Лингвистические основы информатики
Лекция 5
ε-свободные грамматики

Ю. В. Нагребецкая, И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика и компьютерные науки
(6 семестр)

ε-свободная грамматика. Определение

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика. Нетерминал A называется **аннулирующим**, если $A \Rightarrow^* \varepsilon$.

ε-свободная грамматика. Определение

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика. Нетерминал A называется **аннулирующим**, если $A \Rightarrow^* \varepsilon$.
- Множество аннулирующих нетерминалов грамматики G обозначим через $Ann(G)$.

ε-свободная грамматика. Определение

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика. Нетерминал A называется аннулирующим, если $A \Rightarrow^* \varepsilon$.
- Множество аннулирующих нетерминалов грамматики G обозначим через $Ann(G)$.
- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется ε-свободной, если она либо не содержит аннулирующих нетерминалов, либо ее единственный аннулирующий нетерминал — это аксиома S, и аксиома S не содержится в правых частях правил вывода грамматики.

ε-свободная грамматика. Определение

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика. Нетерминал A называется аннулирующим, если $A \Rightarrow^* \varepsilon$.
- Множество аннулирующих нетерминалов грамматики G обозначим через $Ann(G)$.
- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется ε-свободной, если она либо не содержит аннулирующих нетерминалов, либо ее единственный аннулирующий нетерминал — это аксиома S, и аксиома S не содержится в правых частях правил вывода грамматики.
- Таким образом для ε-свободной грамматики $Ann(G) = \emptyset$ либо $Ann(G) = \{S\}$.

Построение множества $Ann(G)$

Построение множества $Ann(G)$

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, найдем **множество** $\sigma = Ann(G)$ **ее аннулирующих нетерминалов**.

Построение множества $Ann(G)$

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, найдем **множество** $\sigma = Ann(G)$ **ее аннулирующих нетерминалов**.

(2) Положим $\sigma_1 = \{A \in \Gamma \mid \text{существует правило } A \to \varepsilon \in P\}$.

Построение множества $Ann(G)$

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, найдем **множество** $\sigma = Ann(G)$ **ее аннулирующих нетерминалов**.

(2) Положим $\sigma_1 = \{A \in \Gamma \mid \text{существует правило } A \to \varepsilon \in P\}$.

(3) Определим

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i \cup \{B \in \Gamma \mid B \to \alpha \in P, \alpha \in (\sigma_i)^*\}$$

Построение множества $Ann(G)$

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, найдем **множество** $\sigma = Ann(G)$ **ее аннулирующих нетерминалов**.

(2) Положим $\sigma_1 = \{A \in \Gamma \mid$ существует правило $A \to \varepsilon \in P\}$.

(3) Определим

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i \cup \{B \in \Gamma \mid B \to \alpha \in P, \alpha \in (\sigma_i)^*\}$$

(4) На некотором шаге найдется i такое, что $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ (почему?). Тогда полагаем $\sigma = \sigma_i$.

Построение множества $Ann(G)$

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, найдем **множество** $\sigma = Ann(G)$ **ее аннулирующих нетерминалов**.

(2) Положим $\sigma_1 = \{A \in \Gamma \mid$ существует правило $A \to \varepsilon \in P\}$.

(3) Определим

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i \cup \{B \in \Gamma \mid B \to \alpha \in P, \alpha \in (\sigma_i)^*\}$$

(4) На некотором шаге найдется i такое, что $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ (почему?). Тогда полагаем $\sigma = \sigma_i$.

(5) Докажем, что $Ann(G) = \sigma$.

Построение множества $Ann(G)$ (продолжение)

(6) Докажем, что по построению $\sigma \subseteq Ann(G)$. А именно: докажем индукцией по i, что $\sigma_i \subseteq Ann(G)$.

Построение множества $Ann(G)$ (продолжение)

(6) Докажем, что по построению $\sigma \subseteq Ann(G)$. А именно: докажем индукцией по i, что $\sigma_i \subseteq Ann(G)$.

(7) Б.И.: $\sigma_1 \subseteq Ann(G)$ (см.п.(1)). Ш.И.: пусть $\sigma_i \subseteq Ann(G)$. И пусть $A \in \sigma_{i+1} \backslash \sigma_i$. Тогда в грамматике G есть правило $A \to \alpha$, где $\alpha \in (\sigma_i)^*$. Но каждый нетерминал из σ_i по П.И. принадлежит $Ann(G)$, и значит из него можно вывести ε. Следовательно, $\alpha \Rightarrow^* \varepsilon$, откуда $A \Rightarrow^* \varepsilon$, что означает, что $A \in Ann(G)$. Поэтому действительно $\sigma_{i+1} \subseteq Ann(G)$.

Построение множества $Ann(G)$ (продолжение)

(6) Докажем, что по построению $\sigma \subseteq Ann(G)$. А именно: докажем индукцией по i, что $\sigma_i \subseteq Ann(G)$.

(7) Б.И.: $\sigma_1 \subseteq Ann(G)$ (см.п.(1)). Ш.И.: пусть $\sigma_i \subseteq Ann(G)$. И пусть $A \in \sigma_{i+1} \backslash \sigma_i$. Тогда в грамматике G есть правило $A \to \alpha$, где $\alpha \in (\sigma_i)^*$. Но каждый нетерминал из σ_i по П.И. принадлежит $Ann(G)$, и значит из него можно вывести ε. Следовательно, $\alpha \Rightarrow^* \varepsilon$, откуда $A \Rightarrow^* \varepsilon$, что означает, что $A \in Ann(G)$. Поэтому действительно $\sigma_{i+1} \subseteq Ann(G)$.

(8) Поскольку $\sigma = \sigma_i$ для некоторого i, по п.(6) имеем требуемое.

Построение множества $Ann(G)$ (окончание)

(9) Докажем, что $Ann(G) \subseteq \sigma$. Пусть $B \in Ann(G)$. Тогда $B \Rightarrow^* \varepsilon$. Сначала докажем, что во всех правых частях правил, применяемых в выводе $B \Rightarrow^* \varepsilon$ участвуют только нетерминалы.

Построение множества $Ann(G)$ (окончание)

(9) Докажем, что $Ann(G) \subseteq \sigma$. Пусть $B \in Ann(G)$. Тогда $B \Rightarrow^* \varepsilon$. Сначала докажем, что во всех правых частях правил, применяемых в выводе $B \Rightarrow^* \varepsilon$ участвуют только нетерминалы.

(10) Предположим, существует правило $C \rightarrow \alpha \in P$, применяемое в выводе $B \Rightarrow^* \varepsilon$, но $\alpha \notin \Gamma^*$, т.е. α содержит некоторые терминальные символы. Поскольку грамматика G — КС, левые части правил, применяемые в выводе $B \Rightarrow^*_G \varepsilon$ представляют собой одиночные нетерминальные символы, и поэтому терминальные символы из α остаются во всех других словах этого вывода после α. А это противоречит тому, что самое последнее слово вывода - это ε.

Построение множества $Ann(G)$ (окончание)

(9) Докажем, что $Ann(G) \subseteq \sigma$. Пусть $B \in Ann(G)$. Тогда $B \Rightarrow^* \varepsilon$. Сначала докажем, что во всех правых частях правил, применяемых в выводе $B \Rightarrow^* \varepsilon$ участвуют только нетерминалы.

(10) Предположим, существует правило $C \to \alpha \in P$, применяемое в выводе $B \Rightarrow^* \varepsilon$, но $\alpha \notin \Gamma^*$, т.е. α содержит некоторые терминальные символы. Поскольку грамматика G — КС, левые части правил, применяемые в выводе $B \Rightarrow_G^* \varepsilon$ представляют собой одиночные нетерминальные символы, и поэтому терминальные символы из α остаются во всех других словах этого вывода после α. А это противоречит тому, что самое последнее слово вывода - это ε.

(11) Пусть длина вывода $B \Rightarrow_G^* \varepsilon$ равна i. Тогда, очевидно, по построению множеств σ_i имеем $B \in \sigma_i \subseteq \sigma$.

Построение множества $Ann(G)$ (окончание)

(9) Докажем, что $Ann(G) \subseteq \sigma$. Пусть $B \in Ann(G)$. Тогда $B \Rightarrow^* \varepsilon$. Сначала докажем, что во всех правых частях правил, применяемых в выводе $B \Rightarrow^* \varepsilon$ участвуют только нетерминалы.

(10) Предположим, существует правило $C \to \alpha \in P$, применяемое в выводе $B \Rightarrow^* \varepsilon$, но $\alpha \notin \Gamma^*$, т.е. α содержит некоторые терминальные символы. Поскольку грамматика G — КС, левые части правил, применяемые в выводе $B \Rightarrow^*_G \varepsilon$ представляют собой одиночные нетерминальные символы, и поэтому терминальные символы из α остаются во всех других словах этого вывода после α. А это противоречит тому, что самое последнее слово вывода - это ε.

(11) Пусть длина вывода $B \Rightarrow^*_G \varepsilon$ равна i. Тогда, очевидно, по построению множеств σ_i имеем $B \in \sigma_i \subseteq \sigma$.

(12) Итак, $Ann(G) \subseteq \sigma$. А значит по (6)-(8), $Ann(G) = \sigma$.

Построение множества $Ann(G)$. Пример 1

Пример 1. Для грамматики G

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid cC \\ A &\to \varepsilon \mid aA \\ B &\to AB \mid \varepsilon \\ C &\to ABC \mid c \end{aligned}$$

найти множество $Ann(G)$ ее аннулирующих нетерминалов.

Построение множества $Ann(G)$. Пример 1

Пример 1. Для грамматики G

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid cC \\ A &\to \varepsilon \mid aA \\ B &\to AB \mid \varepsilon \\ C &\to ABC \mid c \end{aligned}$$

найти множество $Ann(G)$ ее аннулирующих нетерминалов.

Решение.

Пример 1. Для грамматики G

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid cC\\
A &\to \varepsilon \mid aA\\
B &\to AB \mid \varepsilon\\
C &\to ABC \mid c
\end{aligned}
$$

найти множество $Ann(G)$ ее аннулирующих нетерминалов.

Решение.

$\sigma_1 = \{A, B\}$, поскольку есть правила $A \to \varepsilon$, $B \to \varepsilon$.

Построение множества $Ann(G)$. Пример 1

Пример 1. Для грамматики G

$$S \to AB \mid cC$$
$$A \to \varepsilon \mid aA$$
$$B \to AB \mid \varepsilon$$
$$C \to ABC \mid c$$

найти множество $Ann(G)$ ее аннулирующих нетерминалов.

Решение.

$\sigma_1 = \{A, B\}$, поскольку есть правила $A \to \varepsilon$, $B \to \varepsilon$.

$\sigma_2 = \sigma_1 \cup \{S\} = \{A, B, S\}$, поскольку есть правило $S \to AB$, $AB \in (\sigma_1)^*$.

Построение множества $Ann(G)$. Пример 1

Пример 1. Для грамматики G

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid cC \\ A &\to \varepsilon \mid aA \\ B &\to AB \mid \varepsilon \\ C &\to ABC \mid c \end{aligned}$$

найти множество $Ann(G)$ ее аннулирующих нетерминалов.

Решение.

$\sigma_1 = \{A, B\}$, поскольку есть правила $A \to \varepsilon$, $B \to \varepsilon$.

$\sigma_2 = \sigma_1 \cup \{S\} = \{A, B, S\}$, поскольку есть правило $S \to AB$, $AB \in (\sigma_1)^*$.

$Ann(G) = \sigma = \sigma_3 = \sigma_2 = \{A, B, S\}$, поскольку нет других правил $F \to \alpha$ для $F \in \Gamma$, $\alpha \in (\sigma_2)^*$ кроме тех, которые были указаны на предыдущем шаге.

Теорема об ε-свободной грамматике. Формулировка и доказательство

Теорема об эквивалентности ε-свободной грамматики исходной

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей ε-свободная.

Теорема об ε-свободной грамматике. Формулировка и доказательство

Теорема об эквивалентности ε-свободной грамматики исходной

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей ε-свободная.

Доказательство.

Теорема об ε-свободной грамматике. Формулировка и доказательство

Теорема об эквивалентности ε-свободной грамматики исходной

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей ε-свободная.

Доказательство.

(1) Определим на множестве $(\Sigma \cup \Gamma)^*$ отношение $\succeq_G$: для $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup \Gamma)^+$ положим $\alpha \succeq_G \beta$ тогда и только тогда, когда слово β получено из слова α стиранием некоторого множества (возможно пустого) нетерминалов из $Ann(G)$, входящих в слово α. (Очевидно, $\succeq_G$ — частичный порядок (упр.1)). Обозначим $\alpha \succ_G \beta$, если $\alpha \succeq_G \beta$, но $\alpha \neq \beta$. Заметим, что из $\alpha \succeq_G \beta$ следует $\alpha \Rightarrow_G \beta$ (упр.2).

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(2) Пусть $G = (\Gamma', \Sigma, P', S')$, где множество P' получено из множества P правил грамматики G добавлением правил вида $A \to \beta$ для каждого правила $A \to \alpha$ из P, если $A \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$, $\alpha \succ_G \beta$, и добавлением правила $S' \to S$ в случае, если в правой части хотя бы одного правила из P присутствует нетерминал S. Если нетерминал S отсутствует во всех правых частях правил из P, то считается, что $S' = S$.
$\Gamma' = \Gamma \cup \{S'\}$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(2) Пусть $G = (\Gamma', \Sigma, P', S')$, где множество P' получено из множества P правил грамматики G добавлением правил вида $A \to \beta$ для каждого правила $A \to \alpha$ из P, если $A \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$, $\alpha \succ_G \beta$, и добавлением правила $S' \to S$ в случае, если в правой части хотя бы одного правила из P присутствует нетерминал S. Если нетерминал S отсутствует во всех правых частях правил из P, то считается, что $S' = S$. $\Gamma' = \Gamma \cup \{S'\}$.

(3) Далее, пусть $G'' = (\Gamma, \Sigma, P'', S')$, где множество P'' получено исключением из множества P' всех правил вывода вида $A \to \varepsilon$, $B \to B$ и добавлением затем правила $S' \to \varepsilon$ в том случае, если $S \in Ann(G)$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(4) Покажем, что грамматика G'' ε-свободна.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(4) Покажем, что грамматика G'' ε-свободна.

(5) Во первых, по п.(2) доказательства теоремы аксиома S' отсутствует во всех правых частях правил из P', а значит, по п.(3) и в правых частях правил из P''.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(4) Покажем, что грамматика G'' ε-свободна.

(5) Во первых, по п.(2) доказательства теоремы аксиома S' отсутствует во всех правых частях правил из P', а значит, по п.(3) и в правых частях правил из P''.

(6) Предположим, существует нетерминал A, не являющийся аксиомой грамматики G'' (т.е. $A \neq S'$), который является аннулирующим в грамматике G'' (т.е. $A \in Ann(G'')$). Тогда существует вывод $A \Rightarrow_{G''} \varepsilon$. Поскольку по построению в P'' нет правила $A \to \varepsilon$ (см. п.(3)), этот вывод имеет длину, большую двух. А это значит, что $A \Rightarrow_{G''} \ldots \Rightarrow_{G''} w \Rightarrow_{G''} \varepsilon$, где $w \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$. Так как и грамматика G', и грамматика G'' по построению является КС (см.п.(2)–(3)), слово w представляет собой некоторый нетерминал B. Следовательно, $B \Rightarrow_{G''} \varepsilon$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(4) Покажем, что грамматика G'' ε-свободна.

(5) Во первых, по п.(2) доказательства теоремы аксиома S' отсутствует во всех правых частях правил из P', а значит, по п.(3) и в правых частях правил из P''.

(6) Предположим, существует нетерминал A, не являющийся аксиомой грамматики G'' (т.е. $A \neq S'$), который является аннулирующим в грамматике G'' (т.е. $A \in Ann(G'')$). Тогда существует вывод $A \Rightarrow_{G''} \varepsilon$. Поскольку по построению в P'' нет правила $A \to \varepsilon$ (см. п.(3)), этот вывод имеет длину, большую двух. А это значит, что $A \Rightarrow_{G''} \ldots \Rightarrow_{G''} w \Rightarrow_{G''} \varepsilon$, где $w \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$. Так как и грамматика G', и грамматика G'' по построению является КС (см.п.(2)–(3)), слово w представляет собой некоторый нетерминал B. Следовательно, $B \Rightarrow_{G''} \varepsilon$.

(7) Нетерминал B не является аксиомой S' по п.(5) доказательства теоремы. Значит, в P'' есть правило $B \to \varepsilon$, что противоречит построению P'' (см. п.(3)).

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(8) Покажем, что $L(G'') = L(G)$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(8) Покажем, что $L(G'') = L(G)$.

(9) Сначала покажем, что $L(G'') \subseteq L(G)$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(8) Покажем, что $L(G'') = L(G)$.

(9) Сначала покажем, что $L(G'') \subseteq L(G)$.

(10) Вначале покажем, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$ из $\alpha_1 \Rightarrow_{G''} \alpha_2$ следует $\alpha_1 \Rightarrow_G^* \alpha_2$. Если $\alpha_1 \Rightarrow_{G''} \alpha_2$, то $\alpha_1 = \gamma_1 A \gamma_2$, $\alpha_2 = \gamma_1 \beta \gamma_2$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $A \in \Gamma$ и правила $A \to \beta \in P''$. Причем $\beta \neq \varepsilon$ по п.(3). В частности, $A \Rightarrow_{G''} \beta \in P''$. По построению множества P'' (см. п.(2)-(3)) тогда существует слово $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$, что $\alpha \succeq_G \beta$. Как было отмечено в п.(1) $\alpha \Rightarrow_G^* \beta$. Следовательно, $\gamma_1 A \gamma_2 \Rightarrow_G^* \gamma_1 \beta \gamma_2$, т.е. $\alpha_1 \Rightarrow_G^* \alpha_2$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(8) Покажем, что $L(G'') = L(G)$.

(9) Сначала покажем, что $L(G'') \subseteq L(G)$.

(10) Вначале покажем, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$ из $\alpha_1 \Rightarrow_{G''} \alpha_2$ следует $\alpha_1 \Rightarrow_G^* \alpha_2$. Если $\alpha_1 \Rightarrow_{G''} \alpha_2$, то $\alpha_1 = \gamma_1 A \gamma_2$, $\alpha_2 = \gamma_1 \beta \gamma_2$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $A \in \Gamma$ и правила $A \to \beta \in P''$. Причем $\beta \neq \varepsilon$ по п.(3). В частности, $A \Rightarrow_{G''} \beta \in P''$. По построению множества P'' (см. п.(2)-(3)) тогда существует слово $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$, что $\alpha \succeq_G \beta$. Как было отмечено в п.(1) $\alpha \Rightarrow_G^* \beta$. Следовательно, $\gamma_1 A \gamma_2 \Rightarrow_G^* \gamma_1 \beta \gamma_2$, т.е. $\alpha_1 \Rightarrow_G^* \alpha_2$.

(11) Пусть $w \in L(G'')$. Без ограничения общности можно считать, что $w \neq \varepsilon$. Действительно, если $w = \varepsilon$, то $S' \Rightarrow_{G''}^* \varepsilon$. Применяя те же рассуждения, что и в п.(6)–(7), приходим к выводу, что длин вывода $S' \Rightarrow_{G''}^* \varepsilon$ равна единице, т.е. $S' \to \varepsilon \in P''$. А это по построению P'' в п.(3) означает, что $S \in Ann(G)$, т.е. $w = \varepsilon \in L(G)$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(12) Итак, $w \in L(G)$ и $w \neq \varepsilon$. Тогда существует вывод $S \Rightarrow_{G''} \eta_1 \Rightarrow_{G''} \eta_2 \Rightarrow_{G''} \ldots \Rightarrow_{G''} \eta_i \Rightarrow_{G''} \eta_{i+1} \ldots \Rightarrow_{G''} w$, где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i, \eta_{i+1}, \ldots \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $w \in \Sigma^* \backslash \{\varepsilon\}$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(12) Итак, $w \in L(G)$ и $w \neq \varepsilon$. Тогда существует вывод $S \Rightarrow_{G''} \eta_1 \Rightarrow_{G''} \eta_2 \Rightarrow_{G''} \ldots \Rightarrow_{G''} \eta_i \Rightarrow_{G''} \eta_{i+1} \ldots \Rightarrow_{G''} w$, где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i, \eta_{i+1}, \ldots \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $w \in \Sigma^* \backslash \{\varepsilon\}$.

(13) Но тогда, по п.(10) имеем $S \Rightarrow_G \eta_1 \Rightarrow_G \eta_2 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G \eta_i \Rightarrow_G \eta_{i+1} \ldots \Rightarrow_G w$, т.е. $w \in L(G)$. Таким образом, мы доказали, что $L(G'') \subseteq L(G)$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(14) Теперь покажем, что $L(G) \subseteq L(G'')$. Пусть $w \in L(G)$. Так же, как в п.(11) легко показать, что если $w = \varepsilon$, то $w \in L(G'')$ (упр.4). Поэтому можно считать, что $w \neq \varepsilon$.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(14) Теперь покажем, что $L(G) \subseteq L(G'')$. Пусть $w \in L(G)$. Так же, как в п.(11) легко показать, что если $w = \varepsilon$, то $w \in L(G'')$ (упр.4). Поэтому можно считать, что $w \neq \varepsilon$.

(15) Вывод слова w в грамматике G представлен некоторым деревом T. Обрежем это дерево, удалив все поддеревья, представляющие вывод цепочки ε. Поскольку $w \neq \varepsilon$, в результате останется непустое поддерево T'', на листьях которого написано слово w.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(14) Теперь покажем, что $L(G) \subseteq L(G'')$. Пусть $w \in L(G)$. Так же, как в п.(11) легко показать, что если $w = \varepsilon$, то $w \in L(G'')$ (упр.4). Поэтому можно считать, что $w \neq \varepsilon$.

(15) Вывод слова w в грамматике G представлен некоторым деревом T. Обрежем это дерево, удалив все поддеревья, представляющие вывод цепочки ε. Поскольку $w \neq \varepsilon$, в результате останется непустое поддерево T'', на листьях которого написано слово w.

(16) Покажем, что это T'' является деревом вывода в грамматике G''. Дерево T'' подходит под определение дерева вывода: пусть x – какой-нибудь его внутренний узел. Тогда сыновья этого узла в T'' образуют подпоследовательность последовательности его сыновей в T, причем все отсутствующие в T'' сыновья x помечены в T аннулирующими нетерминалами по построению.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(17) Таким образом, если метки сыновей узла x в T'' образуют слово β, а метки его сыновей в T – слово α, то $\alpha \succeq_G \beta$, причем $\beta \neq \varepsilon$ поскольку узел x — внутренний. Пример построения дерева T'' по дереву T на рис.1–3.

Теорема об ε-свободной грамматике. Продолжение доказательства

(17) Таким образом, если метки сыновей узла x в T'' образуют слово β, а метки его сыновей в T – слово α, то $\alpha \succeq_G \beta$, причем $\beta \neq \varepsilon$ поскольку узел x — внутренний. Пример построения дерева T'' по дереву T на рис.1–3.

(18) Итак, мы показали, что в любом внутреннем узле дерева T'' реализуется правило вывода грамматики G''. Осталось заметить, что корень T'' совпадает с корнем T (и равен ?). Таким образом, нами построено дерево вывода слова w в грамматике G''. Теорема доказана.

Построение ε-свободной грамматики. Пример 2

Пример 2. Для грамматики G из примера 1

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid cC \\
A &\to \varepsilon \mid aA \\
B &\to AB \mid \varepsilon \\
C &\to ABC \mid c
\end{aligned}
$$

построить ε-свободную грамматику.

Пример 2. Для грамматики G из примера 1

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid cC \\ A &\to \varepsilon \mid aA \\ B &\to AB \mid \varepsilon \\ C &\to ABC \mid c \end{aligned}$$

построить ε-свободную грамматику.

Решение.

Пример 2. Для грамматики G из примера 1

$$S \to AB \mid cC$$
$$A \to \varepsilon \mid aA$$
$$B \to AB \mid \varepsilon$$
$$C \to ABC \mid c$$

построить ε-свободную грамматику.

Решение.

$\Sigma = \{a, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.

Построение ε-свободной грамматики. Пример 2

Пример 2. Для грамматики G из примера 1

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid cC \\
A &\to \varepsilon \mid aA \\
B &\to AB \mid \varepsilon \\
C &\to ABC \mid c
\end{aligned}
$$

построить ε-свободную грамматику.

Решение.

$\Sigma = \{a, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.

Ранее, в примере 1, было найдено множество $Ann(G) = \{A, B, S\}$.

Пример 2 (продолжение)

Строим грамматику $G = (\Gamma', \Sigma, P', S')$ по грамматике G как в п.(2) доказательства теоремы:

Пример 2 (продолжение)

Строим грамматику $G = (\Gamma', \Sigma, P', S')$ по грамматике G как в п.(2) доказательства теоремы:

Добавляем правила $S \to A$, $S \to B$, $S \to \varepsilon$, поскольку $AB \succ_G A$, $AB \succ_G B$, $AB \succ_G \varepsilon$.

Пример 2 (продолжение)

Строим грамматику $G = (\Gamma', \Sigma, P', S')$ по грамматике G как в п.(2) доказательства теоремы:

Добавляем правила $S \to A$, $S \to B$, $S \to \varepsilon$, поскольку $AB \succ_G A$, $AB \succ_G B$, $AB \succ_G \varepsilon$.

Добавляем правило $A \to a$, поскольку $aA \succ_G a$.

Пример 2 (продолжение)

Строим грамматику $G = (\Gamma', \Sigma, P', S')$ по грамматике G как в п.(2) доказательства теоремы:

Добавляем правила $S \to A$, $S \to B$, $S \to \varepsilon$, поскольку $AB \succ_G A$, $AB \succ_G B$, $AB \succ_G \varepsilon$.

Добавляем правило $A \to a$, поскольку $aA \succ_G a$.

Добавляем правила $B \to A$, $B \to B$, $B \to \varepsilon$, поскольку $AB \succ_G A$, $AB \succ_G B$, $AB \succ_G \varepsilon$.

Пример 2 (продолжение)

Строим грамматику $G = (\Gamma', \Sigma, P', S')$ по грамматике G как в п.(2) доказательства теоремы:

Добавляем правила $S \to A$, $S \to B$, $S \to \varepsilon$, поскольку $AB \succ_G A$, $AB \succ_G B$, $AB \succ_G \varepsilon$.

Добавляем правило $A \to a$, поскольку $aA \succ_G a$.

Добавляем правила $B \to A$, $B \to B$, $B \to \varepsilon$, поскольку $AB \succ_G A$, $AB \succ_G B$, $AB \succ_G \varepsilon$.

Добавляем правила $C \to BC$, $C \to AC$, $C \to C$, поскольку $ABC \succ_G BC$, $ABC \succ_G AC$, $ABC \succ_G C$.

Пример 2 (продолжение)

Строим грамматику $G = (\Gamma', \Sigma, P', S')$ по грамматике G как в п.(2) доказательства теоремы:

Добавляем правила $S \to A$, $S \to B$, $S \to \varepsilon$, поскольку $AB \succ_G A$, $AB \succ_G B$, $AB \succ_G \varepsilon$.

Добавляем правило $A \to a$, поскольку $aA \succ_G a$.

Добавляем правила $B \to A$, $B \to B$, $B \to \varepsilon$, поскольку $AB \succ_G A$, $AB \succ_G B$, $AB \succ_G \varepsilon$.

Добавляем правила $C \to BC$, $C \to AC$, $C \to C$, поскольку $ABC \succ_G BC$, $ABC \succ_G AC$, $ABC \succ_G C$.

Правило $S' \to S$ как в п.(2) не добавляем, так как аксиома S отсутствует во всех правых частях правил из P. При этом считаем, что $S' = S$.

Пример 2 (продолжение)

Имеем промежуточную грамматику G':

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \mid cC \\
A &\to \varepsilon \mid aA \mid a \\
B &\to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \\
C &\to ABC \mid BC \mid AC \mid C \mid c
\end{aligned}
$$

Пример 2 (продолжение)

Имеем промежуточную грамматику G':

$$\begin{aligned}
&S \to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \mid cC \\
&A \to \varepsilon \mid aA \mid a \\
&B \to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \\
&C \to ABC \mid BC \mid AC \mid C \mid c
\end{aligned}$$

Далее, по грамматике G' построим грамматику $G'' = (\Gamma, \Sigma, P'', S')$, как в п.(3) доказательства теоремы.

Пример 2 (продолжение)

Имеем промежуточную грамматику G':

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \mid cC \\
A &\to \varepsilon \mid aA \mid a \\
B &\to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \\
C &\to ABC \mid BC \mid AC \mid C \mid c
\end{aligned}
$$

Далее, по грамматике G' построим грамматику $G'' = (\Gamma, \Sigma, P'', S')$, как в п.(3) доказательства теоремы.

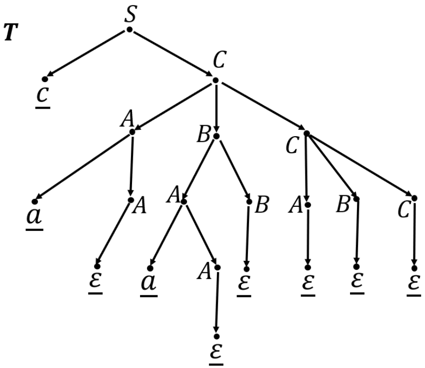
Исключим из множества правил P' грамматики правила $S \to \varepsilon$, $A \to \varepsilon$, $B \to \varepsilon$, $B \to B$ и $C \to C$ и добавим правило $S' \to \varepsilon$, где $S' = S$ (см. пред.слайд), поскольку $S \in Ann(G)$.

Пример 2 (окончание)

Имеем ε-свободную грамматику G'', эквивалентную данной:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \mid cC \\
A &\to aA \mid a \\
B &\to AB \mid A \mid B \\
C &\to ABC \mid BC \mid AC \mid c
\end{aligned}
$$

Пример 2. Иллюстрация дерева вывода слова *caa* в *G*



$$S \Rightarrow \boxed{cC} \Rightarrow c\boxed{ABC} \Rightarrow c\boxed{a\cancel{A}}BC \Rightarrow caBC \Rightarrow caa\boxed{\cancel{A}B}C \Rightarrow$$
$$caa\boxed{\cancel{B}}C \Rightarrow caa\cancel{C} \Rightarrow caa = w \in L(G)$$

Рис. 1

Пример 2. Иллюстрация построения дерева T'' по дереву T

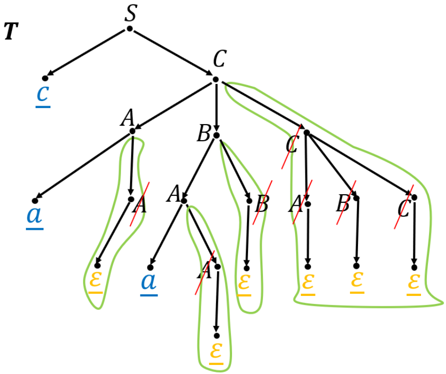
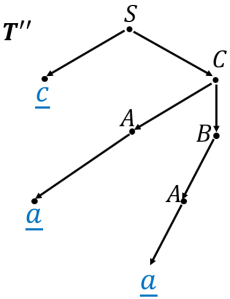


Рис. 2

Пример 2. Иллюстрация дерева вывода слова caa в G''



$$S \Rightarrow \boxed{cC} \Rightarrow c\boxed{AB} \Rightarrow c\boxed{a}B \Rightarrow ca\boxed{A} \Rightarrow$$
$$caa = w \in L(G'')$$

Рис. 3