

Метод резолюций в логике высказываний

Метод резолюций применяется для доказательства того, что формула G является логическим следствием формул F_1, F_2, \dots, F_n .

При этом доказываемся невыполнимость множества формул $\{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$. Напомним, что множество формул **выполнимо**, если существует интерпретация, при которой все формулы истинны и **невыполнимо** в противном случае (в каком?)

Опр (повторно). **Литерал** – атомарная формула (кроме 0 и 1), или ее отрицание.

Дизъюнкт (элементарная дизъюнкция) – литерал или дизъюнкция литералов.

Опр. **Пустой дизъюнкт** – дизъюнкт, не содержащий литералов.

□. Пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации.

Опр. **Противоположные литералы** – литералы X и $\neg X$.

Опр. **Правилом резолюций** в логике высказываний называется:
из двух дизъюнктов $(X \vee H_1)$ и $(\neg X \vee H_2)$ выводится дизъюнкт $(H_1 \vee H_2)$.

Пример 1.
$$\frac{\neg X \vee Y \vee Z, X \vee \neg Y}{Y \vee Z \vee \neg Y}; \quad \frac{\neg X \vee Y \vee Z, X \vee \neg Y}{X \vee Z \vee \neg X}$$

Упр. Доказать корректность вывода, т.е. доказать, что при выводе получается равносильные формулы.

Опр. Пусть S множество дизъюнктов. Будем говорить, что дизъюнкт D_n **выводится** из S , если существует последовательность дизъюнктов

D_1, D_2, \dots, D_n , такая, что каждый D_i принадлежит S или получен по правилу резолюций из дизъюнктов среди D_1, D_2, \dots, D_{i-1} .

Вывод D_n из S – эта последовательность D_1, D_2, \dots, D_n .

Пример 2. $S = \{\neg X \vee Y \vee \neg Z, X \vee \neg U, \neg Y \vee U\}$

$$D_1 = \neg X \vee Y \vee \neg Z, D_2 = X \vee \neg U, D_3 = \neg Y \vee U,$$

$$D_4 = Y \vee \neg Z \vee \neg U, D_5 = X \vee \neg Y, D_6 = \underline{\underline{\neg X}} \vee \neg Z \vee U,$$

$$\underline{\underline{D_7}} = \underline{\underline{X}} \vee \neg Z \vee \neg U, \underline{\underline{D_8}} = \neg Z \vee U \vee \neg U \vee \neg Z \equiv 1$$

Логическое следствие (повторение)

Опр. Формула G называется **логическим следствием** формул F_1, F_2, \dots, F_n , если для любой интерпретации φ из того, что все значения $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \dots, \varphi(F_n)$ истинны, следует, что значение $\varphi(G)$ истинно.

Теорема 2. Формула G является логическим следствием формул F_1, F_2, \dots, F_n , тогда и только тогда, когда $F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n \rightarrow G \equiv 1$.

Док-во аналогично доказательству теоремы 1 о равносильности ФЛВ.

Опр. Множество формул F_1, F_2, \dots, F_m **выполнимо**, если существует интерпретация φ такая, что все значения $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \dots, \varphi(F_m)$ истинны и **невыполнимо** – в противном случае.

Пример1. Выполнимо ли множество формул $S = \{F, G, H\}$,
 $F = Z \wedge \neg Y$; $G = X \& Y \leftrightarrow Z$; $H = (X \& Z) \vee Y$.

Решение: предположим, что множество выполнимо. Тогда существует интерпретация $\varphi: S \rightarrow \{0, 1\}$ т.ч. $\varphi(F) = \varphi(G) = \varphi(H) = 1$.

$\varphi(F) = 1 \Rightarrow \varphi(X) = 1, \varphi(Y) = 0 \Rightarrow \varphi(G) = 0 \leftrightarrow 1 = 0$. Противоречие, следовательно, множество S невыполнимо.

Теорема 3. Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \dots, F_n \Leftrightarrow$ множество формул $\{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$ невыполнимо.

Доказательство:

\Rightarrow) Дано: G является логическим следствием формул F_1, F_2, \dots, F_n .

Предположим, что $\{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$ выполнимо, т.е. существует интерпретация φ такая, что все значения

$\varphi(F_1), \varphi(F_2), \dots, \varphi(F_n), \varphi(\neg G)$ истинны. Тогда $\varphi(G)$ ложно.

Противоречие.

\Leftarrow) Дано: множество формул $\{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$ невыполнимо.

Для любой интерпретации φ среди значений

$\varphi(F_1), \varphi(F_2), \dots, \varphi(F_n), \varphi(\neg G)$ будет хотя бы одно ложное значение.

Для всех интерпретаций φ , таких, что $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \dots, \varphi(F_n)$ истинны, обязательно ложным будет $\varphi(\neg G)$. Тогда $\varphi(G)$ истинно.

Следовательно, G является логическим следствием формул F_1, F_2, \dots, F_n . Теорема доказана.

Невыполнимость множества ФЛВ и метод резолюций

Теорема 1. Множество дизъюнктов S невыполнимо \Leftrightarrow из S выводится пустой дизъюнкт.

Доказательство:

\Leftarrow) Дано: из S выводится пустой дизъюнкт.

Заметим, что правило резолюций сохраняет истинность при некоторой интерпретации φ , т.к. если $\varphi(X \vee H_1) = 1$ и

$\varphi(\neg X \vee H_2) = 1$, то

либо $\varphi(H_1) = 1 \Rightarrow \varphi(H_1 \vee H_2) = 1$;

либо $\varphi(H_1) = 0 \Rightarrow \varphi(X) = 1 \Rightarrow \varphi(\neg X) = 0 \Rightarrow \varphi(H_2) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(H_1 \vee H_2) = 1$.

(от противного) Предположим S выполнимо, т.е. существует интерпретация φ , при которой все дизъюнкты в S истинны. Тогда истинны все дизъюнкты в последовательности $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, \square$.

Т.е. $\varphi(\square) = 1$ – противоречие.

S невыполнимо.

\Rightarrow) Доказательство проведём индукцией по количеству различных предметных символов, фигурирующих в записях дизъюнктов.

Обозначим это количество через n . БОО – это переменные x_1, x_2, \dots, x_n .

Б.И. $n = 1$, т.е. все дизъюнкты состоят из одного литерала, каждый из которых x_1 или $\neg x_1$. Тогда невыполнимость означает, что оба таких литерала присутствуют. Из этой пары выводим \square .

Ш.И. Пусть для невыполнимых множеств дизъюнктов с $n - 1$ предметными символами теорема уже доказана. Рассмотрим противоречивое множество \mathbb{S} с n предметными символами. Пусть

M_+ – множество дизъюнктов из \mathbb{S} , которые не содержат $\neg x_n$, а

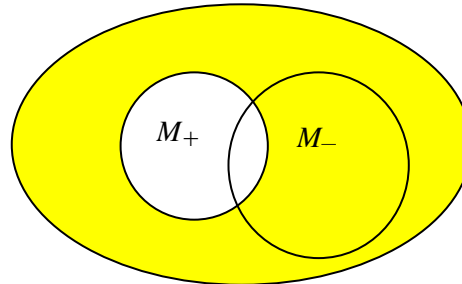
M_- – множество дизъюнктов из \mathbb{S} , которые не содержат x_n .

($M_+ \cap M_-$ может быть непустым). Через \check{M}_+ обозначим множество дизъюнктов, получаемых из дизъюнктов множества M_+ вычёркиванием литерала x_n , а через \check{M}_- – множество дизъюнктов, получаемых из дизъюнктов множества M_- вычёркиванием литерала $\neg x_n$. Покажем, что каждое из множеств невыполнимо.

От противного. Пусть \check{M}_+ выполнимо. Тогда существует такая интерпретация множества \check{M}_+ $\mu: \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \rightarrow \mathbb{B}$, что каждый дизъюнкт $D_i \in \check{M}_+$ имеет значение $\mu(D_i) = 1$. Построим такую

интерпретацию μ^* множества M $\mu^*: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{B}$, что $\mu^*(x_i) = \mu(x_i)$ для $1 \leq i \leq n-1$ и $\mu^*(x_n) = 0$. Поскольку $a \vee 0 = a$, то μ^* выполняет все дизъюнкты из M_+ . Тогда множество $\overline{M}_+ = \mathbb{S} \setminus M_+$ тоже выполнимо, т.к. оно содержит $\neg x_n$, а $\mu^*(\neg x_n) = 1$ ($1 \vee a = 1$) $\Rightarrow \mu^*$ выполняет все дизъюнкты из \mathbb{S} , но \mathbb{S} невыполнимо. Противоречие.

Аналогично доказывается (докажите самостоятельно), что M_- также невыполнимо. Из предположения индукции и невыполнимости M_+ и M_- следует, что из \check{M}_+ и \check{M}_- есть вывод \square . Если мы восстановим опущенный литерал x_n в выводе из \check{M}_+ пустого \square , то получим вывод из \mathbb{S} литерала x_n . Аналогично, получаем вывод из \mathbb{S}



литерала $\neg x_n$. Ещё раз применив правило резолюции, получим \square .

Теорема доказана.

Пример 3. (демонстрация доказательства теоремы)

$$\mathbb{S} = \{\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3, X_1 \vee X_3, \bar{X}_2 \vee X_3, \bar{X}_3\}$$

$$M_+ = \{\bar{X}_1 \vee X_2 \vee \boxed{X_3}, X_1 \vee \boxed{X_3}, \bar{X}_2 \vee \boxed{X_3}\} - \text{не содержат } \bar{X}_3, \text{ т.е.}$$

$$\check{M}_+ = \{\bar{X}_1 \vee X_2, X_1, \bar{X}_2\}$$

$$(+)\ \underbrace{\bar{X}_1 \vee X_2, X_1, \bar{X}_2}_{X_2}, \underbrace{X_2}_{\square} - \text{вывод } \square \text{ из } \check{M}_+.$$

$$M_- = \{\bar{X}_3\} - \text{не содержит } X_3 \text{ (в данном случае } M_+ \cap M_- = \emptyset), \check{M}_- = \emptyset$$

$$(-)\ \square$$

Получаем из (+) вывод в \mathbb{S} :

$$(++)\ \underbrace{\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3, X_1 \vee X_3}_{X_2 \vee X_3}, \underbrace{\bar{X}_2 \vee X_3; X_2 \vee X_3, X_3}_{X_3}$$

Из (-) получаем вывод в \mathbb{S} : $(--)\ \bar{X}_3$. Добавляя к (++) (--), получаем \square .

Доказательство невыполнимости (демонстрация) для \check{M}_+ и \check{M}_- . Если бы \check{M}_+ было бы выполнимо, то существовала бы интерпретация $\mu: \{x_1, x_2\} \rightarrow \mathbb{B}$, т.ч.

$$\mu(\bar{X}_1 \vee X_2) = \mu(X_1) = \mu(\bar{X}_2) = 1 \Rightarrow \mu^*(\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3) = \mu(\bar{X}_1 \vee X_2 \vee 0) = 1,$$

$$\mu^*(X_1 \vee X_3) = \mu(X_1 \vee 0) = 1 \Rightarrow \mu^*(X_2 \vee X_3) = 1 \Rightarrow M_+ \text{ было бы выполнимо при } \mu^*.$$

$$\mu^*(\bar{X}_3) = \mu^*(1) = 1 \Rightarrow \bar{M}_+ \text{ было бы выполнимо при } \mu^* \Rightarrow S \text{ было бы выполнимо при } \mu^*.$$

\check{M}_- невыполнимо, поскольку оно пустое.

Схема применения метода резолюций для доказательства логического следования.

Дано: F_1, F_2, \dots, F_n, G .

1. Формулы $F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G$ приводятся к КНФ.
2. Все получившиеся дизъюнкты собирают во множество S .
3. Строится вывод \square из S .

Доказательство. $F_1, F_2, \dots, F_n \models G \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G$ – тождеств. истина \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G)$ – противоречие \Leftrightarrow

$F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G$ – противоречие,

т.е. множество $F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G$ – невыполнимо $\Leftrightarrow \mathbb{S}$ – невыполнимо

Пример 4. Необходимо проверить логическое следование

$F_1, F_2, F_3 \models G$, где

$F_1 = X \rightarrow Y \vee Z$, $F_2 = Z \rightarrow W$, $F_3 = \neg W$, $G = X \rightarrow Y$.

1. $F_1 \equiv \neg X \vee Y \vee Z$ (Один дизъюнкт)

$F_2 \equiv \neg Z \vee W$ (Один дизъюнкт)

$F_3 = \neg W$ (Один дизъюнкт)

$\neg G \equiv \neg(\neg X \vee Y) \equiv X \& \neg Y$. (Два дизъюнкта)

2. $S \equiv \{\neg X \vee Y \vee Z, \neg Z \vee W, \neg W, X, \neg Y\}$

3. $\neg X \vee Y \vee Z, \neg Z \vee W, \neg W, X, \neg Y; \neg X \vee Y \vee W, \neg X \vee Y, Y, \square$

$$\neg X \vee Y \vee Z, \neg Z \vee W, \neg W, X, \neg Y; \neg X \vee Y \vee W, \neg X \vee Y, Y, \square.$$

$$\underbrace{\neg X \vee Y \vee Z, \neg Z \vee W}_{\neg X \vee Y \vee W}, \underbrace{\neg W, X, \neg Y}_{\neg X \vee Y}, Y, \square.$$

$$\underbrace{\neg X \vee Y \vee W, \neg X \vee Y}_{Y}, \square.$$

Пример 5.

Необходимо проверить логическое следование

$F_1, F_2, F_3, F_4 \models G$, где

$F_1 = D \leftrightarrow X, F_2 = X \rightarrow (Y \vee \bar{D}) \wedge (\bar{Y} \vee D), F_3 = \bar{Y} \rightarrow X \wedge Z, F_4 = Z \rightarrow Y \vee \bar{D},$
 $G = Y.$

$$F_1 = (X \vee \bar{D}) \wedge (\bar{X} \vee D),$$

$$F_2 = \bar{X} \vee [(Y \vee \bar{D}) \wedge (\bar{Y} \vee D)] \equiv (\bar{X} \vee Y \vee \bar{D}) \wedge (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee D),$$

$$F_3 = \bar{Y} \rightarrow X \wedge Z = Y \vee X \wedge Z \equiv (Y \vee X) \wedge (Y \vee Z),$$

$$F_4 = Z \rightarrow Y \vee \bar{D} \equiv \bar{Z} \vee Y \vee \bar{D} \quad \bar{G} = \bar{Y}$$

$$X \vee \bar{D} \quad (1); \quad \bar{X} \vee D \quad (2); \quad \bar{X} \vee Y \vee \bar{D} \quad (3);$$

$$\bar{X} \vee \bar{Y} \vee D \quad (4); \quad Y \vee X \quad (5); \quad Y \vee Z \quad (6);$$

$$\bar{Z} \vee Y \vee \bar{D} \quad (7); \quad \bar{Y} \quad (8).$$

$$Z \quad (6) u (8) \quad (9)$$

$$Y \vee \bar{D} \quad (7) u (9) \quad (10)$$

$$\bar{X} \vee Y \quad (2) u (10) \quad (11)$$

$$Y \quad (5) u (11) \quad (12)$$

$$\square \quad (8) u (12)$$

Пример 7. Решить текстовую задачу

Теперь у нас снова есть варенье, - обратился Король к Королеве, - и ты сможешь, наконец, испечь кренделей.

- Как я могу печь крендели, когда у меня нет муки? - спросила Королева.

- Уж не хочешь ли ты сказать, что муку тоже украли?! - вскричал Король.

- Вот именно! - сказала Королева. - Найди того, кто это сделал, и отруби ему голову!

- Ну-ну! - пробормотал Король. - К чему такая спешка?

Стали искать муку, и после некоторых поисков обнаружили ее в домике, где жили Мартовский Заяц, Болванщик и Соня. Разумеется, все трое были арестованы и предстали перед судом.

На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, которые по каким-то причинам не были записаны, поэтому сообщить вам, о чем они говорили, я просто не в силах. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трех подсудимых и что только он дал правдивые показания. **Кто украл муку?**

Решение.

h – Мартовский заяц украл муку

b – Болванщик украл

s – Соня украла

$(h \vee b \vee s) \wedge (\bar{h} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{s} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{h} \vee \bar{s})$ – украл только один

b – показания Мартовского зайца

$F_1 = h \Leftrightarrow b = (h \vee \bar{b}) \wedge (\bar{h} \vee b)$ – «Кто украл, тот говорит правду» для

Мартовского зайца. А для Сони и Болванщика это нельзя записать, так как их показания неизвестны.

$F_2 = (h \vee b \vee s) \wedge \overline{h \wedge b} \wedge \overline{h \wedge s} \wedge \overline{s \wedge b} \equiv$
 $\equiv (h \vee b \vee s) \wedge (\bar{h} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{h} \vee \bar{s}) \wedge (\bar{s} \vee \bar{b})$ – украл только один.

$$\mathbb{S} = \left\{ \underbrace{h \vee b \vee s}_{(1)}, \bar{h} \vee \bar{b}, \bar{h} \vee \bar{s}, \bar{s} \vee \bar{b}, h \vee \bar{b}, \bar{h} \vee b \right\}$$

$$(2) \text{ и } (5): \bar{b} \quad (7)$$

$$(1) \text{ и } (6): b \vee s \quad (8)$$

$$(7) \text{ и } (8): s \quad (9) \text{ – украла Соня}$$

$$(3) \text{ и } (9): \bar{h} \quad (10) \text{ – Мартовский заяц не крал}$$

$$(4) \text{ и } (9): \bar{b} \quad (11) \text{ – Болванщик не крал}$$

Ответ: украла Соня.