Лингвистические основы информатики Лекция 6 **Ацикличные грамматики и нормальная форма Хомского**

Ю. В. Нагребецкая, И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- **Циклом** в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- Циклом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.
- Грамматика называется циклической, если в ней есть хотя бы один цикл.

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- **Циклом** в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.
- Грамматика называется **циклической**, если в ней есть хотя бы один цикл.
- Грамматика называется **ациклической**, если в ней нет циклов.

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- Циклом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.
- Грамматика называется циклической, если в ней есть хотя бы один цикл.
- Грамматика называется ациклической, если в ней нет циклов.

Очевидно, цикличность является «плохим» свойством грамматики, поскольку одна и та же цепочка может иметь бесконечно много выводов (и деревьев вывода) в циклической грамматике. Поэтому первое из рассматриваемых преобразований – это устранение цикличности.

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- Циклом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.
- Грамматика называется циклической, если в ней есть хотя бы один цикл.
- Грамматика называется ациклической, если в ней нет циклов.

Очевидно, цикличность является «плохим» свойством грамматики, поскольку одна и та же цепочка может иметь бесконечно много выводов (и деревьев вывода) в циклической грамматике. Поэтому первое из рассматриваемых преобразований – это устранение цикличности.

Пример 1. Грамматика $G : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to B \mid a, B \to C \mid b, C \to A\}$, очевидно, является цикличной,

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- Циклом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.
- Грамматика называется циклической, если в ней есть хотя бы один цикл.
- Грамматика называется ациклической, если в ней нет циклов.

Очевидно, цикличность является «плохим» свойством грамматики, поскольку одна и та же цепочка может иметь бесконечно много выводов (и деревьев вывода) в циклической грамматике. Поэтому первое из рассматриваемых преобразований – это устранение цикличности.

Пример 1. Грамматика $G : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to B \mid a, B \to C \mid b, C \to A\}$, очевидно, является цикличной, поскольку в ней есть цикл $A \Rightarrow_G^+ A$:
$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$.

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- Циклом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow^+_G A$.
- Грамматика называется циклической, если в ней есть хотя бы один цикл.
- Грамматика называется ациклической, если в ней нет циклов.

Очевидно, цикличность является «плохим» свойством грамматики, поскольку одна и та же цепочка может иметь бесконечно много выводов (и деревьев вывода) в циклической грамматике. Поэтому первое из рассматриваемых преобразований – это устранение цикличности.

Пример 1. Грамматика $G : \{S \rightarrow A \mid \varepsilon, A \rightarrow B \mid a, B \rightarrow C \mid b, C \rightarrow A\}$, очевидно, является цикличной, поскольку в ней есть цикл $A \Rightarrow^+_G A$: $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$.

Пример 2. Грамматика $G : \{S \rightarrow A, A \rightarrow B \mid a, B \rightarrow CA \mid b, C \rightarrow c \mid \varepsilon\}$, тоже циклична.

- Циклом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.
- Грамматика называется циклической, если в ней есть хотя бы один цикл.
- Грамматика называется ациклической, если в ней нет циклов.

Очевидно, цикличность является «плохим» свойством грамматики, поскольку одна и та же цепочка может иметь бесконечно много выводов (и деревьев вывода) в циклической грамматике. Поэтому первое из рассматриваемых преобразований – это устранение цикличности.

Пример 1. Грамматика $G : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to B \mid a, B \to C \mid b, C \to A\}$, очевидно, является цикличной, поскольку в ней есть цикл $A \Rightarrow_G^+ A$: $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$.

Пример 2. Грамматика $G : \{S \to A, A \to B \mid a, B \to CA \mid b, C \to c \mid \varepsilon\}$, тоже циклична. Действительно, $A \Rightarrow B \Rightarrow CA \Rightarrow A$.

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- Циклом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.
- Грамматика называется циклической, если в ней есть хотя бы один цикл.
- Грамматика называется ациклической, если в ней нет циклов.

Очевидно, цикличность является «плохим» свойством грамматики, поскольку одна и та же цепочка может иметь бесконечно много выводов (и деревьев вывода) в циклической грамматике. Поэтому первое из рассматриваемых преобразований – это устранение цикличности.

Пример 1. Грамматика $G : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to B \mid a, B \to C \mid b, C \to A\}$, очевидно, является цикличной, поскольку в ней есть цикл $A \Rightarrow_G^+ A$: $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$.

Пример 2. Грамматика $G : \{S \to A, A \to B \mid a, B \to CA \mid b, C \to c \mid \varepsilon\}$, тоже циклична. Действительно, $A \Rightarrow B \Rightarrow CA \Rightarrow A$.

Пример 3. Грамматика $G : \{S \to aBa \mid B, A \to C \mid b, B \to C \mid a, C \to A \mid bb\}$ циклична и содержит цикл

Цикличные и ацикличные КС грамматики. Определение

- Циклом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A \Rightarrow_G^+ A$.
- Грамматика называется циклической, если в ней есть хотя бы один цикл.
- Грамматика называется ациклической, если в ней нет циклов.

Очевидно, цикличность является «плохим» свойством грамматики, поскольку одна и та же цепочка может иметь бесконечно много выводов (и деревьев вывода) в циклической грамматике. Поэтому первое из рассматриваемых преобразований – это устранение цикличности.

Пример 1. Грамматика $G : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to B \mid a, B \to C \mid b, C \to A\}$, очевидно, является цикличной, поскольку в ней есть цикл $A \Rightarrow_G^+ A$: $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$.

Пример 2. Грамматика $G : \{S \to A, A \to B \mid a, B \to CA \mid b, C \to c \mid \varepsilon\}$, тоже циклична. Действительно, $A \Rightarrow B \Rightarrow CA \Rightarrow A$.

Пример 3. Грамматика $G : \{S \to aBa \mid B, A \to C \mid b, B \to C \mid a, C \to A \mid bb\}$ циклична и содержит цикл $A \Rightarrow C \Rightarrow A$.

Теорема 1 (об удалении циклов в КС грамматике)

- Циклическим выводом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots, \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_0$.

Теорема 1 (об удалении циклов в КС грамматике)

- **Циклическим выводом** в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots, \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_0$.
- Не всякий цикл в КС грамматике является циклическим выводом (см. пример 2).

Теорема 1 (об удалении циклов в КС грамматике)

- Циклическим выводом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots, \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_0$.
- Не всякий цикл в КС грамматике является циклическим выводом (см. пример 2).
- В ε-свободной КС грамматике любой цикл является циклическим выводом (упр.1).

Теорема 1 (об удалении циклов в КС грамматике)

- Циклическим выводом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots, \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_0$.
- Не всякий цикл в КС грамматике является циклическим выводом (см. пример 2).
- В ε-свободной КС грамматике любой цикл является циклическим выводом (упр.1).
- Цикл $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_0$ называется простым, если $A_i \neq A_j$ для любого $i \neq j$.

Теорема 1 (об удалении циклов в КС грамматике)

- Циклическим выводом в КС грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется вывод $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots, \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_0$.
- Не всякий цикл в КС грамматике является циклическим выводом (см. пример 2).
- В ε-свободной КС грамматике любой цикл является циклическим выводом (упр.1).
- Цикл $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_0$ называется простым, если $A_i \neq A_j$ для любого $i \neq j$.
- Из теории графов известно, что в ориентированном графе любой цикл содержит простой подцикл, начинающийся и заканчивающийся в той же вершине, что и исходный цикл (см. рис.1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что все циклические выводы в рассматриваемых КС грамматиках простые.

Теорема 1 (об удалении цикла в КС в ε-свободной грамматике)

Везде ниже в этой лекции, а также везде, где пойдет речь о грамматике в нормальной форме Хомского, мы будем рассматривать только такие языки, которые не содержат ε.

Теорема 1 (об удалении цикла в КС в ε-свободной грамматике)

Везде ниже в этой лекции, а также везде, где пойдет речь о грамматике в нормальной форме Хомского, мы будем рассматривать только такие языки, которые не содержат ε.

Теорема 1 (об удалении цикла КС в ε-свободной грамматике)

Пусть в КС ε-свободной грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ есть цикл $A_0 \Rightarrow^+ A_0$: $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2, \ldots, A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_0$ обусловленный наличием цепочки правил вывода $A_0 \to A_1, A_1 \to A_2, \ldots, A_{n-2} \to A_{n-1}, A_{n-1} \to A_0$. Заменим в каждом правиле каждый нетерминал A_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, на нетерминал A и удалим правило $A \to A$. Полученная грамматика H не будет содержать цикл $A_0 \Rightarrow^+ A_0$ и будет эквивалентна исходной.

Иллюстрация существования подцикла в любом цикле

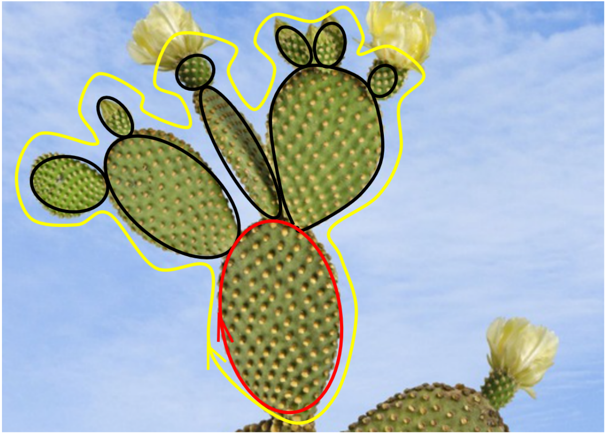


Рис. 1

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?
- Что называется гомоморфизмом полугрупп (моноидов)?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?
- Что называется гомоморфизмом полугрупп (моноидов)?
- Что такое бинарное отношение?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?
- Что называется гомоморфизмом полугрупп (моноидов)?
- Что такое бинарное отношение?
- Что такое гомоморфизм бинарных отношений?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?
- Что называется гомоморфизмом полугрупп (моноидов)?
- Что такое бинарное отношение?
- Что такое гомоморфизм бинарных отношений?
- Что такое частичный порядок на множестве?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?
- Что называется гомоморфизмом полугрупп (моноидов)?
- Что такое бинарное отношение?
- Что такое гомоморфизм бинарных отношений?
- Что такое частичный порядок на множестве?
- Что такое гомоморфизм частичных порядков?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?
- Что называется гомоморфизмом полугрупп (моноидов)?
- Что такое бинарное отношение?
- Что такое гомоморфизм бинарных отношений?
- Что такое частичный порядок на множестве?
- Что такое гомоморфизм частичных порядков?
- Что такое ограничение отображения на множество?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?
- Что называется гомоморфизмом полугрупп (моноидов)?
- Что такое бинарное отношение?
- Что такое гомоморфизм бинарных отношений?
- Что такое частичный порядок на множестве?
- Что такое гомоморфизм частичных порядков?
- Что такое ограничение отображения на множество?
- Что такое тождественное отображение?

Повторение алгебраических понятий

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить некоторые алгебраические понятия.

- Что называется полугруппой (моноидом)?
- Что называется свободной полугруппой (моноидом)?
- Как продолжить отображение φ, действующее на множестве (алфавите) L на свободный моноид L^*?
- Что называется гомоморфизмом полугрупп (моноидов)?
- Что такое бинарное отношение?
- Что такое гомоморфизм бинарных отношений?
- Что такое частичный порядок на множестве?
- Что такое гомоморфизм частичных порядков?
- Что такое ограничение отображения на множество?
- Что такое тождественное отображение?
- Что такое кольцо $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю n?

Теорема 1 об удалении цикличных правил вывода. Алгебраическая формулировка

(1) Пусть $\Gamma' = (\Gamma \backslash \mathcal{A} \cup \{A\})$, где $\mathcal{A} = \{A_0, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$.
(Множество Γ' получено из множества Γ заменой всех нетерминалов из $\mathcal{A}$ на нетерминал A).

Теорема 1 об удалении цикличных правил вывода. Алгебраическая формулировка

(1) Пусть $\Gamma' = (\Gamma \backslash \mathcal{A} \cup \{A\})$, где $\mathcal{A} = \{A_0, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$.
(Множество Γ' получено из множества Γ заменой всех нетерминалов из $\mathcal{A}$ на нетерминал A).

(2) Определим отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \{A\}$: $\varphi(A_i) = A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Теорема 1 об удалении цикличных правил вывода. Алгебраическая формулировка

(1) Пусть $\Gamma' = (\Gamma \backslash \mathcal{A} \cup \{A\})$, где $\mathcal{A} = \{A_0, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$.
(Множество Γ' получено из множества Γ заменой всех нетерминалов из $\mathcal{A}$ на нетерминал A).

(2) Определим отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \{A\}$: $\varphi(A_i) = A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(3) Отображение φ естественным образом можно продолжить до гомоморфизма свободного моноида $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ на свободный моноид $(\Gamma' \cup \Sigma)^*$.
(Отображение φ в каждом слове над алфавитом $\Gamma \cup \Sigma$ заменяет нетерминал из $\mathcal{A}$ на нетерминал A).

Теорема 1 об удалении цикличных правил вывода. Алгебраическая формулировка

(1) Пусть $\Gamma' = (\Gamma \backslash \mathcal{A} \cup \{A\})$, где $\mathcal{A} = \{A_0, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$.
(Множество Γ' получено из множества Γ заменой всех нетерминалов из $\mathcal{A}$ на нетерминал A).

(2) Определим отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \{A\}$: $\varphi(A_i) = A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(3) Отображение φ естественным образом можно продолжить до гомоморфизма свободного моноида $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ на свободный моноид $(\Gamma' \cup \Sigma)^*$.
(Отображение φ в каждом слове над алфавитом $\Gamma \cup \Sigma$ заменяет нетерминал из $\mathcal{A}$ на нетерминал A).

(4) Заметим, что ограничение отображения φ на свободный моноид $((\Gamma \backslash \{A\}) \cup \Sigma)^*$ — есть тождественное отображение.

Теорема 1 об удалении цикличных правил вывода. Алгебраическая формулировка

(1) Пусть $\Gamma' = (\Gamma \backslash \mathcal{A} \cup \{A\})$, где $\mathcal{A} = \{A_0, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$.
(Множество Γ' получено из множества Γ заменой всех нетерминалов из $\mathcal{A}$ на нетерминал A).

(2) Определим отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \{A\}$: $\varphi(A_i) = A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(3) Отображение φ естественным образом можно продолжить до гомоморфизма свободного моноида $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ на свободный моноид $(\Gamma' \cup \Sigma)^*$.
(Отображение φ в каждом слове над алфавитом $\Gamma \cup \Sigma$ заменяет нетерминал из $\mathcal{A}$ на нетерминал A).

(4) Заметим, что ограничение отображения φ на свободный моноид $((\Gamma \backslash \{A\}) \cup \Sigma)^*$ — есть тождественное отображение.

(5) Кроме того, мы видим, что отображения φ переводит символ из Γ в символ из Γ', а символ из Σ в символ из Σ и, как следствие сохраняет, длину слов.

Алгебраическое построение грамматики G_1

(6) Множество P (P') можно, очевидно, рассматривать как бинарные отношения на $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ ($(\Gamma' \cup \Sigma)^*$) (почему?).

Алгебраическое построение грамматики G_1

(6) Множество P (P') можно, очевидно, рассматривать как бинарные отношения на $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ ($(\Gamma' \cup \Sigma)^*$) (почему?).

(7) Далее, продолжим отображение φ до гомоморфизма бинарного отношения $P \subseteq ((\Gamma \cup \Sigma)^*)^2$ на бинарное отношение $P' \subseteq ((\Gamma' \cup \Sigma)^*)^2$:
для $C \to \alpha \in P$ где $C \in \Gamma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$,
положим $\varphi(C \to \alpha) = \varphi(C) \to \varphi(\alpha)$.
И тогда $P' = \varphi(P)$.
(Множество правил P' грамматики G' получено из множества правил P грамматики G заменой всех вхождений нетерминалов из $\mathcal{A}$ на нетерминал A.)

Алгебраическое построение грамматики G_1

(6) Множество P (P') можно, очевидно, рассматривать как бинарные отношения на $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ $((\Gamma' \cup \Sigma)^*)$ (почему?).

(7) Далее, продолжим отображение φ до гомоморфизма бинарного отношения $P \subseteq ((\Gamma \cup \Sigma)^*)^2$ на бинарное отношение $P' \subseteq ((\Gamma' \cup \Sigma)^*)^2$:
для $C \to \alpha \in P$ где $C \in \Gamma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$,
положим $\varphi(C \to \alpha) = \varphi(C) \to \varphi(\alpha)$.
И тогда $P' = \varphi(P)$.
(Множество правил P' грамматики G' получено из множества правил P грамматики G заменой всех вхождений нетерминалов из $\mathcal{A}$ на нетерминал A.)

(8) Определим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$. Можно считать, что грамматика G' является гомоморфным образом $\varphi(G)$ грамматики G.

Лемма 2 о гомоморфизме φ бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношения $\Rightarrow_{G'}$

Лемма 2 о гомоморфизме φ бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношения $\Rightarrow_{G'}$

(8) Заметим, что $\Rightarrow_G$ ($\Rightarrow_{G'}$), как и P (P') можно рассматривать как бинарное отношение на множестве $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ ($(\Gamma' \cup \Sigma)^*$).

Лемма 2 о гомоморфизме φ бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношения $\Rightarrow_{G'}$

(8) Заметим, что $\Rightarrow_G$ ($\Rightarrow_{G'}$), как и P (P') можно рассматривать как бинарное отношение на множестве $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ $((\Gamma' \cup \Sigma)^*)$.

Лемма 2 о гомоморфизме φ бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношение $\Rightarrow_{G'}$

Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ если $\alpha_1 \Rightarrow_G \alpha_2$, то $\varphi(\alpha_1) \Rightarrow_{G'} \varphi(\alpha_2)$. Таким образом, отображение φ является гомоморфизмом бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношение $\Rightarrow_{G'}$.

Лемма 2 о гомоморфизме φ бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношения $\Rightarrow_{G'}$

(8) Заметим, что $\Rightarrow_G$ ($\Rightarrow_{G'}$), как и P (P') можно рассматривать как бинарное отношение на множестве $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ ($(\Gamma' \cup \Sigma)^*$).

Лемма 2 о гомоморфизме φ бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношение $\Rightarrow_{G'}$

Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ если $\alpha_1 \Rightarrow_G \alpha_2$, то $\varphi(\alpha_1) \Rightarrow_{G'} \varphi(\alpha_2)$. Таким образом, отображение φ является гомоморфизмом бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношение $\Rightarrow_{G'}$.

(8) Заметим, что $\Rightarrow_G$ ($\Rightarrow_{G'}$), как и P (P') можно рассматривать как бинарное отношение на множестве $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ ($(\Gamma' \cup \Sigma)^*$).

Лемма 2 о гомоморфизме φ бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношение $\Rightarrow_{G'}$

Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ если $\alpha_1 \Rightarrow_G \alpha_2$, то $\varphi(\alpha_1) \Rightarrow_{G'} \varphi(\alpha_2)$. Таким образом, отображение φ является гомоморфизмом бинарного отношения $\Rightarrow_G$ на бинарное отношение $\Rightarrow_{G'}$.

Доказательство — упр.2.

Лемма 3 о гомоморфизме φ частичного порядка $\Rightarrow^*_G$ на частичный порядок $\Rightarrow^*_{G'}$

(9) Заметим, что бинарное отношение $\Rightarrow^*_G$ ($\Rightarrow^*_{G'}$) является частичным порядком на множестве $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ ($(\Gamma' \cup \Sigma)^*$) (почему?).

(9) Заметим, что бинарное отношение $\Rightarrow_G^*$ ($\Rightarrow_{G'}^*$) является частичным порядком на множестве $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ $((\Gamma' \cup \Sigma)^*)$ (почему?).

Лемма 3 о гомоморфизме φ частичного порядка $\Rightarrow_G^*$ на частичный порядок $\Rightarrow_{G'}^*$

Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ если $\alpha_1 \Rightarrow_G^* \alpha_2 \in P$, то $\varphi(\alpha_1) \Rightarrow_{G'}^* \varphi(\alpha_2) \in P'$, т.е. отображение φ является гомоморфизмом частичного порядка $\Rightarrow_G^*$ на частичный порядок $\Rightarrow_{G'}^*$.

Лемма 3 о гомоморфизме φ частичного порядка $\Rightarrow_G^*$ на частичный порядок $\Rightarrow_{G'}^*$

(9) Заметим, что бинарное отношение $\Rightarrow_G^*$ ($\Rightarrow_{G'}^*$) является частичным порядком на множестве $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ $((\Gamma' \cup \Sigma)^*)$ (почему?).

Лемма 3 о гомоморфизме φ частичного порядка $\Rightarrow_G^*$ на частичный порядок $\Rightarrow_{G'}^*$

Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ если $\alpha_1 \Rightarrow_G^* \alpha_2 \in P$, то $\varphi(\alpha_1) \Rightarrow_{G'}^* \varphi(\alpha_2) \in P'$, т.е. отображение φ является гомоморфизмом частичного порядка $\Rightarrow_G^*$ на частичный порядок $\Rightarrow_{G'}^*$.

<u>Доказательство</u> следует из леммы 2 и транзитивности бинарных отношений $\Rightarrow_G^*$, $\Rightarrow_{G'}^*$

Лемма 4 о цикличном выводе

В грамматике G для любых $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ есть вывод $A_i \Rightarrow^*_{G'} A_j$.

Лемма 4 о цикличном выводе

В грамматике G для любых $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ есть вывод $A_i \Rightarrow^*_{G'} A_j$.

Лемма 4 о цикличном выводе

В грамматике G для любых $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ есть вывод $A_i \Rightarrow^*_{G'} A_j$.

Доказательство.

Лемма 4 о цикличном выводе

Лемма 4 о цикличном выводе

В грамматике G для любых $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ есть вывод $A_i \Rightarrow^*_{G'} A_j$.

Доказательство.

Пусть $\overline{i}$ — остаток от деления i на n из кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$. Тогда, очевидно, $A_i = A_{\overline{i}}$, $A_j = A_{\overline{j}}$.

Рассмотрим вывод $A_i = A_{\overline{i}} \Rightarrow_G A_{\overline{i+1}} \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G A_{\overline{j-1}} \Rightarrow_G A_{\overline{j}} = A_j$. Для $j > i$ этот факт иллюстрирован на рис.2, а для $j \leq i$ — на рис.3.

Иллюстрация доказательства леммы 4 для $j > i$

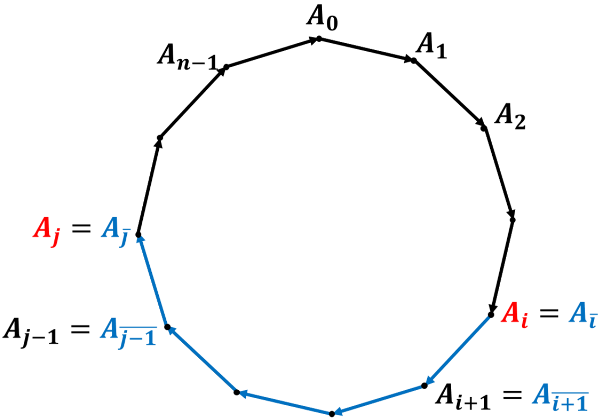


Рис. 2

Иллюстрация доказательства леммы 4 для $j \leq i$

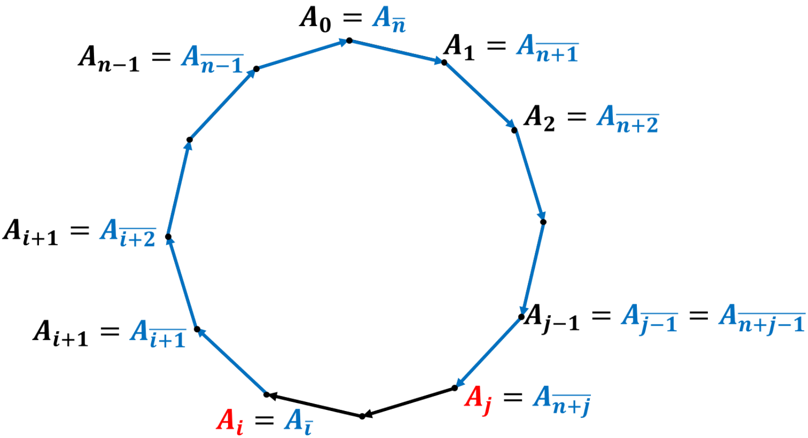


Рис. 3

Лемма 5 об эквивалентности грамматик G и G'

Грамматики G и G' эквивалентны.

Доказательство леммы 5.

Лемма 5 об эквивалентности грамматик G и G'

Грамматики G и G' эквивалентны.

Доказательство леммы 5.

(10) Докажем, что $L(G) = L(G')$.

Лемма 5 об эквивалентности грамматик G и G'

Грамматики G и G' эквивалентны.

Доказательство леммы 5.

(10) Докажем, что $L(G) = L(G')$.

(11) Пусть $w \in L(G)$, тогда $S \Rightarrow_G^* w$. По лемме 3 имеем $\varphi(S) \Rightarrow_{G'}^* \varphi(w)$. Очевидно (почему?), $\varphi(S) = S$, $\varphi(w) = w$. Следовательно, $S \Rightarrow_{G'}^* w$, т.е. $w \in L(G')$. Значит, $L(G) \subseteq L(G')$.
(Стирая индексы у нетерминалов A_i, очевидно, получим вывод w в G'. Следовательно, $w \in L(G')$).

Доказательство леммы 5 (продолжение)

(12) Пусть $w \in L(G')$, тогда есть вывод $S \Rightarrow^*_{G'} w$:
$S \Rightarrow_{G'} \beta_1 \Rightarrow_{G'} \beta_2 \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_k \Rightarrow_{G'} \beta_{k+1} \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_m = w$, где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

Доказательство леммы 5 (продолжение)

(12) Пусть $w \in L(G')$, тогда есть вывод $S \Rightarrow^*_{G'} w$:
$S \Rightarrow_{G'} \beta_1 \Rightarrow_{G'} \beta_2 \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_k \Rightarrow_{G'} \beta_{k+1} \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_m = w$, где
$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

(13) Конструктивно докажем индукцией по $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, что существует такое слово $\alpha_k \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, что $S \Rightarrow^*_G \alpha_k$ и $\beta_k = \varphi(\alpha_k)$.

Доказательство леммы 5 (продолжение)

(12) Пусть $w \in L(G')$, тогда есть вывод $S \Rightarrow^*_{G'} w$:
$S \Rightarrow_{G'} \beta_1 \Rightarrow_{G'} \beta_2 \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_k \Rightarrow_{G'} \beta_{k+1} \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_m = w$, где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

(13) Конструктивно докажем индукцией по $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, что существует такое слово $\alpha_k \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, что $S \Rightarrow^*_G \alpha_k$ и $\beta_k = \varphi(\alpha_k)$.

(14) Таким образом, мы как бы восстанавливаем вывод
$S \Rightarrow_{G'} \alpha_1 \Rightarrow_{G'} \alpha_2 \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \alpha_k \Rightarrow_{G'} \alpha_{k+1} \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \alpha_m = w$ по выводу $S \Rightarrow_{G'} \beta_1 \Rightarrow_{G'} \beta_2 \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_k \Rightarrow_{G'} \beta_{k+1} \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_m = w$.
А восстанавливать всегда сложнее, чем разрушать :-)

Доказательство леммы 5 (продолжение)

(12) Пусть $w \in L(G')$, тогда есть вывод $S \Rightarrow^*_{G'} w$:
$S \Rightarrow_{G'} \beta_1 \Rightarrow_{G'} \beta_2 \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_k \Rightarrow_{G'} \beta_{k+1} \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_m = w$, где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

(13) Конструктивно докажем индукцией по $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, что существует такое слово $\alpha_k \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, что $S \Rightarrow^*_G \alpha_k$ и $\beta_k = \varphi(\alpha_k)$.

(14) Таким образом, мы как бы восстанавливаем вывод
$S \Rightarrow_{G'} \alpha_1 \Rightarrow_{G'} \alpha_2 \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \alpha_k \Rightarrow_{G'} \alpha_{k+1} \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \alpha_m = w$ по выводу $S \Rightarrow_{G'} \beta_1 \Rightarrow_{G'} \beta_2 \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_k \Rightarrow_{G'} \beta_{k+1} \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \beta_m = w$.
А восстанавливать всегда сложнее, чем разрушать :-)

(15) Поскольку $\beta_m = w$, а $\varphi^{-1}(w) = w = \alpha_m$ (почему?), из п.(13) будет следовать, что $S \Rightarrow_G w$, т.е. $w \in L(G)$, а значит, $L(G') \subseteq L(G)$.

Доказательство леммы 5 (продожение)

Доказательство леммы 5 (продожение)

(16) Б.И. $k = 1$. Вывод $S \Rightarrow^*_{G'} \beta_1$ мог получиться только после применения правила $S \to \beta_1 \in P'$, где $\beta_1 \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$. По построению правил из P' (см.п.5) $(S \to \beta_1) = \varphi(S \to \alpha_1)$ для $\alpha_1 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, причем $(S \to \alpha_1) \in P$. А это значит, что $\beta_1 = \varphi(\alpha_1)$ и $S \Rightarrow^*_G \alpha_1$.

Доказательство леммы 5 (продожение)

(16) Б.И. $k = 1$. Вывод $S \Rightarrow^*_{G'} \beta_1$ мог получиться только после применения правила $S \to \beta_1 \in P'$, где $\beta_1 \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$. По построению правил из P' (см.п.5) $(S \to \beta_1) = \varphi(S \to \alpha_1)$ для $\alpha_1 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, причем $(S \to \alpha_1) \in P$. А это значит, что $\beta_1 = \varphi(\alpha_1)$ и $S \Rightarrow^*_G \alpha_1$.

(17) Ш.И. Пусть существует такое слово $\alpha_k \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, что $S \Rightarrow^*_G \alpha_k$ и $\beta_k = \varphi(\alpha_k)$. И пусть вывод $\beta_k \Rightarrow \beta_{k+1}$ получается после применения правила $B \to \beta$ для некоторого $\beta \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$. Тогда $\beta_k = \gamma_1 B \gamma_2$, $\beta_{k+1} = \gamma_1 \beta \gamma_2$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

Доказательство леммы 5 (продожение)

(16) Б.И. $k = 1$. Вывод $S \Rightarrow^*_{G'} \beta_1$ мог получиться только после применения правила $S \to \beta_1 \in P'$, где $\beta_1 \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$. По построению правил из P' (см.п.5) $(S \to \beta_1) = \varphi(S \to \alpha_1)$ для $\alpha_1 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, причем $(S \to \alpha_1) \in P$. А это значит, что $\beta_1 = \varphi(\alpha_1)$ и $S \Rightarrow^*_G \alpha_1$.

(17) Ш.И. Пусть существует такое слово $\alpha_k \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, что $S \Rightarrow^*_G \alpha_k$ и $\beta_k = \varphi(\alpha_k)$. И пусть вывод $\beta_k \Rightarrow \beta_{k+1}$ получается после применения правила $B \to \beta$ для некоторого $\beta \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$. Тогда $\beta_k = \gamma_1 B \gamma_2$, $\beta_{k+1} = \gamma_1 \beta \gamma_2$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

(18) По п.(6) правило $(B \to \beta) = \varphi(C \to \alpha)$ для $C \in \Gamma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, причем $(C \to \alpha) \in P$. В частности, $B = \varphi(C)$, $\beta = \varphi(\alpha)$.

Доказательство леммы 5 (продожение)

(16) Б.И. $k = 1$. Вывод $S \Rightarrow^*_{G'} \beta_1$ мог получиться только после применения правила $S \to \beta_1 \in P'$, где $\beta_1 \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$. По построению правил из P' (см.п.5) $(S \to \beta_1) = \varphi(S \to \alpha_1)$ для $\alpha_1 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, причем $(S \to \alpha_1) \in P$. А это значит, что $\beta_1 = \varphi(\alpha_1)$ и $S \Rightarrow^*_G \alpha_1$.

(17) Ш.И. Пусть существует такое слово $\alpha_k \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, что $S \Rightarrow^*_G \alpha_k$ и $\beta_k = \varphi(\alpha_k)$. И пусть вывод $\beta_k \Rightarrow \beta_{k+1}$ получается после применения правила $B \to \beta$ для некоторого $\beta \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$. Тогда $\beta_k = \gamma_1 B \gamma_2$, $\beta_{k+1} = \gamma_1 \beta \gamma_2$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

(18) По п.(6) правило $(B \to \beta) = \varphi(C \to \alpha)$ для $C \in \Gamma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, причем $(C \to \alpha) \in P$. В частности, $B = \varphi(C)$, $\beta = \varphi(\alpha)$.

(19) Из п.(2),(3) и (5) и из того, что $\varphi(\alpha_k) = \beta_k$ следует, что $\alpha_k = \delta_1 D \delta_2$ для некоторых $\delta_1, \delta_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ таких, что $\varphi(\delta_1) = \gamma_1$, $\varphi(\delta_2) = \gamma_2$, $\varphi(D) = B$.

(20) Рассмотрим два случая $B \neq A$ и $B = A$.

Доказательство леммы 5 (окончание)

(21) Пусть $B \neq A$, тогда по (5) $C = D = \varphi^{-1}(B) = B$. Тогда $(B \to \alpha) \in P$ (см. п.(18)) и $\alpha_k = \delta_1 B \delta_2$, а значит, существует вывод $\alpha_k \Rightarrow_G \alpha_{k+1}$ для $\alpha_{k+1} = \delta_1 \alpha \delta_2$, т.е. $S \Rightarrow_G^* \alpha_{k+1}$. И, кроме того, $\varphi(\alpha_{k+1}) = \varphi(\delta_1)\varphi(\alpha)\varphi(\delta_2) = \gamma_1 \beta \gamma_2 = \beta_{k+1}$.

Доказательство леммы 5 (окончание)

(21) Пусть $B \neq A$, тогда по (5) $C = D = \varphi^{-1}(B) = B$. Тогда $(B \to \alpha) \in P$ (см. п.(18)) и $\alpha_k = \delta_1 B \delta_2$, а значит, существует вывод $\alpha_k \Rightarrow_G \alpha_{k+1}$ для $\alpha_{k+1} = \delta_1 \alpha \delta_2$, т.е. $S \Rightarrow_G^* \alpha_{k+1}$. И, кроме того, $\varphi(\alpha_{k+1}) = \varphi(\delta_1)\varphi(\alpha)\varphi(\delta_2) = \gamma_1 \beta \gamma_2 = \beta_{k+1}$.

(22) Теперь пусть $B = A$, тогда по п.(18)-(19) $C, D \in \varphi^{-1}(B)$, а по п.(2) $C = A_j$, $D = A_i$ для некоторых $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. По лемме 4 существует вывод $A_i \Rightarrow_G^* A_j$. Следовательно, существует вывод $\alpha_k \Rightarrow_G^* \varrho_{k+1}$ для $\varrho_{k+1} = \delta_1 A_j \delta_2$. Но, кроме того, есть правило $(A_j \to \alpha) \in P$ (см. п.(18)), значит, есть вывод $\varrho_{k+1} \Rightarrow \beta_{k+1}$ для $\beta_{k+1} = \delta_1 \alpha \delta_2$. Следовательно, $S \Rightarrow_G^* \alpha_k \Rightarrow_G \varrho_{k+1} \Rightarrow_G \alpha_{k+1}$, т.е. $S \Rightarrow_G^* \alpha_{k+1}$. И, кроме того, $\varphi(\alpha_{k+1}) = \varphi(\delta_1)\varphi(\alpha)\varphi(\delta_2) = \gamma_1 \beta \gamma_2 = \beta_{k+1}$.

Доказательство леммы 5 (окончание)

(21) Пусть $B \neq A$, тогда по (5) $C = D = \varphi^{-1}(B) = B$. Тогда $(B \to \alpha) \in P$ (см. п.(18)) и $\alpha_k = \delta_1 B \delta_2$, а значит, существует вывод $\alpha_k \Rightarrow_G \alpha_{k+1}$ для $\alpha_{k+1} = \delta_1 \alpha \delta_2$, т.е. $S \Rightarrow_G^* \alpha_{k+1}$. И, кроме того, $\varphi(\alpha_{k+1}) = \varphi(\delta_1)\varphi(\alpha)\varphi(\delta_2) = \gamma_1 \beta \gamma_2 = \beta_{k+1}$.

(22) Теперь пусть $B = A$, тогда по п.(18)-(19) $C, D \in \varphi^{-1}(B)$, а по п.(2) $C = A_j$, $D = A_i$ для некоторых $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. По лемме 4 существует вывод $A_i \Rightarrow_G^* A_j$. Следовательно, существует вывод $\alpha_k \Rightarrow_G^* \varrho_{k+1}$ для $\varrho_{k+1} = \delta_1 A_j \delta_2$. Но, кроме того, есть правило $(A_j \to \alpha) \in P$ (см. п.(18)), значит, есть вывод $\varrho_{k+1} \Rightarrow \beta_{k+1}$ для $\beta_{k+1} = \delta_1 \alpha \delta_2$. Следовательно, $S \Rightarrow_G^* \alpha_k \Rightarrow_G \varrho_{k+1} \Rightarrow_G \alpha_{k+1}$, т.е. $S \Rightarrow_G^* \alpha_{k+1}$. И, кроме того, $\varphi(\alpha_{k+1}) = \varphi(\delta_1)\varphi(\alpha)\varphi(\delta_2) = \gamma_1 \beta \gamma_2 = \beta_{k+1}$.

(23) Ш.И., а вмести с ним и лемма 5 доказаны.

Доказательство теоремы 1

(24) Удаляя из множества правил P' грамматики G правило $A \to A$, получим грамматику $H = (\Gamma', \Sigma, P_H, S)$ ($P_H = P' \backslash \{A \to A\}$), эквивалентную грамматике G', а значит и исходной грамматике G.

Пример 4. Перепишем грамматику из примера так, чтобы к ней можно было применить теорему 1: $G : \{S \to A_0 \mid \varepsilon, A_0 \to A_1 \mid a, A_1 \to A_2 \mid b, A_2 \to A_0\}$.

Примеры 4-6 удаления цикла

Пример 4. Перепишем грамматику из примера так, чтобы к ней можно было применить теорему 1: $G : \{S \to A_0 \mid \varepsilon, A_0 \to A_1 \mid a, A_1 \to A_2 \mid b, A_2 \to A_0\}$.

Тогда грамматика G' из доказательства теоремы 1
$G' : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to A \mid a, A \to A \mid b, A \to A\}$.

Примеры 4-6 удаления цикла

Пример 4. Перепишем грамматику из примера так, чтобы к ней можно было применить теорему 1: $G : \{S \to A_0 \mid \varepsilon, A_0 \to A_1 \mid a, A_1 \to A_2 \mid b, A_2 \to A_0\}$.

Тогда грамматика G' из доказательства теоремы 1
$G' : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to A \mid a, A \to A \mid b, A \to A\}$.

А искомая грамматика H из доказательства теоремы 1
$H : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to a \mid b\}$.

Примеры 4-6 удаления цикла

Пример 4. Перепишем грамматику из примера так, чтобы к ней можно было применить теорему 1: $G : \{S \to A_0 \mid \varepsilon, A_0 \to A_1 \mid a, A_1 \to A_2 \mid b, A_2 \to A_0\}$.

Тогда грамматика G' из доказательства теоремы 1
$G' : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to A \mid a, A \to A \mid b, A \to A\}$.

А искомая грамматика H из доказательства теоремы 1
$H : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to a \mid b\}$.

Пример 5. К грамматике $G : \{S \to A, A \to B \mid a, B \to CA \mid b, C \to c \mid \varepsilon\}$ из примера 2 нельзя применять теорему 1 (почему? и что делать?), хотя в ней есть цикл.

.

Примеры 4-6 удаления цикла

Пример 4. Перепишем грамматику из примера так, чтобы к ней можно было применить теорему 1: $G : \{S \to A_0 \mid \varepsilon, A_0 \to A_1 \mid a, A_1 \to A_2 \mid b, A_2 \to A_0\}$.

Тогда грамматика G' из доказательства теоремы 1
$G' : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to A \mid a, A \to A \mid b, A \to A\}$.

А искомая грамматика H из доказательства теоремы 1
$H : \{S \to A \mid \varepsilon, A \to a \mid b\}$.

Пример 5. К грамматике $G : \{S \to A, A \to B \mid a, B \to CA \mid b, C \to c \mid \varepsilon\}$ из примера 2 нельзя применять теорему 1 (почему? и что делать?), хотя в ней есть цикл.

Пример 6. Для грамматики
$G : \{S \to aBa \mid B, A \to C \mid b, B \to C \mid a, C \to A \mid bb\}$ из примера 3 после применения теоремы 1 получаем грамматику
$\{S \to aBa \mid B, A \to b, B \to A \mid a, A \to bb\}$.

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Для любой КС грамматики G существует эквивалентная ей приведенная ε-свободная, ацикличная грамматика G_0.

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Для любой КС грамматики G существует эквивалентная ей приведенная ε-свободная, ацикличная грамматика G_0.

Доказательство следствия.

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Для любой КС грамматики G существует эквивалентная ей приведенная ε-свободная, ацикличная грамматика G_0.

Доказательство следствия. По теоремах об эквивалентности КС грамматики ε-свободной грамматике (см. лекцию 5) без ограничения общности можно считать, что G — ε-свободная грамматика.

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Для любой КС грамматики G существует эквивалентная ей приведенная ε-свободная, ацикличная грамматика G_0.

Доказательство следствия. По теоремах об эквивалентности КС грамматики ε-свободной грамматике (см. лекцию 5) без ограничения общности можно считать, что G — ε-свободная грамматика.

Если в грамматике G, существует хотя бы один цикл $A_0 \Rightarrow_H^+ A_0$, удалим его, используя теорему 1. Полученная грамматика H' эквивалентна грамматике G и также ε-свободна (почему?).

Следствие (о существовании ацикличной грамматики для данной КС грамматики)

Для любой КС грамматики G существует эквивалентная ей приведенная ε-свободная, ацикличная грамматика G_0.

Доказательство следствия. По теоремах об эквивалентности КС грамматики ε-свободной грамматике (см. лекцию 5) без ограничения общности можно считать, что G — ε-свободная грамматика.

Если в грамматике G, существует хотя бы один цикл $A_0 \Rightarrow_H^+ A_0$, удалим его, используя теорему 1. Полученная грамматика H' эквивалентна грамматике G и также ε-свободна (почему?).

Если в H снова есть хотя бы один цикл, снова удалим его, используя теорему 1, получим грамматику H'' и т.д, пока не получим грамматику без циклов. (Почему этот процесс ранее или поздно закончится?).

Лемма 6

Лемма 6 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной ацикличной грамматике, правые части которой либо нетерминальны, либо состоят из одного терминала)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ацикличная грамматика $G_1 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to w$, либо $w \in \Gamma^*$, либо $w \in \Sigma$.

Доказательство леммы 6.

Лемма 6 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной ациклічной грамматике, правые части которой либо нетерминальны, либо состоят из одного терминала)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ациклическая грамматика $G_1 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to w$, либо $w \in \Gamma^*$, либо $w \in \Sigma$.

Доказательство леммы 6.

Ввиду следствия без ограничения общности можно считать, что грамматика G — ε-свободная, ациклическая грамматика.

Лемма 6 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной ацикличной грамматике, правые части которой либо нетерминальны, либо состоят из одного терминала)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ацикличная грамматика $G_1 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to w$, либо $w \in \Gamma^*$, либо $w \in \Sigma$.

Доказательство леммы 6.

Ввиду следствия без ограничения общности можно считать, что грамматика G — ε-свободная, ацикличная грамматика.
Для каждого нетерминала $a \in \Sigma$ грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ введем новый нетерминал C_a и положим $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{C_a \mid a \in \Sigma\}$. Заменим каждое вхождение терминала a в правых частях правил вывода P грамматики G на соответствующий ему нетерминал C_a и добавим правила $C_a \to a$. Получим новое множество правил P_1.

Лемма 6 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной ацикличной грамматике, правые части которой либо нетерминальны, либо состоят из одного терминала)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ацикличная грамматика $G_1 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to w$, либо $w \in \Gamma^*$, либо $w \in \Sigma$.

Доказательство леммы 6.

Ввиду следствия без ограничения общности можно считать, что грамматика G — ε-свободная, ацикличная грамматика.
Для каждого нетерминала $a \in \Sigma$ грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ введем новый нетерминал C_a и положим $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{C_a \mid a \in \Sigma\}$. Заменим каждое вхождение терминала a в правых частях правил вывода P грамматики G на соответствующий ему нетерминал C_a и добавим правила $C_a \to a$. Получим новое множество правил P_1. Полученная грамматика $G_1 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1, S)$ эквивалентна исходной, очевидно, является ε-свободной (почему?), ацикличной (упр. 3) и удовлетворяет условию леммы.

Лемма 7

Лемма 7 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличную грамматике, правые части либо нетерминальные слова длины не менее, чем два, либо состоят из одного терминала)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей грамматика $G_2 = (\Gamma_2, \Sigma, P_2, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to w$, либо $w \in \Gamma^*$ и $|w| \geq 2$, либо $w \in \Sigma$.

Лемма 7

Лемма 7 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличную грамматике, правые части либо нетерминальные слова длины не менее, чем два, либо состоят из одного терминала)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей грамматика $G_2 = (\Gamma_2, \Sigma, P_2, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to w$, либо $w \in \Gamma^*$ и $|w| \geq 2$, либо $w \in \Sigma$.

Доказательство леммы 7.

Лемма 7 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличную грамматике, правые части либо нетерминальные слова длины не менее, чем два, либо состоят из одного терминала)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей грамматика $G_2 = (\Gamma_2, \Sigma, P_2, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to w$, либо $w \in \Gamma^*$ и $|w| \geq 2$, либо $w \in \Sigma$.

Доказательство леммы 7.

1. По лемме леммы 6 можно считать, что грамматика G — ε-свободная, ацикличная и любое правило грамматики G имеет вида $A \to w$, где либо $w \in \Gamma^*$, либо $w \in \Sigma$.

Лемма 7

Лемма 7 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличную грамматике, правые части либо нетерминальные слова длины не менее, чем два, либо состоят из одного терминала)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей грамматика $G_2 = (\Gamma_2, \Sigma, P_2, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to w$, либо $w \in \Gamma^*$ и $|w| \geq 2$, либо $w \in \Sigma$.

Доказательство леммы 7.

1. По лемме леммы 6 можно считать, что грамматика G — ε-свободная, ацикличная и любое правило грамматики G имеет вида $A \to w$, где либо $w \in \Gamma^*$, либо $w \in \Sigma$.
2. Пусть в грамматике G есть хотя бы одно правило $A_1 \to A_2$. Поскольку G — ациклична, найдутся такие нетерминалы $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \geq 2$, $A_i \neq A_j$ при $i \neq j$, что в грамматике G есть правила $A_1 \to A_2$, $A_2 \to A_3$, ..., $A_{k-1} \to A_k$, но нет правила $A_k \to A_{k+1}$ ни для какого нетерминала A_{k+1}.

Лемма 7 (окончание доказательства)

3. Удалим правило $A_{k-1} \to A_k$, и для каждого правила $A_k \to \beta$ добавим правило $A_{k-1} \to \beta$. Тогда полученная грамматика M будет эквивалентна исходной, будет обладать свойствами из п.1. (почему?) и в ней будет меньше правил вида нетерминал в нетерминал.

Лемма 7 (окончание доказательства)

3. Удалим правило $A_{k-1} \to A_k$, и для каждого правила $A_k \to \beta$ добавим правило $A_{k-1} \to \beta$. Тогда полученная грамматика M будет эквивалентна исходной, будет обладать свойствами из п.1. (почему?) и в ней будет меньше правил вида нетерминал в нетерминал.
4. Если в грамматике M есть хотя бы одно правило $B_1 \to B_2$, то повторяя действия из п.2.–3. получим новую грамматику M'. Продолжаем этот процесс, пока не получим искомую грамматику G_2, не содержащую ни одного правила вида нетерминал в нетерминал (почему этот процесс когда-нибудь закончится?).

Лемма 8

Лемма 8 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличной грамматике, нетерминальные части правил выводов которой состоят из двух символов, а терминальные — из одного символа)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ацикличная грамматика $G_3 = (\Gamma_2, \Sigma, P_3, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to \alpha$ либо $\alpha = BC$, либо $\alpha = a$.

Доказательство леммы 8.

Лемма 8 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличной грамматике, нетерминальные части правил выводов которой состоят из двух символов, а терминальные — из одного символа)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ацикличная грамматика $G_3 = (\Gamma_2, \Sigma, P_3, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to \alpha$ либо $\alpha = BC$, либо $\alpha = a$.

Доказательство леммы 8.

Сначала применим лемму 7 и затем для каждого правила вида $A \to B_1 B_2 \ldots B_m$ из P введем новые нетерминалы $D_1, \ldots, D_{m-2}$ и заменим это правило на набор новых правил:

$A \to B_1 D_1$, $D_1 \to B_2 D_2$, $\ldots$, $D_{m-3} \to B_{m-2} D_{m-2}$, $D_{m-2} \to B_{m-1} B_m$.

Лемма 8 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличной грамматике, нетерминальные части правил выводов которой состоят из двух символов, а терминальные — из одного символа)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ацикличная грамматика $G_3 = (\Gamma_2, \Sigma, P_3, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to \alpha$ либо $\alpha = BC$, либо $\alpha = a$.

Доказательство леммы 8.

Сначала применим лемму 7 и затем для каждого правила вида $A \to B_1 B_2 \dots B_m$ из P введем новые нетерминалы $D_1, \dots, D_{m-2}$ и заменим это правило на набор новых правил:

$A \to B_1 D_1$, $D_1 \to B_2 D_2$, $\dots$, $D_{m-3} \to B_{m-2} D_{m-2}$, $D_{m-2} \to B_{m-1} B_m$.

Очевидно, $A \Rightarrow^* B_1 B_2 \dots B_m$.

Лемма 8 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличной грамматике, нетерминальные части правил выводов которой состоят из двух символов, а терминальные — из одного символа)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ацикличная грамматика $G_3 = (\Gamma_2, \Sigma, P_3, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to \alpha$ либо $\alpha = BC$, либо $\alpha = a$.

Доказательство леммы 8.

Сначала применим лемму 7 и затем для каждого правила вида $A \to B_1 B_2 \ldots B_m$ из P введем новые нетерминалы $D_1, \ldots, D_{m-2}$ и заменим это правило на набор новых правил:

$A \to B_1 D_1,\ D_1 \to B_2 D_2,\ \ldots,\ D_{m-3} \to B_{m-2} D_{m-2},\ D_{m-2} \to B_{m-1} B_m.$

Очевидно, $A \Rightarrow^* B_1 B_2 \ldots B_m$.

Действительно, $A \Rightarrow B_1 D_1 \Rightarrow B_1 B_2 D_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_1 B_2 \ldots B_{m-3} D_{m-3} \Rightarrow B_1 B_2 \ldots \Rightarrow B_{m-3} B_{m-2} D_{m-2} \Rightarrow B_1 B_2 \ldots B_{m-3} B_{m-2} B_{m-1} B_m$.

Лемма 8

Лемма 8 (об эквивалентности КС грамматики ε-свободной, ацикличной грамматике, нетерминальные части правил выводов которой состоят из двух символов, а терминальные — из одного символа)

Для любой КС грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ существует эквивалентная ей ε-свободная, ацикличная грамматика $G_3 = (\Gamma_2, \Sigma, P_3, S)$ такая, что для каждого правила вида $A \to \alpha$ либо $\alpha = BC$, либо $\alpha = a$.

Доказательство леммы 8.

Сначала применим лемму 7 и затем для каждого правила вида $A \to B_1 B_2 \dots B_m$ из P введем новые нетерминалы $D_1, \dots, D_{m-2}$ и заменим это правило на набор новых правил:

$A \to B_1 D_1,\ D_1 \to B_2 D_2,\ \dots,\ D_{m-3} \to B_{m-2} D_{m-2},\ D_{m-2} \to B_{m-1} B_m.$

Очевидно, $A \Rightarrow^* B_1 B_2 \dots B_m$.

Действительно, $A \Rightarrow B_1 D_1 \Rightarrow B_1 B_2 D_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_1 B_2 \dots B_{m-3} D_{m-3} \Rightarrow B_1 B_2 \dots \Rightarrow B_{m-3} B_{m-2} D_{m-2} \Rightarrow B_1 B_2 \dots B_{m-3} B_{m-2} B_{m-1} B_m$.

Полученная грамматика G_3 эквивалентна исходной и удовлетворяет условию леммы (почему?).

Нормальная форма Хомского

- Говорят, что КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ находится в нормальной форме Хомского (НФХ), если G ε-свободная и каждое ее правило вывода имеет вид $A \to BC$, либо $A \to a$.

Нормальная форма Хомского

- Говорят, что КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ находится в нормальной форме Хомского (НФХ), если G ε-свободная и каждое ее правило вывода имеет вид $A \to BC$, либо $A \to a$.

Теорема 2 о нормальной форме Хомского

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей грамматика в НФХ.

Нормальная форма Хомского

- Говорят, что КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ находится в нормальной форме Хомского (НФХ), если G ε-свободная и каждое ее правило вывода имеет вид $A \to BC$, либо $A \to a$.

Теорема 2 о нормальной форме Хомского

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей грамматика в НФХ.

Доказательство теоремы 2 следует из леммы 8.

Алгоритм построения по любой КС грамматике ей эквивалентной в форме НФХ

Алгоритм построения по любой КС грамматике ей эквивалентной в форме НФХ

1. Построить ε-свободную, ацикличную грамматику G_0, эквивалентную данной, как в следствии из теоремы 1.

Алгоритм построения по любой КС грамматике ей эквивалентной в форме НФХ

1. Построить ε-свободную, ацикличную грамматику G_0, эквивалентную данной, как в следствии из теоремы 1.
2. Построить по грамматике G_0 ε-свободную, ацикличную, эквивалентную ей грамматику G_1, правые части которой либо нетерминальны, либо состоят из одного терминала как в доказательстве леммы 6.

Алгоритм построения по любой КС грамматике ей эквивалентной в форме НФХ

1. Построить ε-свободную, ацикличную грамматику G_0, эквивалентную данной, как в следствии из теоремы 1.
2. Построить по грамматике G_0 ε-свободную, ацикличную, эквивалентную ей грамматику G_1, правые части которой либо нетерминальны, либо состоят из одного терминала как в доказательстве леммы 6.
3. Построить по грамматике G_1 эквивалентную ей, ε-свободную, ацикличную грамматику G_2, правые части которой либо нетерминальные слова длины не менее, чем два, либо состоят из одного терминала как в доказательстве леммы 7.

Алгоритм построения по любой КС грамматике ей эквивалентной в форме НФХ

1. Построить ε-свободную, ацикличную грамматику G_0, эквивалентную данной, как в следствии из теоремы 1.
2. Построить по грамматике G_0 ε-свободную, ацикличную, эквивалентную ей грамматику G_1, правые части которой либо нетерминальны, либо состоят из одного терминала как в доказательстве леммы 6.
3. Построить по грамматике G_1 эквивалентную ей, ε-свободную, ацикличную грамматику G_2, правые части которой либо нетерминальные слова длины не менее, чем два, либо состоят из одного терминала как в доказательстве леммы 7.
4. Построить по грамматике G_2 искомую грамматику G_3 в НФХ, как в доказательстве леммы 8 (теоремы 2).

Если исходная грамматика G — приведенная, будет ли грамматика G_3 в НФХ, полученная в результате этого алгоритма, приведенной (упр.4)?

Пример 7 **Привести грамматику G к нормальной форме Хомского**

$$S \to aBa \mid B$$
$$A \to b \mid C$$
$$B \to C \mid a$$
$$C \to A \mid bb$$

Пример 7

Пример 7 **Привести грамматику G к нормальной форме Хомского**

$$\begin{aligned} S &\to aBa \mid B \\ A &\to b \mid C \\ B &\to C \mid a \\ C &\to A \mid bb \end{aligned}$$

1. Исходная грамматика G уже является ε-свободной. Удалим из нее единственный цикл $A \Rightarrow_G C \Rightarrow_G A$, заменяя каждое вхождение нетерминала C на A и удаляя правило $A \to C$. Полученная грамматика G_0 по следствию из теоремы 1 ε-свободна, ациклична и эквивалентна грамматике G:

$$\begin{aligned} S &\to aBa \mid B \\ A &\to b \mid bb \\ B &\to A \mid a \end{aligned}$$

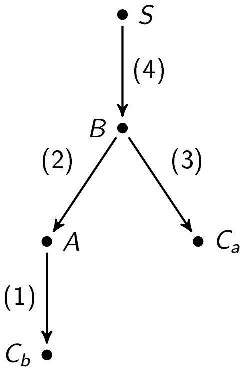
Пример 7 (продолжение)

2. Введем нетерминалы C_a и C_b, заменим в каждом правиле терминалы a, b на нетерминалы C_a, C_b и добавим правила $C_a \to a$, $C_b \to b$. Полученная грамматика G_1 удовлетвлряет условиям леммы 6, эквивалентна грамматике G_0, а значит и грамматике G:

$$
\begin{aligned}
S &\to C_a B C_a \mid B \\
A &\to C_b \mid C_b C_b \\
B &\to A \mid C_a \\
C_a &\to a \\
C_b &\to b
\end{aligned}
$$

Пример 7 (продолжение)

3. Порядок удаления правил в текущей грамматике G_1:



Пример 7 (продолжение)

3. Текущая грамматика G_1:

$$S \to C_a B C_a \mid B$$
$$A \to C_b \mid C_b C_b$$
$$B \to A \mid C_a$$
$$C_a \to a, C_b \to b$$

Пример 7 (продолжение)

3. Текущая грамматика G_1:

$$S \to C_a B C_a \mid B$$
$$A \to C_b \mid C_b C_b$$
$$B \to A \mid C_a$$
$$C_a \to a, C_b \to b$$

3.1. В грамматике G_2 есть правило $A \to C_b$, но нет правила $C_b \to F$ для нетерминала F, и кроме того, есть правило $C_b \to b$. Удаляем правило $A \to C_b$, и добавляем правило $A \to b$. Получаем грамматику M :

$$S \to C_a B C_a \mid B$$
$$A \to b \mid C_b C_b$$
$$B \to A \mid C_a$$
$$C_a \to a, C_b \to b$$

Пример 7 (продолжение)

- Текущая грамматика M:

$$S \to C_a B C_a \mid B$$
$$A \to b \mid C_b C_b$$
$$B \to A \mid C_a$$
$$C_a \to a, C_b \to b$$

Пример 7 (продолжение)

- Текущая грамматика M:

$$S \to C_a B C_a \mid B$$
$$A \to b \mid C_b C_b$$
$$B \to A \mid C_a$$
$$C_a \to a,\ C_b \to b$$

3.2. В грамматике M есть праивило $B \to A$, но нет правила $A \to F$ для нетерминала F, и кроме того, есть правила $A \to b \mid C_b C_b$. Удаляем правило $B \to A$, и добавляем правила $B \to b \mid C_b C_b$. Получаем грамматику M' :

$$S \to C_a B C_a \mid B$$
$$A \to b \mid C_b C_b$$
$$B \to b \mid C_b C_b \mid C_a$$
$$C_a \to a,\ C_b \to b$$

Пример 7 (продолжение)

- Текущая грамматика M':

$$
\begin{aligned}
&S \to C_a B C_a \mid B \\
&A \to b \mid C_b C_b \\
&B \to b \mid C_b C_b \mid C_a \\
&C_a \to a,\, C_b \to b
\end{aligned}
$$

Пример 7 (продолжение)

- Текущая грамматика M':

$$
\begin{aligned}
S &\to C_aBC_a \mid B \\
A &\to b \mid C_bC_b \\
B &\to b \mid C_bC_b \mid C_a \\
C_a &\to a,\ C_b \to b
\end{aligned}
$$

3.3. В грамматике M' есть праивило $B \to C_a$, но нет правила $C_a \to F$ для нетерминала F, и кроме того, есть правило $_a \to a$. Удаляем правило $B \to C_a$, и добавляем правило $B \to a$. Получаем грамматику M'' :

$$
\begin{aligned}
S &\to C_aBC_a \mid B \\
A &\to b \mid C_bC_b \\
B &\to b \mid C_bC_b \mid a \\
C_a &\to a,\ C_b \to b
\end{aligned}
$$

Пример 7 (продолжение)

- Текущая грамматика M'':

$$S \to C_a B C_a \mid B$$
$$A \to b \mid C_b C_b$$
$$B \to b \mid C_b C_b \mid a$$
$$C_a \to a, C_b \to b$$

Пример 7 (продолжение)

- Текущая грамматика M'':

$$
\begin{aligned}
&S \to C_a B C_a \mid B\\
&A \to b \mid C_b C_b\\
&B \to b \mid C_b C_b \mid a\\
&C_a \to a, C_b \to b
\end{aligned}
$$

3.4. В грамматике M'' есть праивило $B \to C_a$, но нет правила $C_a \to F$ для нетерминала F, и кроме того, есть правило $_a \to a$. Удаляем правило $B \to C_a$, и добавляем правило $B \to a$. Получаем грамматику $M''' = G_2$:

$$
\begin{aligned}
&S \to C_a B C_a \mid b \mid C_b C_b \mid a\\
&A \to b \mid C_b C_b\\
&B \to b \mid C_b C_b \mid a\\
&C_a \to a, C_b \to b
\end{aligned}
$$

Пример 7 (окончание)

4. Текущая грамматика G_2:

$$S \to C_aBC_a \mid b \mid B_1C_b \mid a$$
$$A \to b \mid C_bC_b$$
$$B \to b \mid C_bC_b \mid a$$
$$A_1 \to a, C_b \to b$$

Осталось разобраться с правыми частями, у которых длины больше двух. Заменим единственное такое правило $S \to C_aBC_a$ на правила $S \to C_aD$, $D \to BC_a$, и мы получим грамматику в нормальной форме Хомского.

$$S \to C_aD \mid b \mid C_bC_b \mid a$$
$$A \to b \mid C_bC_b$$
$$B \to b \mid C_bC_b \mid a$$
$$D \to BC_a$$
$$A_1 \to a, C_b \to b$$