§6. Метод резолюций в логике высказываний

Метод резолюций применяется для доказательства того, что формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$. При этом доказывается невыполнимость множества формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$.

Опр. (повторно). Литерал – атомарная формула (кроме 0 и 1), или ее отрицание.

Дизъюнкт (элементарная дизъюнкция) – литерал или дизъюнкция литералов.

Опр. Пустой дизъюнкт – дизъюнкт, не содержащий литералов.

□

Пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации.

Опр. Противоположные литералы – литералы X и $\neg X$.

Опр. Правилом резолюций в логике высказываний называется:
из двух дизъюнктов $(X \vee H_1)$ и $(\neg X \vee H_2)$ выводится дизъюнкт $(H_1 \vee H_2)$.

Опр. Пусть S множество дизъюнктов. Будем говорить, что дизъюнкт D_n выводится из S, если существует последовательность дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$, такая, что каждый D_i принадлежит S или получен по правилу резолюций из дизъюнктов среди $D_1, D_2, \ldots, D_{i-1}$.

Вывод D_n из S – эта последовательность $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

Теорема.
Множество дизъюнктов S невыполнимо $\Leftrightarrow$ из S выводится пустой дизъюнкт.

Теорема.
Множество дизъюнктов S невыполнимо $\Leftrightarrow$ из S выводится пустой дизъюнкт.

Доказательство:
$\Leftarrow$) Дано: из S выводится пустой дизъюнкт.

Заметим, что правило резолюций сохраняет истинность при некоторой интерпретации φ, т.к. если $\varphi(X \vee H_1) = 1$ и $\varphi(\neg X \vee H_2) = 1$, то

либо $\varphi(H_1) = 1 \Rightarrow \varphi(H_1 \vee H_2) = 1$;

либо $\varphi(H_1) = 0 \Rightarrow \varphi(X) = 1 \Rightarrow \varphi(\neg X) = 0 \Rightarrow \varphi(H_2) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(H_1 \vee H_2) = 1$.

(от противного) Предположим S выполнимо, т.е. существует интерпретация φ, при которой все дизъюнкты в S истинны. Тогда истинны все дизъюнкты в последовательности $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, \square$.

Т.е. $\varphi(\square) = 1$ – противоречие.
S невыполнимо.

$\Rightarrow$) Дано: S невыполнимо.
Проведём доказательство индукцией по параметру
$d(S)$ = сумма числа вхождений литералов в S минус число дизъюнктов в S плюс 1.

Пусть $\Box \notin S$. Тогда $d(S) \geq 1$.

Б.И. $d(S) = 1$. Т.е. все дизъюнкты в S состоят из одного литерала.

S невыполнимо $\Rightarrow$ S содержит пару противоположных литералов X и $\neg X$. Тогда X, $\neg X$, $\Box$ – вывод пустого дизъюнкта из S.

Ш.И. $d(S) > 1$.
Пусть теорема верна для любого множества дизъюнктов T, где $d(T) < d(S)$.
Пусть $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$, где $D_k = L \vee D'$, $D' \neq \square$, L – литерал.

Рассмотрим $S_1 = \{D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, L\}$, $S_2 = \{D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, D'\}$.

Эти множества невыполнимы, $d(S_1) < d(S)$, $d(S_2) < d(S)$.
По предположению индукции: из S_1 выводится $\square$, из S_2 выводится $\square$.

Обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_l = \square$ – вывод из S_1,
$B_1, B_2, \ldots, B_m = \square$ – вывод из S_2.

(Если L не содержится в выводе пустого дизъюнкта из S_1, то $A_1, A_2, \ldots, A_l = \square$ – вывод из S).
Пусть $A_i = L$, $B_j = D'$ (номера i и j – наименьшие).

Построим последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_{j-1}, B'_j, \ldots, B'_m$, где

$$B'_j = D' \vee L, \quad B'_t = \begin{cases} B_t \vee L, \text{ если } B_t \text{ зависит от } B_j \\ B_t, \text{ в противном случае} \end{cases}.$$

Либо $B'_m = B_m = \square$. Получен вывод из S.

Либо $B'_m = B_m \vee L = L$.

Достроим последовательность $A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1, \ldots, B'_m, A_{i+1}, \ldots, A_l = \square$.

Получен вывод из S. Теорема доказана.

Лемма.

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_m$ – элементарные дизъюнкции.

Формула вида $(D_1 \,\&\, D_2 \,\&\ldots\&\, D_m)$ выполнима $\Leftrightarrow$ множество $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ выполнимо.

Схема применения метода резолюций.

Дано: $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$.

1. Формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G$ приводятся к КНФ.

2. Все получившиеся дизъюнкты собирают в множество S.

3. Строится вывод $\square$ из S.

Пример.

$F_1 = X \to Y \vee Z,\ F_2 = Z \to W,\ F_3 = \neg W,\ G = X \to Y$.

1. $F_1 \equiv \neg X \vee Y \vee Z$. (Один дизъюнкт)

$F_2 \equiv \neg Z \vee W$. (Один дизъюнкт)

$F_3 = \neg W$. (Один дизъюнкт)

$\neg G \equiv \neg(\neg X \vee Y) \equiv X \,\&\, \neg Y$. (Два дизъюнкта)

Пример.

$F_1 = X \to Y \vee Z,\ F_2 = Z \to W,\ F_3 = \neg W,\ G = X \to Y$.

1. $F_1 \equiv \neg X \vee Y \vee Z$. (Один дизъюнкт)

$F_2 \equiv \neg Z \vee W$. (Один дизъюнкт)

$F_3 = \neg W$. (Один дизъюнкт)

$\neg G \equiv \neg(\neg X \vee Y) \equiv X \,\&\, \neg Y$. (Два дизъюнкта)

2. $S \equiv \{\neg X \vee Y \vee Z,\ \neg Z \vee W,\ \neg W,\ X,\ \neg Y\}$.

2. $S = \{\neg X \vee Y \vee Z,\ \neg Z \vee W,\ \neg W,\ X,\ \neg Y\}$.

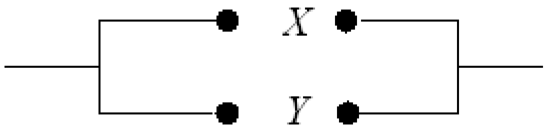
3. $\neg X \vee Y \vee Z,\ \neg Z \vee W,\ \neg X \vee Y \vee W,\ \neg W,\ \neg X \vee Y,\ X,\ Y,\ \neg Y,\ \square$.

§7. Контактные схемы.

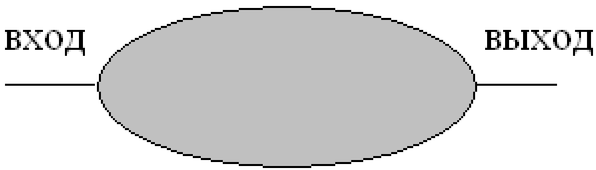
Опр. Контактом называется устройство, которое может находиться в одном из двух состояний: замкнут или разомкнут.

Опр. Последовательным соединением двух контактов называется соединение вида:

Опр. Параллельным соединением двух контактов называется соединение вида:



Опр. Контактной схемой называется набор контактов, соединенных между собой, в котором выделены вход и выход:



Пусть состояние «контакт X замкнут» соответствует значению 1, «контакт X разомкнут» соответствует значению 0, т.е. значению истинности атомарной формулы X.

Тогда последовательное соединение соответствует $(X \mathbin{\&} Y)$, параллельное соединение соответствует $(X \vee Y)$.

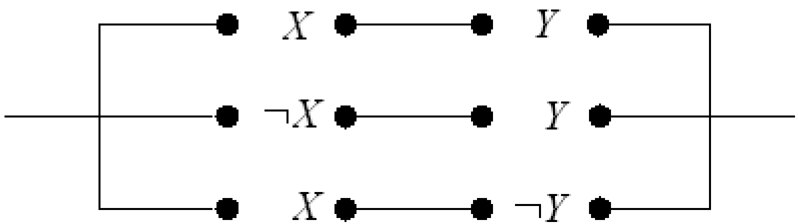
Вся контактная схема соответствует формуле логики высказываний.

Замечание: любая формула соответствует контактной схеме, при условии, что отрицание атомарной формулы – это тоже контакт.

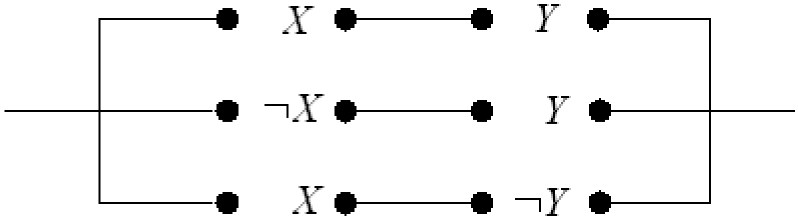
Опр. Две контактные схемы называются эквивалентными, если они соответствуют равносильным формулам.

Типовая задача 1: для данной контактной схемы найти эквивалентную схему, содержащую меньше контактов.

Пример.



Пример.

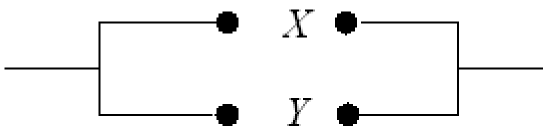


Схеме соответствует формула
$F = (X \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \neg Y)$.

$$F = (X \mathbin{\&} Y) \vee (\neg X \mathbin{\&} Y) \vee (X \mathbin{\&} \neg Y) \equiv ((X \vee \neg X) \mathbin{\&} Y) \vee (X \mathbin{\&} \neg Y) \equiv$$

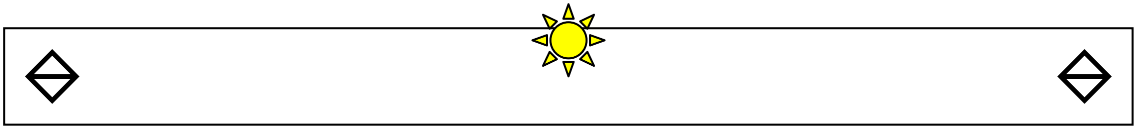
$$\equiv (1 \mathbin{\&} Y) \vee (X \mathbin{\&} \neg Y) \equiv Y \vee (X \mathbin{\&} \neg Y) \equiv$$

$$\equiv (Y \vee X) \mathbin{\&} (Y \vee \neg Y) \equiv Y \vee X.$$



Типовая задача 2: составить наименьшую контактную схему, управляющую электрическим освещением или замком.

Пример.
В длинном коридоре имеются два выключателя для освещения. Составить контактную схему, которая позволяет включать или выключать свет с любого выключателя.



X Y

Пусть X и Y – атомарные переменные, соответствующие выключателю 1 и 2.

Тогда искомая контактная схема соответствует формуле F, зависящей от X и Y.

Составим таблицу истинности для F.

X	Y	F
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Тогда $F = (X \,\&\, \neg\, Y) \vee (\neg X \,\&\, Y)$.