\inf(Hs) = (\inf H)s$.

Вообще говоря, точные нижние грани относительно $\leq$ существовать не обязаны.

Лемма

Пусть $(S, \cdot, {}^{-1})$ – инверсная полугруппа, в которой для некоторого n выполнено тождество $x^n \approx x^{n+1}$. Положим $x \oplus y := (xy^{-1})^n x$. Тогда $(S, \oplus, \cdot)$ – аи-полукольцо.

Лемма

Пусть $(S, \cdot, ^{-1})$ – инверсная полугруппа, в которой для некоторого n выполнено тождество $x^n \approx x^{n+1}$. Положим $x \oplus y := (xy^{-1})^n x$. Тогда $(S, \oplus, \cdot)$ – аи-полукольцо.

Доказательство. Пусть $a, b, c \in S$ таковы, что $c \leq a$ и $c \leq b$. Тогда $c^{-1} \leq b^{-1}$ и в силу совместимости порядка с умножением

$$c = (cc^{-1})^n c \leq (ab^{-1})^n a = a \oplus b.$$

Лемма

Пусть $(S, \cdot, ^{-1})$ – инверсная полугруппа, в которой для некоторого n выполнено тождество $x^n \approx x^{n+1}$. Положим $x \oplus y := (xy^{-1})^n x$. Тогда $(S, \oplus, \cdot)$ – аи-полукольцо.

Доказательство. Пусть $a, b, c \in S$ таковы, что $c \leq a$ и $c \leq b$. Тогда $c^{-1} \leq b^{-1}$ и в силу совместимости порядка с умножением

$$c = (cc^{-1})^n c \leq (ab^{-1})^n a = a \oplus b.$$

Обратно, $(ab^{-1})^n = (ab^{-1})^{n+1} = \dots = (ab^{-1})^{2n}$, т.е. $(ab^{-1})^n$ – идемпотент. Отсюда $a \oplus b = (ab^{-1})^n \cdot a \leq a$.

Лемма

Пусть $(S, \cdot, ^{-1})$ – инверсная полугруппа, в которой для некоторого n выполнено тождество $x^n \approx x^{n+1}$. Положим $x \oplus y := (xy^{-1})^n x$. Тогда $(S, \oplus, \cdot)$ – аи-полукольцо.

Доказательство. Пусть $a, b, c \in S$ таковы, что $c \leq a$ и $c \leq b$. Тогда $c^{-1} \leq b^{-1}$ и в силу совместимости порядка с умножением

$$c = (cc^{-1})^n c \leq (ab^{-1})^n a = a \oplus b.$$

Обратно, $(ab^{-1})^n = (ab^{-1})^{n+1} = \dots = (ab^{-1})^{2n}$, т.е. $(ab^{-1})^n$ – идемпотент. Отсюда $a \oplus b = (ab^{-1})^n \cdot a \leq a$. С другой стороны,

$$a \oplus b = (ab^{-1})^n a = (ab^{-1})^{n+1} a = \dots = (ab^{-1})^{2n-1} a$$

Лемма

Пусть $(S, \cdot, ^{-1})$ – инверсная полугруппа, в которой для некоторого n выполнено тождество $x^n \approx x^{n+1}$. Положим $x \oplus y := (xy^{-1})^n x$. Тогда $(S, \oplus, \cdot)$ – аи-полукольцо.

Доказательство. Пусть $a, b, c \in S$ таковы, что $c \leq a$ и $c \leq b$. Тогда $c^{-1} \leq b^{-1}$ и в силу совместимости порядка с умножением

$$c = (cc^{-1})^n c \leq (ab^{-1})^n a = a \oplus b.$$

Обратно, $(ab^{-1})^n = (ab^{-1})^{n+1} = \dots = (ab^{-1})^{2n}$, т.е. $(ab^{-1})^n$ – идемпотент. Отсюда $a \oplus b = (ab^{-1})^n \cdot a \leq a$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (ab^{-1})^n a = (ab^{-1})^{n+1} a = \dots = (ab^{-1})^{2n-1} a = \\ &= (ab^{-1})^n \cdot (ab^{-1})^{n-1} a = (ab^{-1})^n \cdot a(b^{-1}a)^{n-1} \quad (\text{используя } b^{-1} = b^{-1}bb^{-1}) \\ &= (ab^{-1})^n \cdot b \cdot (b^{-1}a)^n \leq b \cdot (b^{-1}a)^n \leq b \end{aligned}$$

поскольку $(b^{-1}a)^n$ – идемпотент.

Основная лемма (2)

Итак, если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \oplus b$, а с другой стороны, $a \oplus b \leq a$ и $a \oplus b \leq b$.

Основная лемма (2)

Итак, если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \oplus b$, а с другой стороны, $a \oplus b \leq a$ и $a \oplus b \leq b$. Мы видим, что $a \oplus b$ есть не что иное как $\inf\{a, b\}$.

Основная лемма (2)

Итак, если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \oplus b$, а с другой стороны, $a \oplus b \leq a$ и $a \oplus b \leq b$. Мы видим, что $a \oplus b$ есть не что иное как $\inf\{a, b\}$.

Отсюда сразу вытекают все аксиомы аи-полукольца. □

Основная лемма (2)

Итак, если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \oplus b$, а с другой стороны, $a \oplus b \leq a$ и $a \oplus b \leq b$. Мы видим, что $a \oplus b$ есть не что иное как $\inf\{a, b\}$.

Отсюда сразу вытекают все аксиомы аи-полукольца. □

Очевидно, что в B_2^1 выполнено тождество $x^2 \approx x^3$, поэтому лемма применима, и $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ – аи-полукольцо.

Основная лемма (2)

Итак, если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \oplus b$, а с другой стороны, $a \oplus b \leq a$ и $a \oplus b \leq b$. Мы видим, что $a \oplus b$ есть не что иное как $\inf\{a, b\}$.

Отсюда сразу вытекают все аксиомы аи-полукольца. □

Очевидно, что в B_2^1 выполнено тождество $x^2 \approx x^3$, поэтому лемма применима, и $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ – аи-полукольцо. Мы уже вводили на B_2^1 структуру аи-полукольца с помощью представления B_2^1 в виде полугруппы булевых матриц, замкнутой относительно матричного сложения.

Основная лемма (2)

Итак, если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \oplus b$, а с другой стороны, $a \oplus b \leq a$ и $a \oplus b \leq b$. Мы видим, что $a \oplus b$ есть не что иное как $\inf\{a, b\}$.

Отсюда сразу вытекают все аксиомы аи-полукольца. □

Очевидно, что в B_2^1 выполнено тождество $x^2 \approx x^3$, поэтому лемма применима, и $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ – аи-полукольцо. Мы уже вводили на B_2^1 структуру аи-полукольца с помощью представления B_2^1 в виде полугруппы булевых матриц, замкнутой относительно матричного сложения. Разумеется, $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ – это то же самое полукольцо.

Полугруппы Клеймана

Множество R_m всех $m \times m$ -матриц, в которых все элементы нули или единицы, причем в каждой строке и столбце не больше одной единицы, образуют инверсный моноид относительно обычного матричного умножения и транспонирования.

Полугруппы Клеймана

Множество R_m всех $m \times m$ -матриц, в которых все элементы нули или единицы, причем в каждой строке и столбце не больше одной единицы, образуют инверсный моноид относительно обычного матричного умножения и транспонирования. R_m называют **ладейным моноидом** (rook monoid) – его матрицы кодируют размещения не атакующих друг друга ладей на доске размера $m \times m$.

Полугруппы Клеймана

Множество R_m всех $m \times m$ -матриц, в которых все элементы нули или единицы, причем в каждой строке и столбце не больше одной единицы, образуют инверсный моноид относительно обычного матричного умножения и транспонирования. R_m называют **ладейным моноидом** (rook monoid) – его матрицы кодируют размещения не атакующих друг друга ладей на доске размера $m \times m$.

Пример: Моноид R_2 – это B_2^1 с добавленной матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Полугруппы Клеймана

Множество R_m всех $m \times m$ -матриц, в которых все элементы нули или единицы, причем в каждой строке и столбце не больше одной единицы, образуют инверсный моноид относительно обычного матричного умножения и транспонирования. R_m называют **ладейным моноидом** (rook monoid) – его матрицы кодируют размещения не атакующих друг друга ладей на доске размера $m \times m$.

Пример: Моноид R_2 – это B_2^1 с добавленной матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Положим $m = 2n + 1$ и определим $m \times m$ -матрицы $c_1, \dots, c_n$ правилом $c_k := E_{k+1\ k} + E_{n+k\ n+k+1}$, $k = 1, \dots, n$, где E_{ij} – матричная единица размера $m \times m$.

Множество R_m всех $m \times m$ -матриц, в которых все элементы нули или единицы, причем в каждой строке и столбце не больше одной единицы, образуют инверсный моноид относительно обычного матричного умножения и транспонирования. R_m называют **ладейным моноидом** (rook monoid) – его матрицы кодируют размещения не атакующих друг друга ладей на доске размера $m \times m$.

Пример: Моноид R_2 – это B_2^1 с добавленной матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Положим $m = 2n + 1$ и определим $m \times m$ -матрицы $c_1, \dots, c_n$ правилом $c_k := E_{k+1\ k} + E_{n+k\ n+k+1}$, $k = 1, \dots, n$, где E_{ij} – матричная единица размера $m \times m$. Например, при $n = 2$ имеем

$$c_1 = E_{21} + E_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad c_2 = E_{32} + E_{45} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полугруппы Клеймана (2)

Пусть C_n – инверсная подполугруппа в R_m , порожденная матрицами $c_1, \dots, c_n$. Эта серия инверсных полугрупп введена Е. Клейманом, который установил следующие ее свойства

Полугруппы Клеймана (2)

Пусть C_n – инверсная подполугруппа в R_m , порожденная матрицами $c_1, \dots, c_n$. Эта серия инверсных полугрупп введена Е. Клейманом, который установил следующие ее свойства:

(i) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ не лежит в многообразии полугрупп, порожденном моноидом $(B_2^1, \cdot)$.

Полугруппы Клеймана (2)

Пусть C_n – инверсная подполугруппа в R_m , порожденная матрицами $c_1, \dots, c_n$. Эта серия инверсных полугрупп введена Е. Клейманом, который установил следующие ее свойства:

- (i) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ не лежит в многообразии полугрупп, порожденном моноидом $(B_2^1, \cdot)$.
- (ii) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ удовлетворяет тождеству $x^2 \approx x^3$.

Полугруппы Клеймана (2)

Пусть C_n – инверсная подполугруппа в R_m , порожденная матрицами $c_1, \dots, c_n$. Эта серия инверсных полугрупп введена Е. Клейманом, который установил следующие ее свойства:

- (i) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ не лежит в многообразии полугрупп, порожденном моноидом $(B_2^1, \cdot)$.
- (ii) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ удовлетворяет тождеству $x^2 \approx x^3$.
- (iii) Для каждого $k = 1, \dots, n$, множество $M_k(n) := C_n \setminus \{c_k, c_k^{-1}\}$ – инверсная подполугруппа в $(C_n, \cdot, {}^{-1})$.

Полугруппы Клеймана (2)

Пусть C_n – инверсная подполугруппа в R_m , порожденная матрицами $c_1, \dots, c_n$. Эта серия инверсных полугрупп введена Е. Клейманом, который установил следующие ее свойства:

- (i) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ не лежит в многообразии полугрупп, порожденном моноидом $(B_2^1, \cdot)$.
- (ii) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ удовлетворяет тождеству $x^2 \approx x^3$.
- (iii) Для каждого $k = 1, \dots, n$, множество $M_k(n) := C_n \setminus \{c_k, c_k^{-1}\}$ – инверсная подполугруппа в $(C_n, \cdot, ^{-1})$.
- (iv) Для каждого $k = 1, \dots, n$, инверсная полугруппа $(M_k(n), \cdot, ^{-1})$ лежит в многообразии инверсных полугрупп, порожденном инверсным моноидом $(B_2^1, \cdot, ^{-1})$.

Полугруппы Клеймана (2)

Пусть C_n – инверсная подполугруппа в R_m , порожденная матрицами $c_1, \dots, c_n$. Эта серия инверсных полугрупп введена Е. Клейманом, который установил следующие ее свойства:

- (i) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ не лежит в многообразии полугрупп, порожденном моноидом $(B_2^1, \cdot)$.
- (ii) Полугруппа $(C_n, \cdot)$ удовлетворяет тождеству $x^2 \approx x^3$.
- (iii) Для каждого $k = 1, \dots, n$, множество $M_k(n) := C_n \setminus \{c_k, c_k^{-1}\}$ – инверсная подполугруппа в $(C_n, \cdot, {}^{-1})$.
- (iv) Для каждого $k = 1, \dots, n$, инверсная полугруппа $(M_k(n), \cdot, {}^{-1})$ лежит в многообразии инверсных полугрупп, порожденном инверсным моноидом $(B_2^1, \cdot, {}^{-1})$.

Свойства (i)–(iii) довольно просты. Свойство (iv) в работе Клеймана 1979 г. устанавливалось сложными и длинными вычислениями, но сейчас есть метод, который позволяет доказать его намного проще.

Теорема 3

Тождества аи-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ не имеют базиса от конечного числа переменных (и в частности, конечного базиса).

Теорема 3

Тождества аи-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ не имеют базиса от конечного числа переменных (и в частности, конечного базиса).

Доказательство. Допустим, что для некоторого n у аи-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ есть базис тождеств Σ , в котором каждое тождество зависит от $< n$ переменных.

Доказательство теоремы 3

Теорема 3

Тождества аи-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ не имеют базиса от конечного числа переменных (и в частности, конечного базиса).

Доказательство. Допустим, что для некоторого n у аи-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ есть базис тождеств Σ , в котором каждое тождество зависит от $< n$ переменных. Рассмотрим $(C_n, \cdot, ^{-1})$. По лемме и свойству (ii) C_n – аи-полукольцо относительно $x \oplus y := (xy^{-1})^2x$.

Доказательство теоремы 3

Теорема 3

Тождества ай-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ не имеют базиса от конечного числа переменных (и в частности, конечного базиса).

Доказательство. Допустим, что для некоторого n у ай-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ есть базис тождеств Σ , в котором каждое тождество зависит от $< n$ переменных. Рассмотрим $(C_n, \cdot, ^{-1})$. По лемме и свойству (ii) C_n – ай-полукольцо относительно $x \oplus y := (xy^{-1})^2 x$. Пусть $u \approx v$ – тождество из Σ и $X := \{x_1, \dots, x_\ell\}$ – множество всех его переменных. Рассмотрим произвольную подстановку $\varepsilon: X \rightarrow C_n$. По принципу Дирихле есть такой индекс $k \in \{1, \dots, n\}$, что ни c_k , ни c_k^{-1} не принадлежат множеству $\varepsilon(X)$, поскольку последнее содержит не более $\ell < n$ элементов. Значит, $\varepsilon(X) \subset M_k(n) = C_n \setminus \{c_k, c_k^{-1}\}$.

Теорема 3

Тождества ай-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ не имеют базиса от конечного числа переменных (и в частности, конечного базиса).

Доказательство. Допустим, что для некоторого n у ай-полукольца $(B_2^1, \oplus, \cdot)$ есть базис тождеств Σ , в котором каждое тождество зависит от $< n$ переменных. Рассмотрим $(C_n, \cdot, ^{-1})$. По лемме и свойству (ii) C_n – ай-полукольцо относительно $x \oplus y := (xy^{-1})^2 x$. Пусть $u \approx v$ – тождество из Σ и $X := \{x_1, \dots, x_\ell\}$ – множество всех его переменных. Рассмотрим произвольную подстановку $\varepsilon: X \rightarrow C_n$. По принципу Дирихле есть такой индекс $k \in \{1, \dots, n\}$, что ни c_k , ни c_k^{-1} не принадлежат множеству $\varepsilon(X)$, поскольку последнее содержит не более $\ell < n$ элементов. Значит, $\varepsilon(X) \subset M_k(n) = C_n \setminus \{c_k, c_k^{-1}\}$. Поскольку $x \oplus y$ выражается термом сигнатуры $(\cdot, ^{-1})$, можно переписать тождество $u \approx v$ в тождество $u' \approx v'$, где u' и v' – термы сигнатуры $(\cdot, ^{-1})$. Тождество $u \approx v$ выполняется в $(B_2^1, \oplus, \cdot)$, откуда переписанное тождество $u' \approx v'$ выполняется в $(B_2^1, \cdot, ^{-1})$.

Доказательство теоремы 3, окончание

Напомним свойство (iv): инверсная полугруппа $(M_k(n), \cdot, {}^{-1})$ лежит в многообразии инверсных полугрупп, порожденном инверсным моноидом $(B_2^1, \cdot, {}^{-1})$.

Доказательство теоремы 3, окончание

Напомним свойство (iv): инверсная полугруппа $(M_k(n), \cdot, {}^{-1})$ лежит в многообразии инверсных полугрупп, порожденном инверсным моноидом $(B_2^1, \cdot, {}^{-1})$. Следовательно, раз тождество $u' \approx v'$ выполнено в $(B_2^1, \cdot, {}^{-1})$, оно выполнено и в $(M_k(n), \cdot, {}^{-1})$, и поэтому u' и v' принимают одно и то же значение при каждой подстановке $X \rightarrow M_k(n)$. В частности, $\varepsilon(u) = \varepsilon(u') = \varepsilon(v') = \varepsilon(v)$.

Доказательство теоремы 3, окончание

Напомним свойство (iv): инверсная полугруппа $(M_k(n), \cdot, {}^{-1})$ лежит в многообразии инверсных полугрупп, порожденном инверсным моноидом $(B_2^1, \cdot, {}^{-1})$. Следовательно, раз тождество $u' \approx v'$ выполнено в $(B_2^1, \cdot, {}^{-1})$, оно выполнено и в $(M_k(n), \cdot, {}^{-1})$, и поэтому u' и v' принимают одно и то же значение при каждой подстановке $X \rightarrow M_k(n)$. В частности, $\varepsilon(u) = \varepsilon(u') = \varepsilon(v') = \varepsilon(v)$.

Мы заключаем, что в аи-полукольце $(C_n, \oplus, \cdot)$ выполнено произвольное тождество $u \approx v$ из Σ . Значит, это аи-полукольцо принадлежит многообразию аи-полуколец, порожденному $(B_2^1, \oplus, \cdot)$. Это, однако, противоречит свойству (i), согласно которому даже полугруппа $(C_n, \cdot)$ не принадлежит многообразию полугрупп, порожденному $(B_2, \cdot)$. □

Понятно, что использованный в доказательстве теоремы 3 прием допускает дальнейшие применения.

Понятно, что использованный в доказательстве теоремы 3 прием допускает дальнейшие применения. Совместно с Сергеем Гусевым мы доказали такое обобщение теоремы 3 (готовится к печати).

Теорема 4

Пусть инверсная полугруппа $(S, \cdot, {}^{-1})$ удовлетворяет тождеству $x^n \approx x^{n+1}$ для некоторого n и порождает многообразие инверсных полугрупп, содержащее инверсный моноид $(B_2^1, \cdot, {}^{-1})$. Тогда у тождеств аи-полукольца $(S, \oplus, \cdot)$, где $x \oplus y = (xy^{-1})^n x$, нет базиса от конечного числа переменных (и в частности, конечного базиса).

Инверсные полугруппы с нетривиальными подгруппами

Понятно, что тождество $x^n \approx x^{n+1}$ не может выполняться в нетривиальной группе.

Инверсные полугруппы с нетривиальными подгруппами

Понятно, что тождество $x^n \approx x^{n+1}$ не может выполняться в нетривиальной группе. Поэтому теорема 4 применима только к инверсным полугруппам с тривиальными подгруппами.

Инверсные полугруппы с нетривиальными подгруппами

Понятно, что тождество $x^n \approx x^{n+1}$ не может выполняться в нетривиальной группе. Поэтому теорема 4 применима только к инверсным полугруппам с тривиальными подгруппами.

Следующий результат дает семейство примеров аи-полуколец без конечного базиса тождеств, построенных из инверсных полугрупп с нетривиальными подгруппами (и конечным базисом тождеств).

Теорема 5

Пусть G – конечная группа с неабелевой силовой подгруппой. Определим на множестве $G^0 := G \cup \{0\}$ сложение правилом

$$x + y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq y, \\ x, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Тогда $(G^0, +, \cdot)$ – аи-полукольцо без конечного базиса тождеств.

Инверсные полугруппы с нетривиальными подгруппами

Понятно, что тождество $x^n \approx x^{n+1}$ не может выполняться в нетривиальной группе. Поэтому теорема 4 применима только к инверсным полугруппам с тривиальными подгруппами.

Следующий результат дает семейство примеров аи-полуколец без конечного базиса тождеств, построенных из инверсных полугрупп с нетривиальными подгруппами (и конечным базисом тождеств).

Теорема 5

Пусть G – конечная группа с неабелевой силовой подгруппой. Определим на множестве $G^0 := G \cup \{0\}$ сложение правилом

$$x + y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq y, \\ x, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Тогда $(G^0, +, \cdot)$ – аи-полукольцо без конечного базиса тождеств.

Теорема 5 получена совместно с коллегами из Сианя Miaomiao Ren и Xianzhong Zhao (готовится к печати).

1. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо, получающееся из полугруппы Брандта B_2 ?

1. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо, получающееся из **полугруппы** Брандта B_2 ? Сама B_2 имеет конечный базис тождеств (и как «простая» полугруппа, и как инверсная полугруппа).

1. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо, получающееся из **полугруппы** Брандта B_2 ? Сама B_2 имеет конечный базис тождеств (и как «простая» полугруппа, и как инверсная полугруппа).
2. Ладейный моноид R_m допускает структуру аи-полукольца, если сложение определить как умножение Шура: $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij}b_{ij})$. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо $(R_m, +, \cdot)$?

1. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо, получающееся из **полугруппы** Брандта B_2 ? Сама B_2 имеет конечный базис тождеств (и как «простая» полугруппа, и как инверсная полугруппа).
2. Ладейный моноид R_m допускает структуру аи-полукольца, если сложение определить как умножение Шура: $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij}b_{ij})$. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо $(R_m, +, \cdot)$?
3. Для каких инверсных полугрупп $(S, \cdot, {}^{-1})$, образующих нижние полурешетки относительно естественного порядка, аи-полукольца $(S, \inf, \cdot)$ имеют конечный базис тождеств?

1. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо, получающееся из **полугруппы** Брандта B_2 ? Сама B_2 имеет конечный базис тождеств (и как «простая» полугруппа, и как инверсная полугруппа).
2. Ладейный моноид R_m допускает структуру аи-полукольца, если сложение определить как умножение Шура: $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij}b_{ij})$. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо $(R_m, +, \cdot)$?
3. Для каких инверсных полугрупп $(S, \cdot, {}^{-1})$, образующих нижние полурешетки относительно естественного порядка, аи-полукольца $(S, \inf, \cdot)$ имеют конечный базис тождеств? (Все аи-полукольца, которые обсуждались выше, попадают в этот класс.)

1. Конечно базлируемо ли *аи*-полукольцо, получающееся из **полугруппы** Брандта B_2 ? Сама B_2 имеет конечный базис тождеств (и как «простая» полугруппа, и как инверсная полугруппа).
2. Ладейный моноид R_m допускает структуру *аи*-полукольца, если сложение определить как умножение Шура: $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij}b_{ij})$. Конечно базлируемо ли *аи*-полукольцо $(R_m, +, \cdot)$?
3. Для каких инверсных полугрупп $(S, \cdot, {}^{-1})$, образующих нижние полурешетки относительно естественного порядка, *аи*-полукольца $(S, \inf, \cdot)$ имеют конечный базис тождеств? (Все *аи*-полукольца, которые обсуждались выше, попадают в этот класс.)
4. **Проблема Тарского** для *аи*-полуколец: существует ли алгоритм, который по конечному *аи*-полукольцу определяет, имеет ли оно конечный базис тождеств?

1. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо, получающееся из **полугруппы** Брандта B_2 ? Сама B_2 имеет конечный базис тождеств (и как «простая» полугруппа, и как инверсная полугруппа).
2. Ладейный моноид R_m допускает структуру аи-полукольца, если сложение определить как умножение Шура: $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij}b_{ij})$. Конечно базлируемо ли аи-полукольцо $(R_m, +, \cdot)$?
3. Для каких инверсных полугрупп $(S, \cdot, {}^{-1})$, образующих нижние полурешетки относительно естественного порядка, аи-полукольца $(S, \inf, \cdot)$ имеют конечный базис тождеств? (Все аи-полукольца, которые обсуждались выше, попадают в этот класс.)
4. **Проблема Тарского** для аи-полуколец: существует ли алгоритм, который по конечному аи-полукольцу определяет, имеет ли оно конечный базис тождеств?

Спасибо за внимание!