Лингвистические основы информатики
Лекция 7
Алгоритм Кока-Янгера-Касами

И. А. Михайлова, Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами

Вход. КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ в нормальной форме Хомского и цепочка $w \in \Sigma^+$.
Выход. Вывод слова w, если $w \in L(G)$, сообщение об ошибке, если $w \notin L(G)$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами

Вход. КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ в нормальной форме Хомского и цепочка $w \in \Sigma^+$.
Выход. Вывод слова w, если $w \in L(G)$, сообщение об ошибке, если $w \notin L(G)$.

- Если $w = a$, то слово w выводимо тогда и только тогда когда в грамматике есть правило $S \to a$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами

Вход. КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ в нормальной форме Хомского и цепочка $w \in \Sigma^+$.
Выход. Вывод слова w, если $w \in L(G)$, сообщение об ошибке, если $w \notin L(G)$.

- Если $w = a$, то слово w выводимо тогда и только тогда когда в грамматике есть правило $S \to a$.
- Если $w = w_0 \dots w_{n-1}$, где $n > 1$, то вывод начинается с правила $S \to AB$. Так как грамматика КС и ε-свободная, то $w = uv$, где $A \Rightarrow^* u$, $B \Rightarrow^* v$ $(u, v \neq \varepsilon)$. Действительно, у дерева бинарного (почему бинарного?) дерева T вывода $S \Rightarrow^* w$ левое поддерево T_1 — это дерево вывода $S \Rightarrow^* u$, а правое поддерево T_2 — это дерево вывода $S \Rightarrow^* v$ (см. рис.1).

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами

Вход. КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ в нормальной форме Хомского и цепочка $w \in \Sigma^+$.
Выход. Вывод слова w, если $w \in L(G)$, сообщение об ошибке, если $w \notin L(G)$.

- Если $w = a$, то слово w выводимо тогда и только тогда когда в грамматике есть правило $S \to a$.
- Если $w = w_0 \dots w_{n-1}$, где $n > 1$, то вывод начинается с правила $S \to AB$. Так как грамматика КС и ε-свободная, то $w = uv$, где $A \Rightarrow^* u$, $B \Rightarrow^* v$ $(u, v \neq \varepsilon)$. Действительно, у дерева бинарного (почему бинарного?) дерева T вывода $S \Rightarrow^* w$ левое поддерево T_1 — это дерево вывода $S \Rightarrow^* u$, а правое поддерево T_2 — это дерево вывода $S \Rightarrow^* v$ (см. рис.1).
- Тогда задача сводится к построению соответствующих выводов цепочек u, v уже меньшей длины. Алгоритм основан на методе динамического программирования.

T
S
A
B
T_1
T_2
u_2
u_1
u_k
v_1
v_m
v_2
$B \Rightarrow^* v$
$A \Rightarrow^* u$
$v = v_1 v_2 \ldots v_k$
$u = u_1 u_2 \ldots u_k$

Рис. 1

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Обозначим через $w[i,l]$, $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, $i \leq l \leq n-i-1$, подслово $w_i w_{i+1} \ldots w_l$ слова $w = w_0 w_1 \ldots w_{n-1}$ (которое начинается с позиции i и имеет длину $j = l - i + 1$).
  Слово $w[i, i+j-1]$ тогда имеет, очевидно, длину j.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Обозначим через $w[i, l]$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $i \leq l \leq n-i-1$, подслово $w_i w_{i+1} \ldots w_l$ слова $w = w_0 w_1 \ldots w_{n-1}$ (которое начинается с позиции i и имеет длину $j = l - i + 1$).
Слово $w[i, i+j-1]$ тогда имеет, очевидно, длину j.
- Обозначим для всех $1 \leq j \leq n$ и $0 \leq i \leq n-j$ множество нетерминалов $\Gamma_{i,j} = \{C \in \Gamma \mid C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]\}$. (Почему случай $j = 0$ нас не интересует?)

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Обозначим через $w[i, l]$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $i \leq l \leq n-i-1$, подслово $w_i w_{i+1} \dots w_l$ слова $w = w_0 w_1 \dots w_{n-1}$ (которое начинается с позиции i и имеет длину $j = l - i + 1$).
  Слово $w[i, i+j-1]$ тогда имеет, очевидно, длину j.
- Обозначим для всех $1 \leq j \leq n$ и $0 \leq i \leq n-j$ множество нетерминалов $\Gamma_{i,j} = \{C \in \Gamma \mid C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]\}$. (Почему случай $j = 0$ нас не интересует?)
- Найдем множества $\Gamma_{i,j}$ индукцией по $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, n-j\}$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Обозначим через $w[i, l]$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $i \leq l \leq n-i-1$, подслово $w_i w_{i+1} \ldots w_l$ слова $w = w_0 w_1 \ldots w_{n-1}$ (которое начинается с позиции i и имеет длину $j = l - i + 1$).
  Слово $w[i, i+j-1]$ тогда имеет, очевидно, длину j.
- Обозначим для всех $1 \leq j \leq n$ и $0 \leq i \leq n-j$ множество нетерминалов $\Gamma_{i,j} = \{C \in \Gamma \mid C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]\}$. (Почему случай $j = 0$ нас не интересует?)
- Найдем множества $\Gamma_{i,j}$ индукцией по $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, n-j\}$.
- Очевидно, $w[i, i] = w_i \in \Sigma$. Положим $\Gamma_{i,1} = \{C \in \Gamma \mid C \Rightarrow w_i\}$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Обозначим через $w[i,l]$, $i \in \{0,\dots,n-1\}$, $i \le l \le n-i-1$, подслово $w_i w_{i+1} \dots w_l$ слова $w = w_0 w_1 \dots w_{n-1}$ (которое начинается с позиции i и имеет длину $j = l - i + 1$).
  Слово $w[i, i+j-1]$ тогда имеет, очевидно, длину j.
- Обозначим для всех $1 \le j \le n$ и $0 \le i \le n-j$ множество нетерминалов $\Gamma_{i,j} = \{C \in \Gamma \mid C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]\}$. (Почему случай $j = 0$ нас не интересует?)
- Найдем множества $\Gamma_{i,j}$ индукцией по $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, n-j\}$.
- Очевидно, $w[i,i] = w_i \in \Sigma$. Положим $\Gamma_{i,1} = \{C \in \Gamma \mid C \Rightarrow w_i\}$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
- Заметим, что

$$
\begin{aligned}
& w[i, i+j-1] = w_i w_{i+1} \dots w_{i+j-1} = \\
& = {\color{red} w_i w_{i+1} \dots w_{i+k-1}} \, {\color{blue} w_{i+k} w_{i+k+1} \dots w_{i+j-1}} = \\
& = {\color{red} w[i, i+k-1]} \, {\color{blue} w[i+k, i+j-1]}
\end{aligned}
$$

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Тогда для $1 < j \le n$ и $0 \le i \le n - j$ имеем

$$
\begin{aligned}
& C \in \Gamma_{i,j} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \Rightarrow^* w[i, i+k-1], B \Rightarrow^* w[i+k, i+j-1] \\
& \Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,j-k} \\
& \Leftrightarrow \exists k, m \quad k + m = j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,m}
\end{aligned}
$$

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Тогда для $1 < j \leq n$ и $0 \leq i \leq n - j$ имеем

$$
\begin{aligned}
& C \in \Gamma_{i,j} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \Rightarrow^{*} w[i, i+k-1], B \Rightarrow^{*} w[i+k, i+j-1] \\
& \Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,j-k} \\
& \Leftrightarrow \exists k, m \quad k + m = j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,m}
\end{aligned}
$$

- Так как $k < n$, $m < n$, то множество $\Gamma_{i,j}$ таким образом можно будет найти по уже найденным ранее множествам $\Gamma_{i,k}$, $\Gamma_{i+k,m}$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Тогда для $1 < j \le n$ и $0 \le i \le n - j$ имеем

$$
\begin{aligned}
&C \in \Gamma_{i,j} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \Rightarrow^* w[i, i+k-1], B \Rightarrow^* w[i+k, i+j-1] \\
&\Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,j-k} \\
&\Leftrightarrow \exists k, m \quad k + m = j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,m}
\end{aligned}
$$

- Так как $k < n$, $m < n$, то множество $\Gamma_{i,j}$ таким образом можно будет найти по уже найденным ранее множествам $\Gamma_{i,k}$, $\Gamma_{i+k,m}$.
- Поскольку, очевидно, $w = w_0 w_1 \dots w_{n+0-1} \in \Gamma_{0,n}$, то $S \Rightarrow^* w \Leftrightarrow S \in \Gamma_{0,n}$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Тогда для $1 < j \leq n$ и $0 \leq i \leq n - j$ имеем

$$
\begin{aligned}
& C \in \Gamma_{i,j} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \Rightarrow^* w[i, i+k-1], B \Rightarrow^* w[i+k, i+j-1] \\
& \Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,j-k} \\
& \Leftrightarrow \exists k, m \quad k + m = j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,m}
\end{aligned}
$$

- Так как $k < n$, $m < n$, то множество $\Gamma_{i,j}$ таким образом можно будет найти по уже найденным ранее множествам $\Gamma_{i,k}$, $\Gamma_{i+k,m}$.
- Поскольку, очевидно, $w = w_0 w_1 \dots w_{n+0-1} \in \Gamma_{0,n}$, то $S \Rightarrow^* w \Leftrightarrow S \in \Gamma_{0,n}$.
- Если $S \notin \Gamma_{0,n}$, делаем сообщение об ошибке.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (продолжение)

- Тогда для $1 < j \le n$ и $0 \le i \le n - j$ имеем

$$
\begin{aligned}
& C \in \Gamma_{i,j} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \Rightarrow^* w[i, i+k-1], B \Rightarrow^* w[i+k, i+j-1] \\
& \Leftrightarrow \exists k < j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,j-k} \\
& \Leftrightarrow \exists k, m \quad k + m = j \quad \exists (C \to AB) \in P \quad A \in \Gamma_{i,k}, B \in \Gamma_{i+k,m}
\end{aligned}
$$

- Так как $k < n$, $m < n$, то множество $\Gamma_{i,j}$ таким образом можно будет найти по уже найденным ранее множествам $\Gamma_{i,k}$, $\Gamma_{i+k,m}$.
- Поскольку, очевидно, $w = w_0 w_1 \dots w_{n+0-1} \in \Gamma_{0,n}$, то $S \Rightarrow^* w \Leftrightarrow S \in \Gamma_{0,n}$.
- Если $S \notin \Gamma_{0,n}$, делаем сообщение об ошибке.
- Если $S \in \Gamma_{0,n}$, то восстанавливаем дерево $T_{0,,n,S}$ вывода $S \Rightarrow^* w$, (а значит, и сам вывод) по множествам $\Gamma_{i,j}$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (окончание)

- Заметим, что нами уже построено индукцией по $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ бинарное дерево вывода $T_{i,j}$, для каждого $C \in \Gamma_{i,j}$ и сам вывод $C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]$ длины j. Действительно:

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (окончание)

- Заметим, что нами уже построено индукцией по $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ бинарное дерево вывода $T_{i,j,}$ для каждого $C \in \Gamma_{i,j}$ и сам вывод $C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]$ длины j. Действительно:
- Б.И. Если $j = 1$, то $C \Rightarrow w[i, i]$, где $w[i, i] = w_i$, а дерево $T_{i,1,C}$ состоит из единственной дуги $(C; w_i)$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (окончание)

- Заметим, что нами уже построено индукцией по $j \in \{1, 2 \dots, n\}$ бинарное дерево вывода $T_{i,j,}$ для каждого $C \in \Gamma_{i,j}$ и сам вывод $C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]$ длины j. Действительно:
- Б.И. Если $j = 1$, то $C \Rightarrow w[i, i]$, где $w[i, i] = w_i$, а дерево $T_{i,1,C}$ состоит из единственной дуги $(C; w_i)$.
- Ш.И. Пусть $j > 1$, тогда существуют такие $k, m \in \{1, \dots, n\}$, что $k + m = j$ (т.е. $k < j$, $m < j$), $C \Rightarrow AB$, и по П.И. уже построены бинарные деревья $T_{i,k,A}$, $T_{i+k,m,B}$ выводов $A \Rightarrow^* w[i, i+k-1]$, $B \Rightarrow^* w[i+k, i+j-1]$ длин k, m соответственно. И тогда дерево $T_{i,j,C}$ представляет собой бинарное дерево с левым поддеревом $T_{i,k,A}$ и правым поддеревом $T_{i+k,m,B}$ (см. рис.2).

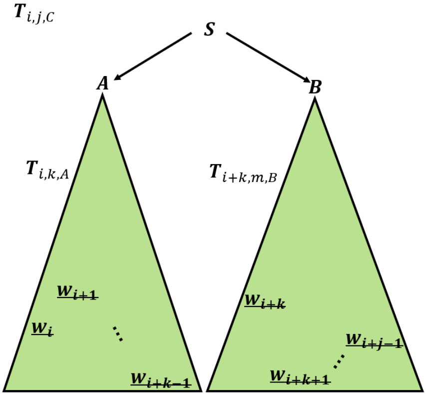
Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (окончание)

- Заметим, что нами уже построено индукцией по $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ бинарное дерево вывода $T_{i,j,}$ для каждого $C \in \Gamma_{i,j}$ и сам вывод $C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]$ длины j. Действительно:
- Б.И. Если $j = 1$, то $C \Rightarrow w[i, i]$, где $w[i, i] = w_i$, а дерево $T_{i,1,C}$ состоит из единственной дуги $(C; w_i)$.
- Ш.И. Пусть $j > 1$, тогда существуют такие $k, m \in \{1, \ldots, n\}$, что $k + m = j$ (т.е. $k < j$, $m < j$), $C \Rightarrow AB$, и по П.И. уже построены бинарные деревья $T_{i,k,A}$, $T_{i+k,m,B}$ выводов $A \Rightarrow^* w[i, i+k-1]$, $B \Rightarrow^* w[i+k, i+j-1]$ длин k, m соответственно. И тогда дерево $T_{i,j,C}$ представляет собой бинарное дерево с левым поддеревом $T_{i,k,A}$ и правым поддеревом $T_{i+k,m,B}$ (см. рис.2).
- Если $A \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_k = w[i, i+k-1]$, $B \Rightarrow v_1 \Rightarrow v_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_m = w[i+k, i+j-1]$, где $u_t, v_r \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, то имеем вывод $C \Rightarrow AB \Rightarrow u_1B \Rightarrow u_2B \Rightarrow \ldots \Rightarrow uB \Rightarrow u_kv_1 \Rightarrow u_kv_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_kv_m = w[i, i+m-1]w[i+k, i+j-1] = w[i, i+j-1]$ длины $k + m = j$.

Описание алгоритма Кока-Янгера-Касами (окончание)

- Заметим, что нами уже построено индукцией по $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ бинарное дерево вывода $T_{i,j,}$ для каждого $C \in \Gamma_{i,j}$ и сам вывод $C \Rightarrow^* w[i, i+j-1]$ длины j. Действительно:
- <u>Б.И.</u> Если $j = 1$, то $C \Rightarrow w[i, i]$, где $w[i, i] = w_i$, а дерево $T_{i,1,C}$ состоит из единственной дуги $(C; w_i)$.
- <u>Ш.И.</u> Пусть $j > 1$, тогда существуют такие $k, m \in \{1, \ldots, n\}$, что $k + m = j$ (т.е. $k < j$, $m < j$), $C \Rightarrow AB$, и по <u>П.И.</u> уже построены бинарные деревья $T_{i,k,A}$, $T_{i+k,m,B}$ выводов $A \Rightarrow^* w[i, i+k-1]$, $B \Rightarrow^* w[i+k, i+j-1]$ длин k, m соответственно. И тогда дерево $T_{i,j,C}$ представляет собой бинарное дерево с левым поддеревом $T_{i,k,A}$ и правым поддеревом $T_{i+k,m,B}$ (см. рис.2).
- Если $A \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_k = w[i, i+k-1]$, $B \Rightarrow v_1 \Rightarrow v_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_m = w[i+k, i+j-1]$, где $u_t, v_r \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, то имеем вывод $C \Rightarrow AB \Rightarrow u_1 B \Rightarrow u_2 B \Rightarrow \ldots \Rightarrow uB \Rightarrow u_k v_1 \Rightarrow u_k v_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_k v_m = w[i, i+m-1]w[i+k, i+j-1] = w[i, i+j-1]$ длины $k + m = j$.
- Конец алгоритма.

Дерево вывода $S \to w$. Иллюстрация



$A \Rightarrow^* w[i, i+k-1] =$
$= w_i \, w_{i+1} \ldots w_{i+k-1}$

$B \Rightarrow^* w[i+k, i+j-1] =$
$= w_{i+k} \, w_{i+k+1} \ldots w_{i+j-1}$

Рис. 2

Пример работы алгоритма

Задача Дана грамматика G в НФХ:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid BC \\
A &\to BA \mid a \\
B &\to CC \mid b \\
C &\to AB \mid a
\end{aligned}
$$

Выяснить, принадлежит ли слово w $=$ baaba языку $L(G)$ и если да, то построить вывод $S \Rightarrow^{*} w$.

b					
a					
a					
b					
a					

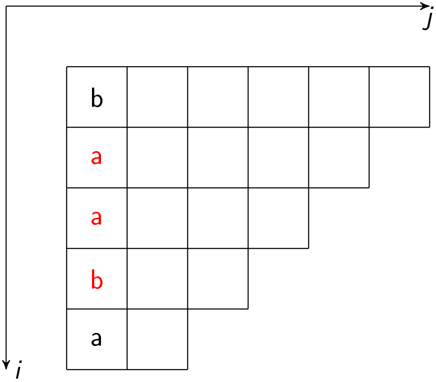
Пример (продолжение)

j

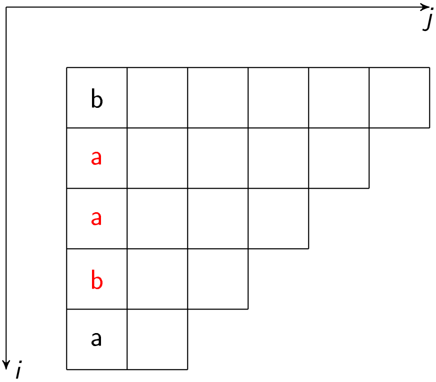
b					
a					
a					
b					
a					

i

Пример (продолжение)

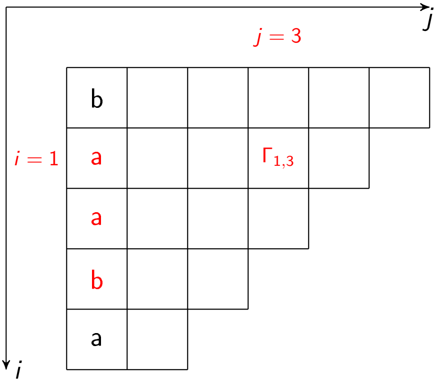


Пример (продолжение)



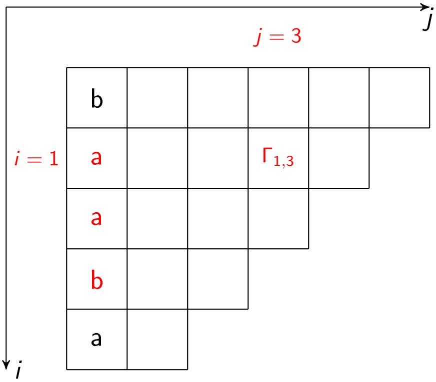
В клетке в i-й строке и в j-м столбце будем записывать множество $\Gamma_{i,j}$.

Пример (продолжение)



В клетке в i-й строке и в j-м столбце будем записывать множество $\Gamma_{i,j}$.

Пример (продолжение)



В клетке в i-й строке и в j-м столбце будем записывать множество $\Gamma_{i,j}$.

В данном случае $i = 1$, $j = 3$.

Пример (продолжение)

b					
a					
a					
b					
a					

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример (продолжение)

$j = 1$

b	B				
a	A,C				
a	A,C				
b	B				
a	A,C				

$S \to AB \mid BC$
$A \to BA \mid a$
$B \to CC \mid b$
$C \to AB \mid a$

$i = 0,\ j = 1,\ X \in \Gamma_{0,1} \Leftrightarrow (X \to w_0) \in P \Leftrightarrow (X \to b) \in P \Rightarrow X = B$
$i = 1,\ j = 1,\ X \in \Gamma_{1,1} \Leftrightarrow (X \to w_1) \in P \Leftrightarrow (X \to a) \Rightarrow X = \{A, C\}$
$i = 2,\ j = 1,\ \Gamma_{2,1} = \Gamma_{1,1}$
$i = 3,\ j = 1,\ \Gamma_{3,1} = \Gamma_{0,1}$
$i = 4,\ j = 1,\ \Gamma_{4,1} = \Gamma_{1,1}$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$			
b	B				
a	A,C				
a	A,C				
b	B				
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$			
b	B	$\Gamma_{0,2}$			
a	A,C				
a	A,C				
b	B				
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

$i = 0, j = 2, \exists k, m > 0 \; k + m = j \Rightarrow k = m = 1,$
$X \in \Gamma_{0,2} \Leftrightarrow (X \to X_1 X_2) \in P, X_1 \in \Gamma_{0,1}, X_2 \in \Gamma_{0+1,1} \Leftrightarrow$
$(X \to X_1 X_2) \in P, X_1 \in \{B\}, X_2 \in \{A, C\} \Leftrightarrow$
$X \to BA$ или $X \to BC \Leftrightarrow X \in \{A, S\}$

	$j=1$	$j=2$			
b	B	$\Gamma_{0,2}$			
a	A,C				
a	A,C				
b	B				
a	A,C				

$S \to AB \mid BC$

$A \to BA \mid a$

$B \to CC \mid b$

$C \to AB \mid a$

$i=0, j=2, \exists k, m > 0 \; k+m=j \Rightarrow k=m=1,$
$X \in \Gamma_{0,2} \Leftrightarrow (X \to X_1X_2) \in P, X_1 \in \Gamma_{0,1}, X_2 \in \Gamma_{0+1,1} \Leftrightarrow$
$(X \to X_1X_2) \in P, X_1 \in \{B\}, X_2 \in \{A, C\} \Leftrightarrow$
$X \to BA$ или $X \to BC \Leftrightarrow X \in \{A, S\}$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$			
b	B	A,S			
a	A,C				
a	A,C				
b	B				
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

$i = 0, j = 2, \exists k, m > 0\ k + m = j \Rightarrow k = m = 1,$
$X \in \Gamma_{0,2} \Leftrightarrow (X \to X_1 X_2) \in P, X_1 \in \Gamma_{0,1}, X_2 \in \Gamma_{0+1,1} \Leftrightarrow$
$(X \to X_1 X_2) \in P, X_1 \in \{B\}, X_2 \in \{A, C\} \Leftrightarrow$
$X \to BA$ или $X \to BC \Leftrightarrow X \in \{A, S\}$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$			
b	B	A,S			
a	A,C	B			
a	A,C				
b	B				
a	A,C				

$S \to AB \mid BC$

$A \to BA \mid a$

$B \to CC \mid b$

$C \to AB \mid a$

$i = 1, j = 2, \exists k, m > 0 \; k + m = j \Rightarrow k = m = 1,$
$X \in \Gamma_{1,2} \Leftrightarrow (X \to X_1X_2) \in P, X_1 \in \Gamma_{1,1}, X_2 \in \Gamma_{1+1,1} \Leftrightarrow$
$(X \to X_1X_2) \in P, X_1 \in \{A, C\}, X_2 \in \{A, C\} \Leftrightarrow$
$X \to AA$ или $X \to AC$ или $X \to CA$ или $X \to CC$
$\Leftrightarrow X = B$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$			
b	B	A,S			
a	A,C	B			
a	A,C	S,C			
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

$X \in \Gamma_{2,2} \Leftrightarrow (X \to X_1X_2) \in P, X_1 \in \Gamma_{2,1}, X_2 \in \Gamma_{2+1,1} \Leftrightarrow$
$(X \to X_1X_2) \in P, X_1 \in \{A, C\}, X_2 \in \{B\} \Leftrightarrow$
$X \to AB$ или $X \to CB \Leftrightarrow X \in \{S, C\}$
$X \in \Gamma_{3,2} \Leftrightarrow (X \to X_1X_2) \in P, X_1 \in \Gamma_{3,1}, X_2 \in \Gamma_{3+1,1} \Leftrightarrow$
$(X \to X_1X_2) \in P, X_1 \in \{B\}, X_2 \in \{A, C\} \Leftrightarrow$
$X \to BA$ или $X \to BC \Leftrightarrow X \in \{A, S\}$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$		
b	B	A,S	$\Gamma_{0,3}$		
a	A,C	B			
a	A,C	S,C			
b	B	A,S			
a	A,C				

$S \to AB \mid BC$

$A \to BA \mid a$

$B \to CC \mid b$

$C \to AB \mid a$

$X \in \Gamma_{0,3} \Leftrightarrow \exists k, m > 0 \; k+m=3 \; \exists (X \to X_1 X_2) \in P$

$X_1 \in \Gamma_{0,k}, X_2 \in \Gamma_{0+k,m}$

$k=1, m=2$: $X_1 \in \Gamma_{0,1} = \{B\}$, $X_2 \in \Gamma_{1,2} = \{B\}$,

$X \to BB \Rightarrow X \in \emptyset$

$k=2, m=1$: $X_1 \in \Gamma_{0,2} = \{A, S\}$, $X_2 \in \Gamma_{2,1} = \{A, C\}$,

$X \to AA \mid AC \mid SA \mid SC \Rightarrow X \in \emptyset \Rightarrow \Gamma_{0,3} = \emptyset$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$		
b	B	A,S			
a	A,C	B			
a	A,C	S,C			
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$		
b	B	A,S			
a	A,C	B			
a	A,C	S,C			
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

$X \in \Gamma_{1,3} \Leftrightarrow \exists k, m > 0\ k+m=3\ \exists (X \to X_1 X_2) \in P$

$X_1 \in \Gamma_{1,k}, X_2 \in \Gamma_{1+k,m}$

$k=1$, $m=2$: $X_1 \in \Gamma_{1,1} = \{A, C\}$, $X_2 \in \Gamma_{2,2} = \{S, C\}$,

$X \to AS \mid CS \mid AC \mid CC \Rightarrow X = B$

$k=2$, $m=1$: $X_1 \in \Gamma_{2,2} = \{S, \}$, $X_2 \in \Gamma_{3,1} = \{A, S\}$,

$X \to SA \mid CA \mid SS \mid CS \Rightarrow X \in \emptyset \Rightarrow \Gamma_{1,3} = \{B\}$,

$\Gamma_{2,3} = \{B\}$ — (аналогично)

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$		
b	B	A,S			
a	A,C	B	B		
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	
b	B	A,S		$\Gamma_{0,4}$	
a	A,C	B	B		
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	
b	B	A,S		$\Gamma_{0,4}$	
a	A,C	B	B		
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

$X \in \Gamma_{0,4} \Leftrightarrow \exists k, m > 0 \; k+m=4 \; \exists (X \to X_1X_2) \in P$
$X_1 \in \Gamma_{0,k}, X_2 \in \Gamma_{0+k,m}$
$k=1, m=3$: $X_1 \in \Gamma_{0,1} = \{B\}$, $X_2 \in \Gamma_{1,3} = \{B\}$,
$X \to BB \Rightarrow X \in \emptyset$
$k=2, m=2$: $X_1 \in \Gamma_{0,2} = \{A, S\}$, $X_2 \in \Gamma_{2,2} = \{S, C\}$,
$X \to AS \mid SS \mid AC \mid SC \Rightarrow X \in \emptyset$
$k=3, m=1$: $X_1 \in \Gamma_{0,3} = \emptyset$, $X_2 \in \Gamma_{3,1} = \{B\}$,
$X \in \emptyset \Rightarrow \Gamma_{0,4} = \emptyset$.

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	
b	B	A,S		$\Gamma_{0,4}$	
a	A,C	B	B		
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	
b	B	A,S	■	$\Gamma_{0,4}$	
a	A,C	B	B		
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	
b	B	A,S	■	$\Gamma_{0,4}$	
a	A,C	B	B		
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	
b	B	A,S		$\Gamma_{0,4}$	
a	A,C	B			
a	A,C		B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

$X \in \Gamma_{1,4} \Leftrightarrow \exists k, m > 0\ k + m = 4\ \exists (X \to X_1 X_2) \in P$

$X_1 \in \Gamma_{1,k}, X_2 \in \Gamma_{1+k,m}$

$k = 1$, $m = 3$: $X_1 \in \Gamma_{1,1} = \{A, C\}$, $X_2 \in \Gamma_{2,3} = \{B\}$,

$X \to AB \mid CB \Rightarrow X \in \{S, C\}$

$k = 2$, $m = 2$: $X_1 \in \Gamma_{1,2} = \{B\}$, $X_2 \in \Gamma_{3,2} = \{A, S\}$,

$X \to BA \mid BS \Rightarrow X = A$

$k = 3$, $m = 1$: $X_1 \in \Gamma_{1,3} = \{B\}$, $X_2 \in \Gamma_{4,1} = \{A, C\}$,

$X \to BA \mid BC \Rightarrow \Gamma_{1,4} = \{A, S, C\}$.

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			
a	A,C	B	B	A, S, C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			S
a	A,C	B	B	A, S, C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

$X \in \Gamma_{0,5} \Leftrightarrow \exists k, m > 0 \; k + m = 5 \; \exists (X \to X_1 X_2) \in P$
$X_1 \in \Gamma_{0,k}, X_2 \in \Gamma_{0+k,m}$
$k = 1, m = 4$: $X_1 \in \Gamma_{0,1} = \{B\}$, $X_2 \in \Gamma_{1,4} = \{A, S, C\}$,
$X \to BA \mid BS \mid BC \Rightarrow X \in \{A, S\}$.
$k = 2, m = 3$: $X_1 \in \Gamma_{0,2} = \{A, S\}$, $X_2 \in \Gamma_{23} = \{B\}$,
$X \to AB \mid SB \Rightarrow X = S$
$k = 3, m = 2$: $X_1 \in \Gamma_{0,3} = \emptyset$, $X_2 \in \Gamma_{32} = \{A, S\}$,
$X \in \emptyset \Rightarrow \Gamma_{0,4} = \emptyset \Rightarrow \Gamma_{0,5} = \{A, S\}$, $S \in \Gamma_{0,5}$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			S
a	A,C	B	B	A, S, C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример (продолжение)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			S
a	A,C	B	B	A, S, C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			S
a	A,C	B	B	A, S, C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			S
a	A,C	B	B	A,S,C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid BC \\
A &\to BA \mid a \\
B &\to CC \mid b \\
C &\to AB \mid a
\end{aligned}
$$

Изобразим графически все правила вывода $X \to X_1 X_2$, где $X \in \Gamma_{i,j}$, $X_1 \in \Gamma_{i,k}$, $X_2 \in \Gamma_{i+k,m}$. Получим объединение $\cup_{i,j,C} T_{i,j,C}$ деревьев (см.рис.3).
По нему построим всевозможные деревья $T_{0,n,S}$, $T'_{0,n,S}$ (см.рис.4–5), а по ним уже восстановим выводы $S \Rightarrow^* w$ (см.рис.6–7).

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			S
a	A,C	B	B	A,S,C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Изобразим графически все правила вывода $X \to X_1 X_2$, где $X \in \Gamma_{i,j}$, $X_1 \in \Gamma_{i,k}$, $X_2 \in \Gamma_{i+k,m}$. Получим объединение $\cup_{i,j,C} T_{i,j,C}$ деревьев (см.рис.3).
По нему построим всевозможные деревья $T_{0,n,S}$, $T'_{0,n,S}$ (см.рис.4–5), а по ним уже восстановим выводы $S \Rightarrow^* w$ (см.рис.6–7).

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			S
a	A,C	B	B	A,S,C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Изобразим графически все правила вывода $X \to X_1 X_2$, где $X \in \Gamma_{i,j}$, $X_1 \in \Gamma_{i,k}$, $X_2 \in \Gamma_{i+k,m}$. Получим объединение $\cup_{i,j,C} T_{i,j,C}$ деревьев (см.рис.3).
По нему построим всевозможные деревья $T_{0,n,S}$, $T'_{0,n,S}$ (см.рис.4–5), а по ним уже восстановим выводы $S \Rightarrow^* w$ (см.рис.6–7).

Пример

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
b	B	A,S			S
a	A,C	B	B	A,S,C	
a	A,C	S,C	B		
b	B	A,S			
a	A,C				

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Изобразим графически все правила вывода $X \to X_1X_2$, где $X \in \Gamma_{i,j}$, $X_1 \in \Gamma_{i,k}$, $X_2 \in \Gamma_{i+k,m}$. Получим объединение $\cup_{i,j,C} T_{i,j,C}$ деревьев (см.рис.3).
По нему построим всевозможные деревья $T_{0,n,S}$, $T'_{0,n,S}$ (см.рис.4–5), а по ним уже восстановим выводы $S \Rightarrow^* w$ (см.рис.6–7).

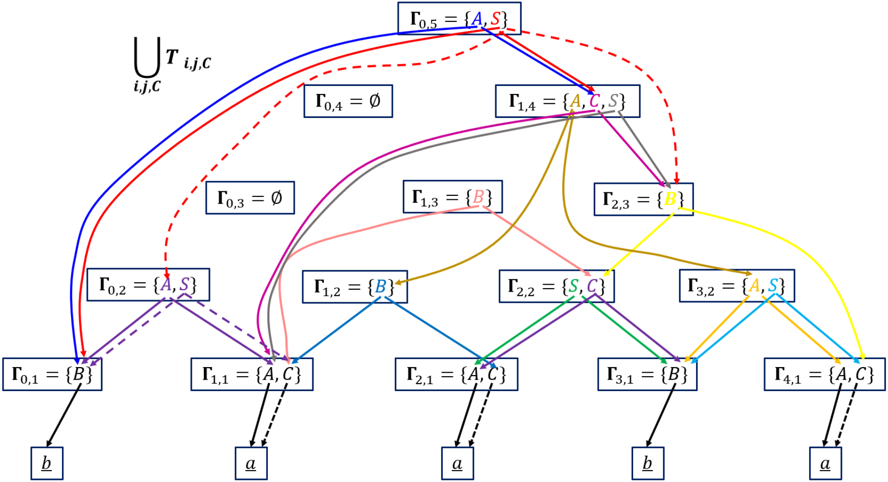

$\bigcup_{i,j,C} T_{i,j,C}$
$\Gamma_{0,5} = \{A, S\}$
$\Gamma_{0,4} = \emptyset$
$\Gamma_{1,4} = \{A, C, S\}$
$\Gamma_{0,3} = \emptyset$
$\Gamma_{1,3} = \{B\}$
$\Gamma_{2,3} = \{B\}$
$\Gamma_{0,2} = \{A, S\}$
$\Gamma_{1,2} = \{B\}$
$\Gamma_{2,2} = \{S, C\}$
$\Gamma_{3,2} = \{A, S\}$
$\Gamma_{0,1} = \{B\}$
$\Gamma_{1,1} = \{A, C\}$
$\Gamma_{2,1} = \{A, C\}$
$\Gamma_{3,1} = \{B\}$
$\Gamma_{4,1} = \{A, C\}$
b
a
a
b
a

Рис. 3

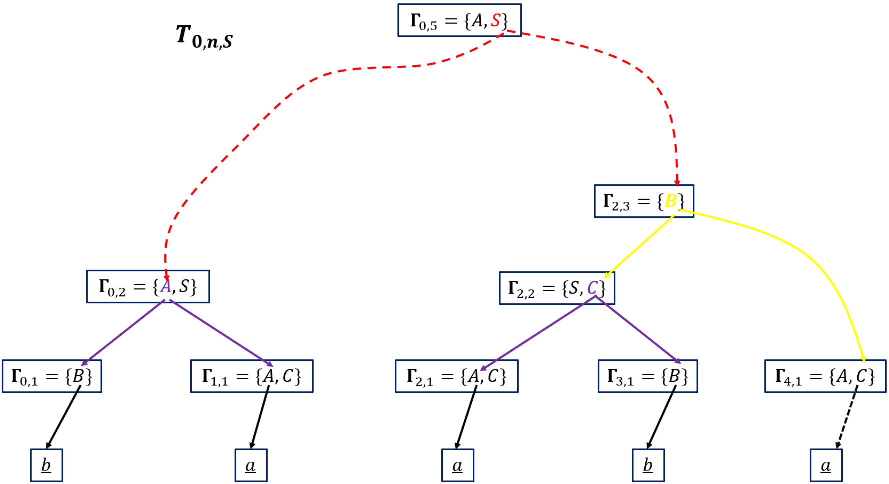
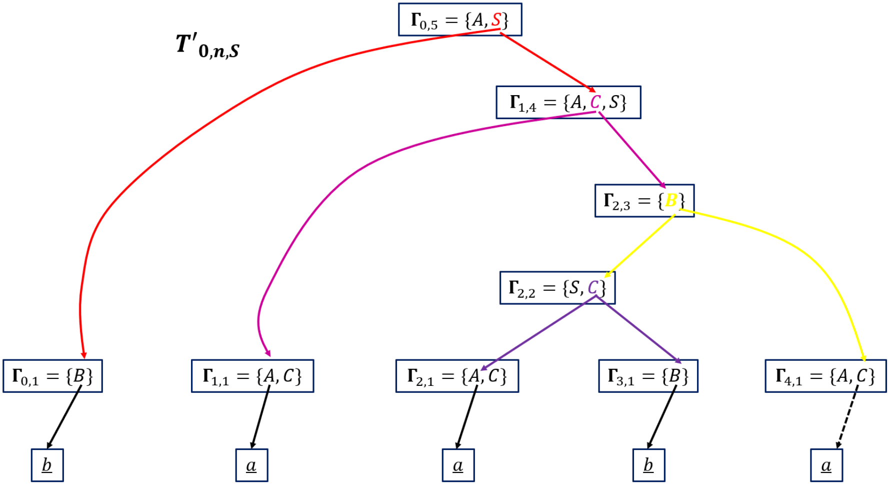

$T_{0,n,S}$
$\Gamma_{0,5} = \{A, S\}$
$\Gamma_{2,3} = \{B\}$
$\Gamma_{0,2} = \{A, S\}$
$\Gamma_{2,2} = \{S, C\}$
$\Gamma_{0,1} = \{B\}$
$\Gamma_{1,1} = \{A, C\}$
$\Gamma_{2,1} = \{A, C\}$
$\Gamma_{3,1} = \{B\}$
$\Gamma_{4,1} = \{A, C\}$
b
a
a
b
a

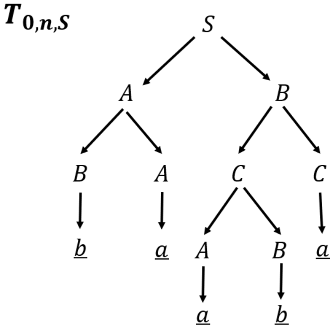
Рис. 4



$T'_{0,n,S}$
$\Gamma_{0,5} = \{A, S\}$
$\Gamma_{1,4} = \{A, C, S\}$
$\Gamma_{2,3} = \{B\}$
$\Gamma_{2,2} = \{S, C\}$
$\Gamma_{0,1} = \{B\}$
$\Gamma_{1,1} = \{A, C\}$
$\Gamma_{2,1} = \{A, C\}$
$\Gamma_{3,1} = \{B\}$
$\Gamma_{4,1} = \{A, C\}$
b
a
a
b
a

Рис. 5

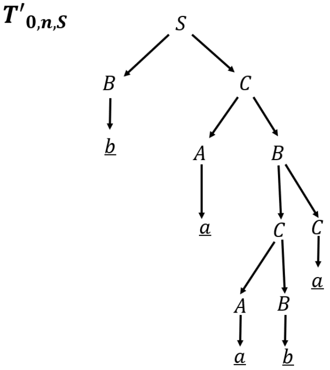
Первый вывод. Иллюстрация



$S \Rightarrow AB \Rightarrow BAB \Rightarrow bAB \Rightarrow baB \Rightarrow baCC \Rightarrow$
$\Rightarrow baABC \Rightarrow baaBC \Rightarrow baabC \Rightarrow baaba$

Рис. 6

Второй вывод. Иллюстрация



$S \Rightarrow BC \Rightarrow bAB \Rightarrow baB \Rightarrow baCC \Rightarrow baABC \Rightarrow$
$\Rightarrow\ baaBC \Rightarrow\ baabA \Rightarrow baaba$

Рис. 7