Метод резолюций в логике предикатов

Опр 1. **Подстановкой** называется множество равенств $\sigma = \{ x_1 = t_1, \ldots, \; x_n = t_n \}$, где $x_1, \ldots, x_n \in V$, t_i – терм, не содержащий x_i .

Обозначение: $\sigma(F)$ – формула, полученная из F подстановкой σ.

Опр 2. (повторно). **Литерал** – атомарная формула $P(t_1,\ldots,t_n)$, или ее отрицание $\neg P(t_1,\ldots,t_n)$.

Дизъюнкт (элементарная дизъюнкция) – литерал или дизъюнкция литералов.

Опр 3**. Пустой дизъюнкт** – дизъюнкт, не содержащий литералов.
□

Пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации на любой модели.

Опр 4. **Правило резолюций** в логике предикатов – из дизъюнктов $\neg P(t_1,\ldots,t_n) \vee H_1$ и $P(s_1,\ldots,s_n) \vee H_2$ выводится дизъюнкт $\sigma(H_1) \vee \sigma(H_2)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))$ и $\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))$ совпадают.

«Наиболее общий унификатор».

Опр 5. **Правило склейки** в логике предикатов – из дизъюнкта $P(t_1,\ldots,t_n)\vee P(s_1,\ldots,s_n)\vee H$ выводится дизъюнкт $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))\vee\sigma(H)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))$ и $\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))$ совпадают.

Либо – из дизъюнкта $\neg P(t_1,\ldots,t_n)\vee\neg P(s_1,\ldots,s_n)\vee H$ выводится дизъюнкт $\sigma(\neg P(t_1,\ldots,t_n))\vee\sigma(H)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))$ и $\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))$ совпадают.

Опр 6. Пусть S множество дизъюнктов. Будем говорить, что дизъюнкт D_n выводится из S, если существует последовательность дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$, такая, что каждый D_i либо принадлежит S, либо получен по правилу резолюций из дизъюнктов среди $D_1, D_2, \ldots, D_{i-1}$, либо получен по правилу склейки.

Вывод D_n из S – эта последовательность $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

Логическое следование (повторение)

Опр 7. Формула $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **логическим следствием формул** $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если для любой модели $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$ из того, что все формулы $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ истинны на этой модели (т.е. для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ для любой интерпретации предметных переменных $a_1 = \varphi(x_1), a_2 = \varphi(x_2), \ldots, a_n = \varphi(x_n)$ на основном множестве M высказывание $\varphi(F_i(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ истинно) следует, что формула $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тоже истинна на этой модели (т.е. для любой интерпретации предметных переменных

$a_1 = \varphi(x_1), a_2 = \varphi(x_2), \ldots, a_n = \varphi(x_n)$ на основном множестве M высказывание $\varphi(G(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ истинно).

Лемма 1.

$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \models G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\Leftrightarrow \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n \models \bar{G}.$

Здесь для любой формулы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через $\bar{F}$ обозначается замыкание $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этой формулы.

Поэтому везде далее будем считать, когда будем говорить о логическом следствии $F_1, F_2, \ldots, F_n \models G,$ что формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$ – *замкнуты.*

Опр 8. Будем говорить, что для множества
$T = \{ f_1(x_1,...,x_n),..., f_k(x_1,...,x_n)\}$ формул ЛП **существует модель**, если *существует* такая модель $\underline{M} = \langle M;\sigma\rangle$ на которой истинны все эти формулы, т.е. что для любых $a_1,...,a_n \in M$ справедливо
$f_1(a_1,...,a_n) = ... = f_k(a_1,...,a_n) = 1$

(другими словами, для множества T существует модель т. и т.т.к. существует модель для формулы
$f(x_1,...,x_n) = f_1(x_1,...,x_n) \wedge ... \wedge f_k(x_1,...,x_n)$,
В частности, существует модель для формулы-замыкания
$\overline{f} = \forall x_1 ... \forall x_n f(x_1,...,x_n)$).

Теорема 1 (из предыдущих лекций)

(1) Каждая формула ЛП равносильна своей ПНФ

(2) Каждая формула ЛП одновременно выполнима или невыполнима вместе со своей СНФ.

Теорема 2.

Множество дизъюнктов S логики предикатов не имеет модели $\Leftrightarrow$ из S выводится пустой дизъюнкт.

<u>Доказательство достаточности</u>:

$\Leftarrow$) Дано: из S выводится пустой дизъюнкт.

Заметим, что правило резолюций и правило склейки сохраняют истинность при некоторой интерпретации φ, если **для всех свободных переменных подразумевается квантор всеобщности**.

1) если $\varphi(\neg P(t_1,\ldots,t_n)\vee H_1)=1$ и $\varphi(P(s_1,\ldots,s_n)\vee H_2)=1$, и существует подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))$ и $\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))$ совпадают, то $\varphi(\sigma(\neg P(t_1,\ldots,t_n))\vee\sigma(H_1))=1$ и $\varphi(\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))\vee\sigma(H_2))=1$.

Либо $\varphi(\sigma(H_1))=1 \Rightarrow \varphi(\sigma(H_1)\vee\sigma(H_2))=1$.

Либо $\varphi(\sigma(H_1))=0 \Rightarrow \varphi(\sigma(\neg P(t_1,\ldots,t_n)))=1 \Rightarrow$
$\varphi(\sigma(P(s_1,\ldots,s_n)))=0 \Rightarrow \varphi(\sigma(H_2))=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(\sigma(H_1)\vee\sigma(H_2))=1$.

2) если $\varphi(P(t_1,\ldots,t_n) \vee P(s_1,\ldots,s_n) \vee H) = 1$, то
$\varphi(\sigma(P(t_1,\ldots,t_n)) \vee \sigma(P(s_1,\ldots,s_n)) \vee \sigma(H)) = 1$.
Тогда $\varphi(\sigma(P(t_1,\ldots,t_n)) \vee \sigma(H)) = 1$.

(От противного) Предположим S имеет модель, т.е. существует интерпретация модель $\underline{M}$ и существует подстановка σ, при которых все дизъюнкты из S истинны для всех значений переменных. Тогда истинны все дизъюнкты из последовательности $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, \square$.

Т.е. $\varphi(\sigma(\square)) = 1$ – противоречие. Значит, S не имеет модели. Достаточность доказана.

Необходимость – без доказательства.

Схема применения метода резолюций для доказательства логического следствия

Дано: $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$ - замкнутые формулы.

1. Формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G$ привести к СНФ.

2. Отбросить кванторы общности.

3. Все получившиеся дизъюнкты собрать в множество S, переименовав, если надо, переменные, чтобы в разных дизъюнктах переменные не повторялись.

4. Построить вывод $\Box$ из S.

Пример 1. Доказать методом резолюций, что G является логическим следствием формул F_1, F_2:

$F_1 = (\forall x)(A(x) \to (\exists y) D(x, y));$

$F_2 = (\forall x)(\forall y)(D(x, y) \to B(x));$

$G = (\forall x)(A(x) \to B(x)).$

$F_1 \equiv (\forall x)(\neg A(x) \vee (\exists y) D(x, y)) \equiv (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \vee D(x, y)) \sim$

$\sim (\forall x)(\neg A(x) \vee D(x, f(x)))$. Дизъюнкт: $\neg A(x) \vee D(x, f(x))$.

$F_2 \equiv (\forall x)(\forall y)(\neg D(x, y) \vee B(x))$. Дизъюнкт: $\neg D(u, y) \vee B(u)$.

$\neg G = \neg(\forall x)(\neg A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x)(A(x)\,\&\,\neg B(x)) \sim (A(a)\,\&\,\neg B(a)).$

Дизъюнкты: $A(a), \neg B(a).$

$$S = \{\neg A(x) \vee D(x, f(x)),\ \neg D(u, y) \vee B(u),\ A(a),\ \neg B(a)\}.$$

$$\neg A(x) \vee D(x, f(x)),\ \neg D(u, y) \vee B(u),\ \{u = x, y = f(x)\}, \neg A(x) \vee B(x),$$

$$A(a), \{x = a\}, B(a), \neg B(a),\ \square.$$

Пример 2 (Сорит Л. Кэррола). Доказать логичность рассуждений
(1) Из всех птиц только страусы достигает 9 футов роста. (2) В этом птичнике нет птиц, которые принадлежали бы кому-нибудь, кроме меня. (3) Ни один страус не питается пирогами с начинкой. (4) У меня нет птиц, которые бы не достигали 9 футов роста. Следовательно, ни одна птица в этом птичнике не питается пирогами с начинкой. Взять в качестве основного множества множество птиц.

Решение. Пусть

$M = \{\text{множество птиц}\}$

$C(x) = 1 \Leftrightarrow x - \text{страус}$

$H(x) = 1 \Leftrightarrow x - \text{достигает 9 футов роста}$

$B(x) = 1 \Leftrightarrow x - \text{птица в этом птичнике}$

$M(x) = 1 \Leftrightarrow x - \text{птица, принадлежащая мне}$

$P(x) = 1 \Leftrightarrow x \text{ питается пирогами с начинкой}$

$F_1 = \forall x(H(x) \to C(x)) \equiv \forall x(\neg H(x) \vee C(x))$. Дизъюнкт: $\neg H(x) \vee C(x)$.

$F_2 = \neg\exists x(B(x) \wedge \neg M(x)) \equiv \forall x(\neg B(x) \vee M(x))$. Дизъюнкт: $\neg B(y) \vee M(y)$.

$F_3 = \neg\exists x(C(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x(\neg C(x) \vee \neg P(x))$. Дизъюнкт: $\neg C(u) \vee \neg P(u)$.

$F_4 = \neg\exists x(M(x) \wedge \neg H(x)) \equiv \forall x(\neg M(x) \vee H(x))$. Дизъюнкт: $\neg M(v) \vee H(v)$

$G = \neg\exists x(B(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x(\neg B(x) \vee \neg P(x))$

$\neg G = \exists x(B(x) \wedge P(x)) \sim B(a) \wedge P(a)$. Дизъюнкты: $B(a), P(a)$.

$S = \{\neg H(x) \vee C(x), \neg B(y) \vee M(y), \neg C(u) \vee \neg P(u),$
$\neg M(v) \vee H(v), B(a), P(a)\}$.

$$\neg H(x) \vee C(x), \neg B(y) \vee M(y), \neg C(u) \vee \neg P(u), \neg M(v) \vee H(v), B(a), P(a);$$

$$\sigma_1 = \{u = x\}, \neg H(x) \vee \neg P(x) \qquad \sigma_2 = \{y = a\}, M(a)$$

$$\sigma_3 = \{x = a\}, \neg H(a)$$

$$\sigma_4 = \{v = a\}, \neg M(a)$$

$$\sigma_5 = \{y = a\}, \neg B(a)$$

$$\square$$

$$\neg H(x) \vee \neg P(x),\ M(a),\ \neg H(a),\ \neg M(a),\ \neg B(a),\ \square$$

Обоснование схемы применения метода резолюций для доказательства логического следствия

Лемма 2. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n, G -$ замкнутые формулы. Тогда $F_1, F_2, \ldots, F_n \models G$ $\Leftrightarrow$ множество S дизъюнкций, входящих в СНФ формул $F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G,$ не имеет модели.

Доказательство. По теореме из лекций
$F_1, F_2, \ldots, F_n \models G$ $\Leftrightarrow$ формула $\Phi = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$
логически противоречива (невыполнима) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ по утв. (2) теоремы 1 сколем. норм. форма формулы Φ – формула $\tilde{\Phi} = \forall x_1 ... \forall x_n (D_1 \wedge ... \wedge D_n)$ логически противоречива (невыполнима), где $S = \{D_1, ..., D_n\}$ - множество дизъюнкций формулы $\tilde{\Phi}$.

Это значит, что формула $\tilde{\tilde{\Phi}}(x_1, ..., x_n) = D_1 \wedge ... \wedge D_n$ логически противоречива, что по опр. означает, что множество $S = \{D_1, ..., D_n\}$ не имеет модели.

Следовательно,
$F_1, F_2, \ldots, F_n \models G$ $\Leftrightarrow$ из множества S *выводится пустой дизъюнкт.*