Лингвистические основы информатики
Лекция 4
Приведенные грамматики

И. А. Михайлова, Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность (6 семестр)

Пример

Посмотрите на грамматику, что с ней не так?

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to aB \mid bc$$
$$B \to bB$$
$$C \to cC \mid d$$

Пример

Посмотрите на грамматику, что с ней не так?

$$
\begin{aligned}
S &\to bAc \mid Acb \\
A &\to aB \mid bc \\
B &\to bB \\
C &\to cC \mid d
\end{aligned}
$$

- Из нетерминала B нельзя вывести строку из терминалов, поэтому он не может участвовать ни в каком выводе цепочки из $L(G)$.

Пример

Посмотрите на грамматику, что с ней не так?

$$
\begin{aligned}
S &\to bAc \mid Acb \\
A &\to aB \mid bc \\
B &\to bB \\
C &\to cC \mid d
\end{aligned}
$$

- Из нетерминала B нельзя вывести строку из терминалов, поэтому он не может участвовать ни в каком выводе цепочки из $L(G)$.
- Нетерминал C также не участвует ни в каком выводе из S, поэтому его можно удалить из грамматики, не изменив язык.

Определение приведенной грамматики

- Нетерминал A грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется **достижимым**, если $S \Rightarrow_G^* \alpha A \beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Определение приведенной грамматики

- Нетерминал A грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется достижимым, если $S \Rightarrow_G^* \alpha A \beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.
- Нетерминал A является производящим, если $A \Rightarrow_G^* u$ для $u \in \Sigma^*$.

Определение приведенной грамматики

- Нетерминал A грамматики $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется достижимым, если $S \Rightarrow_G^* \alpha A \beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.
- Нетерминал A является производящим, если $A \Rightarrow_G^* u$ для $u \in \Sigma^*$.
- КС грамматика G называется приведенной, если все ее нетерминалы достижимые и производящие.

Теорема о приведенной грамматике. Формултровка и начало доказательства

Теорема об эквивалентности приведенной грамматики исходной

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей приведенная.

Теорема о приведенной грамматике. Формултровка и начало доказательства

Теорема об эквивалентности приведенной грамматики исходной

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей приведенная.

Доказательство. Найдем приведенную грамматику G'', эквивалентную грамматике G (т.е. $L(G'') = L(G)$).

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика. Найдем все ее **производящие** нетерминалы.

(2) Пусть $\Gamma_1 = \{A \in \Gamma \mid$ существует правило $A \to u \in P, u \in \Sigma^*\}$.

Теорема о приведенной грамматике. Формултровка и начало доказательства

Теорема об эквивалентности приведенной грамматики исходной

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей приведенная.

Доказательство. Найдем приведенную грамматику G'', эквивалентную грамматике G (т.е. $L(G'') = L(G)$).

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика. Найдем все ее **производящие** нетерминалы.

(2) Пусть $\Gamma_1 = \{A \in \Gamma \mid \text{существует правило } A \to u \in P, u \in \Sigma^*\}$.

(3) Предположим, что Γ_i построено, тогда $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A \in \Gamma \mid \text{существует правило } A \to \alpha \in P, \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma_i)^*\}$

Теорема о приведенной грамматике. Формултровка и начало доказательства

Теорема об эквивалентности приведенной грамматики исходной

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей приведенная.

Доказательство. Найдем приведенную грамматику G'', эквивалентную грамматике G (т.е. $L(G'') = L(G)$).

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика. Найдем все ее **производящие** нетерминалы.

(2) Пусть $\Gamma_1 = \{A \in \Gamma \mid \text{существует правило } A \to u \in P, u \in \Sigma^*\}$.

(3) Предположим, что Γ_i построено, тогда $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A \in \Gamma \mid \text{существует правило } A \to \alpha \in P, \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma_i)^*\}$

(4) Заканчиваем, когда $\Gamma_i = \Gamma_{i+1} = \Gamma'$ (почему такое i найдется?).

Теорема о приведенной грамматике. Формултровка и начало доказательства

Теорема об эквивалентности приведенной грамматики исходной

Для любой КС грамматики существует эквивалентная ей приведенная.

Доказательство. Найдем приведенную грамматику G'', эквивалентную грамматике G (т.е. $L(G'') = L(G)$).

(1) Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика. Найдем все ее **производящие** нетерминалы.

(2) Пусть $\Gamma_1 = \{A \in \Gamma \mid \text{существует правило } A \to u \in P, u \in \Sigma^*\}$.

(3) Предположим, что Γ_i построено, тогда $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A \in \Gamma \mid \text{существует правило } A \to \alpha \in P, \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma_i)^*\}$

(4) Заканчиваем, когда $\Gamma_i = \Gamma_{i+1} = \Gamma'$ (почему такое i найдется?).

(5) Множество Γ' — это множество всех производящих нетерминалов грамматики G по построению.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(6) Построим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$, где $P' = \{A \to \alpha \in P \mid A \in \Gamma', \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma')^*\}$.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(6) Построим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$, где $P' = \{A \to \alpha \in P \mid A \in \Gamma', \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma')^*\}$.

(7) Покажем, что каждый нетерминал грамматики G' является производящим (в G'). Действительно, пусть $A \in \Gamma'$. Тогда по построению $A \in \Gamma_i$ для некоторого i. Следовательно, есть вывод $A \Rightarrow^*_G v$ длины i для некоторого $v \in \Sigma^*$. Заметим, что все нетерминалы этого вывода принадлежат множеству $\Gamma_i \subseteq \Gamma'$. А значит, $A \Rightarrow^*_{G'} v$, и, следовательно, A является производящим нетерминалом грамматики G'.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(6) Построим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$, где $P' = \{A \to \alpha \in P \mid A \in \Gamma', \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma')^*\}$.

(7) Покажем, что каждый нетерминал грамматики G' является производящим (в G'). Действительно, пусть $A \in \Gamma'$. Тогда по построению $A \in \Gamma_i$ для некоторого i. Следовательно, есть вывод $A \Rightarrow_G^* v$ длины i для некоторого $v \in \Sigma^*$. Заметим, что все нетерминалы этого вывода принадлежат множеству $\Gamma_i \subseteq \Gamma'$. А значит, $A \Rightarrow_{G'}^* v$, и, следовательно, A является производящим нетерминалом грамматики G'.

(8) Найдем множество Γ'' всех **достижимых** нетерминалов грамматики G'.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(6) Построим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$, где $P' = \{A \to \alpha \in P \mid A \in \Gamma',$ $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma')^*\}$.

(7) Покажем, что каждый нетерминал грамматики G' является производящим (в G'). Действительно, пусть $A \in \Gamma'$. Тогда по построению $A \in \Gamma_i$ для некоторого i. Следовательно, есть вывод $A \Rightarrow_G^* v$ длины i для некоторого $v \in \Sigma^*$. Заметим, что все нетерминалы этого вывода принадлежат множеству $\Gamma_i \subseteq \Gamma'$. А значит, $A \Rightarrow_{G'}^* v$, и, следовательно, A является производящим нетерминалом грамматики G'.

(8) Найдем множество Γ'' всех **достижимых** нетерминалов грамматики G'.

(9) Если $S \notin \Gamma'$, то полагаем $\Gamma'' = \emptyset$ и G'' — грамматика с пустым множеством правил вывода, иначе делаем шаги (10)–(16).

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(10) Пусть $\Gamma_1' = \{S\}$.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(10) Пусть $\Gamma'_1 = \{S\}$.

(11) Предположим, что Γ'_j построено, тогда
$\Gamma'_{j+1} = \Gamma'_j \cup \{B \in \Gamma' \mid$ существуют правила $A \in \Gamma'_j,\ A \to \alpha B \beta \in P'\}$.

(10) Пусть $\Gamma'_1 = \{S\}$.

(11) Предположим, что Γ'_j построено, тогда
$\Gamma'_{j+1} = \Gamma'_j \cup \{B \in \Gamma' \mid$ существуют правила $A \in \Gamma'_j,\ A \to \alpha B \beta \in P'\}$.

(12) Заканчиваем, когда $\Gamma'_j = \Gamma'_{j+1} = \Gamma''$ (почему такое j найдется?).

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(10) Пусть $\Gamma'_1 = \{S\}$.

(11) Предположим, что Γ'_j построено, тогда
$\Gamma'_{j+1} = \Gamma'_j \cup \{B \in \Gamma' \mid$ существуют правила $A \in \Gamma'_j$, $A \to \alpha B \beta \in P'\}$.

(12) Заканчиваем, когда $\Gamma'_j = \Gamma'_{j+1} = \Gamma''$ (почему такое j найдется?).

(13) Пусть $G'' = (\Gamma'', \Sigma, P'', S)$, где $P'' = \{A \to \alpha \in P' \mid A \in \Gamma'', \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma'')^*\}$.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(10) Пусть $\Gamma'_1 = \{S\}$.

(11) Предположим, что Γ'_j построено, тогда
$\Gamma'_{j+1} = \Gamma'_j \cup \{B \in \Gamma' \mid$ существуют правила $A \in \Gamma'_j,\ A \to \alpha B \beta \in P'\}$.

(12) Заканчиваем, когда $\Gamma'_j = \Gamma'_{j+1} = \Gamma''$ (почему такое j найдется?).

(13) Пусть $G'' = (\Gamma'', \Sigma, P'', S)$, где $P'' = \{A \to \alpha \in P' \mid A \in \Gamma'', \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma'')^*\}$.

(14) Покажем, что каждый нетерминал грамматики G'' является производящим (в G''). Пусть $B \in \Gamma''$. Следовательно, $B \in \Gamma'_j$ для некоторого j. Поскольку $\Gamma'' \subseteq \Gamma'$ существует вывод $B \Rightarrow^*_{G'} w$ для некоторого $w \in \Sigma^*$. Пусть длина этого вывода равна l, тогда, по построению множеств Γ'_j, все нетерминалы, участвующие в этом выводе, принадлежат множеству $\Gamma'_{j+l} \subseteq \Gamma''$. Таким образом, B - производящий нетерминал в грамматике G''.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(14) Множество Γ'' по построению является множеством всех достижимых нетерминалов грамматики G'.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(14) Множество Γ'' по построению является множеством всех достижимых нетерминалов грамматики G'.

(15) Докажем, что все нетерминалы грамматики G'' достижимы. Пусть $C \in \Gamma''$. Тогда по построению $C \in \Gamma'_j$ для некоторого j. Следовательно, существует вывод $S \Rightarrow^*_{G'} C$ длины j. Следовательно, по построению множеств Γ'_j, все нетерминалы, участвующие в этом выводе, принадлежат множеству $\Gamma'_j \subseteq \Gamma''$. Таким образом, C — достижимый нетерминал не только в грамматике G', но и грамматике G''.

Теорема о приведенной грамматике. Продолжение доказательства

(14) Множество Γ'' по построению является множеством всех достижимых нетерминалов грамматики G'.

(15) Докажем, что все нетерминалы грамматики G'' достижимы. Пусть $C \in \Gamma''$. Тогда по построению $C \in \Gamma'_j$ для некоторого j. Следовательно, существует вывод $S \Rightarrow^*_{G'} C$ длины j. Следовательно, по построению множеств Γ'_j, все нетерминалы, участвующие в этом выводе, принадлежат множеству $\Gamma'_j \subseteq \Gamma''$. Таким образом, C — достижимый нетерминал не только в грамматике G', но и грамматике G''.

(16) Поскольку, как доказано выше все нетерминалы G'' грамматики G'' являются и достижимыми, и производящими, грамматика G'' является приведенной по определению.

Теорема о приведенной грамматике. Окончание доказательства

(17) Очевидно, что $L(G'') \subseteq L(G)$ (почему?).

Теорема о приведенной грамматике. Окончание доказательства

(17) Очевидно, что $L(G'') \subseteq L(G)$ (почему?).

(18) Теперь докажем, что $L(G) \subseteq L(G'')$.

Теорема о приведенной грамматике. Окончание доказательства

(17) Очевидно, что $L(G'') \subseteq L(G)$ (почему?).

(18) Теперь докажем, что $L(G) \subseteq L(G'')$.

(19) Если $\Gamma'' = \emptyset$, то, очевидно (почему?), $L(G) = L(G'') = \emptyset$. А грамматика G'' имеет пустое множество правил вывода. Пусть $\Gamma'' \neq \emptyset$.

Теорема о приведенной грамматике. Окончание доказательства

(17) Очевидно, что $L(G'') \subseteq L(G)$ (почему?).

(18) Теперь докажем, что $L(G) \subseteq L(G'')$.

(19) Если $\Gamma'' = \emptyset$, то, очевидно (почему?), $L(G) = L(G'') = \emptyset$. А грамматика G'' имеет пустое множество правил вывода. Пусть $\Gamma'' \neq \emptyset$.

(20) Пусть $w \in L(G)$, тогда $S \Rightarrow_G^* w$ для $w \in \Sigma^*$, и все нетерминалы, участвующие в этом выводе — производящие в грамматике G. Значит, они по построению принадлежат множеству Γ', и поэтому они также производящие в грамматике G'. Но они, очевидно, достижимы в G' и, следовательно, по построению принадлежат множеству Γ''. Значит, $S \Rightarrow_{G''}^* w$ и, таким образом, $w \in L(G'')$. И следовательно, $L(G) \subseteq L(G'')$.

Теорема о приведенной грамматике. Окончание доказательства

(17) Очевидно, что $L(G'') \subseteq L(G)$ (почему?).

(18) Теперь докажем, что $L(G) \subseteq L(G'')$.

(19) Если $\Gamma'' = \emptyset$, то, очевидно (почему?), $L(G) = L(G'') = \emptyset$. А грамматика G'' имеет пустое множество правил вывода. Пусть $\Gamma'' \neq \emptyset$.

(20) Пусть $w \in L(G)$, тогда $S \Rightarrow_G^* w$ для $w \in \Sigma^*$, и все нетерминалы, участвующие в этом выводе — производящие в грамматике G. Значит, они по построению принадлежат множеству Γ', и поэтому они также производящие в грамматике G'. Но они, очевидно, достижимы в G' и, следовательно, по построению принадлежат множеству Γ''. Значит, $S \Rightarrow_{G''}^* w$ и, таким образом, $w \in L(G'')$. И следовательно, $L(G) \subseteq L(G'')$.

(21) Итак, $L(G'') = L(G)$, и значит, грамматики G'' и G эквивалентны.

Пример 1 построения приведенной грамматики

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to bAc \mid Acb \\
A &\to aB \mid bc \\
B &\to bB \\
C &\to cC \mid d
\end{aligned}
$$

Пример 1 построения приведенной грамматики

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$\begin{aligned} S &\to bAc \mid Acb \\ A &\to aB \mid bc \\ B &\to bB \\ C &\to cC \mid d \end{aligned}$$

Решение.

Пример 1 построения приведенной грамматики

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to bAc \mid Acb \\
A &\to aB \mid bc \\
B &\to bB \\
C &\to cC \mid d
\end{aligned}
$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.

Пример 1 построения приведенной грамматики

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$\begin{aligned} S &\to bAc \mid Acb \\ A &\to aB \mid bc \\ B &\to bB \\ C &\to cC \mid d \end{aligned}$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to aB \mid bc$$
$$B \to bB$$
$$C \to cC \mid d$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{A, C\}$, поскольку есть правила $A \to bc$, $C \to d$, где $bc, d \in \Sigma^*$.

Пример 1 построения приведенной грамматики

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to aB \mid bc$$
$$B \to bB$$
$$C \to cC \mid d$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{A, C\}$, поскольку есть правила $A \to bc$, $C \to d$, где $bc, d \in \Sigma^*$.
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{S\} = \{S, A, C\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $bAc \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to bAc \mid Acb\\
A &\to aB \mid bc\\
B &\to bB\\
C &\to cC \mid d
\end{aligned}
$$

Решение.

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.

Найдем производящие нетерминалы грамматики G:

$\Gamma_1 = \{A, C\}$, поскольку есть правила $A \to bc$, $C \to d$, где $bc, d \in \Sigma^*$.

$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{S\} = \{S, A, C\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $bAc \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.

$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'$ — производящие нетерминалы грамматики G.

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to bAc \mid Acb \\
A &\to aB \mid bc \\
B &\to bB \\
C &\to cC \mid d
\end{aligned}
$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{A, C\}$, поскольку есть правила $A \to bc$, $C \to d$, где $bc, d \in \Sigma^*$.
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{S\} = \{S, A, C\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $bAc \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'$ — производящие нетерминалы грамматики G.
Значит, $\Gamma' = \{S, A, C\}$, $P' = \{S \to bAc \mid Acb, A \to bc, C \to cC \mid d\}$, поскольку слова $bAc, Acb, bc, cC, d \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to aB \mid bc$$
$$B \to bB$$
$$C \to cC \mid d$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{A, C\}$, поскольку есть правила $A \to bc$, $C \to d$, где $bc, d \in \Sigma^*$.
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{S\} = \{S, A, C\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $bAc \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'$ — производящие нетерминалы грамматики G.
Значит, $\Gamma' = \{S, A, C\}$, $P' = \{S \to bAc \mid Acb, A \to bc, C \to cC \mid d\}$, поскольку слова $bAc, Acb, bc, cC, d \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.
$G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$.

Пример 1. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to aB \mid bc$$
$$B \to bB$$
$$C \to cC \mid d$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{A, C\}$, поскольку есть правила $A \to bc$, $C \to d$, где $bc, d \in \Sigma^*$.
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{S\} = \{S, A, C\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $bAc \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'$ — производящие нетерминалы грамматики G.
Значит, $\Gamma' = \{S, A, C\}$, $P' = \{S \to bAc \mid Acb, A \to bc, C \to cC \mid d\}$, поскольку слова $bAc, Acb, bc, cC, d \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.
$G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$.

Пример 1 построения приведенной грамматики (продолжение)

Таким образом грамматика G' имеет вид:

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to bc$$
$$C \to cC \mid d$$

Пример 1 построения приведенной грамматики (продолжение)

Таким образом грамматика G' имеет вид:

$$\begin{aligned} S &\to bAc \mid Acb \\ A &\to bc \\ C &\to cC \mid d \end{aligned}$$

Заметим, что $S \in \Gamma'$. Следовательно, $L(G) \neq \emptyset$.
Найдем достижимые нетерминалы грамматики G'.

Пример 1 построения приведенной грамматики (продолжение)

Таким образом грамматика G' имеет вид:

$$\begin{aligned} S &\to bAc \mid Acb \\ A &\to bc \\ C &\to cC \mid d \end{aligned}$$

Заметим, что $S \in \Gamma'$. Следовательно, $L(G) \neq \emptyset$.
Найдем достижимые нетерминалы грамматики G'.

$\Gamma'_1 = \{S\}$

Пример 1 построения приведенной грамматики (продолжение)

Таким образом грамматика G' имеет вид:

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to bc$$
$$C \to cC \mid d$$

Заметим, что $S \in \Gamma'$. Следовательно, $L(G) \neq \emptyset$.
Найдем достижимые нетерминалы грамматики G'.

$\Gamma'_1 = \{S\}$
$\Gamma'_2 = \Gamma'_1 \cup \{A\} = \{S, A\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $S \in \Gamma'_1$.

Пример 1 построения приведенной грамматики (продолжение)

Таким образом грамматика G' имеет вид:

$$\begin{aligned} S &\to bAc \mid Acb \\ A &\to bc \\ C &\to cC \mid d \end{aligned}$$

Заметим, что $S \in \Gamma'$. Следовательно, $L(G) \neq \emptyset$.
Найдем достижимые нетерминалы грамматики G'.

$\Gamma'_1 = \{S\}$
$\Gamma'_2 = \Gamma'_1 \cup \{A\} = \{S, A\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $S \in \Gamma'_1$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'' = \{S, A\}$ — множество всех достижимых символов грамматики G'.

Пример 1 построения приведенной грамматики (продолжение)

Таким образом грамматика G' имеет вид:

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to bc$$
$$C \to cC \mid d$$

Заметим, что $S \in \Gamma'$. Следовательно, $L(G) \neq \emptyset$.
Найдем достижимые нетерминалы грамматики G'.

$\Gamma'_1 = \{S\}$
$\Gamma'_2 = \Gamma'_1 \cup \{A\} = \{S, A\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $S \in \Gamma'_1$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'' = \{S, A\}$ — множество всех достижимых символов грамматики G'.
Значит, $\Gamma'' = \{S, A\}$, $P' = \{S \to bAc \mid Acb, A \to bc, \}$, поскольку слова $bAc, Acb, bc \in (\Gamma'' \cup \Sigma)^*$.

Пример 1 построения приведенной грамматики (продолжение)

Таким образом грамматика G' имеет вид:

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to bc$$
$$C \to cC \mid d$$

Заметим, что $S \in \Gamma'$. Следовательно, $L(G) \neq \emptyset$.
Найдем достижимые нетерминалы грамматики G'.

$\Gamma'_1 = \{S\}$
$\Gamma'_2 = \Gamma'_1 \cup \{A\} = \{S, A\}$, поскольку есть правило $S \to bAc$, где $S \in \Gamma'_1$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'' = \{S, A\}$ — множество всех достижимых символов грамматики G'.
Значит, $\Gamma'' = \{S, A\}$, $P' = \{S \to bAc \mid Acb, A \to bc, \}$, поскольку слова $bAc, Acb, bc \in (\Gamma'' \cup \Sigma)^*$.
$G'' = (\Gamma'', \Sigma, P'', S)$.

Пример 1 построения приведенной грамматики (окончание)

Тогда искомая приведенная грамматика G'' будет

$$S \to bAc \mid Acb$$
$$A \to bc$$

Пример 2 построения приведенной грамматики

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to ABb \mid cAA \\
A &\to aAc \\
B &\to Ca \mid Ab \\
C &\to Cb \mid Ab \mid abc
\end{aligned}
$$

Пример 2 построения приведенной грамматики

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to ABb \mid cAA \\
A &\to aAc \\
B &\to Ca \mid Ab \\
C &\to Cb \mid Ab \mid abc
\end{aligned}
$$

Решение.

Пример 2 построения приведенной грамматики

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to ABb \mid cAA \\
A &\to aAc \\
B &\to Ca \mid Ab \\
C &\to Cb \mid Ab \mid abc
\end{aligned}
$$

<u>Решение.</u>

$\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.

Пример 2 построения приведенной грамматики

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to ABb \mid cAA \\
A &\to aAc \\
B &\to Ca \mid Ab \\
C &\to Cb \mid Ab \mid abc
\end{aligned}
$$

Решение.

$\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.

Найдем производящие нетерминалы грамматики G:

Пример 2 построения приведенной грамматики

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to ABb \mid cAA \\
A &\to aAc \\
B &\to Ca \mid Ab \\
C &\to Cb \mid Ab \mid abc
\end{aligned}
$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{C\}$, поскольку есть правило $C \to abc$, где $abc \in \Sigma^*$.

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to ABb \mid cAA \\
A &\to aAc \\
B &\to Ca \mid Ab \\
C &\to Cb \mid Ab \mid abc
\end{aligned}
$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{C\}$, поскольку есть правило $C \to abc$, где $abc \in \Sigma^*$.
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{B\} = \{B, C\}$, поскольку есть правила $B \to Ca$, где $Ca \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.

Пример 2 построения приведенной грамматики

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$
\begin{aligned}
S &\to ABb \mid cAA \\
A &\to aAc \\
B &\to Ca \mid Ab \\
C &\to Cb \mid Ab \mid abc
\end{aligned}
$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{C\}$, поскольку есть правило $C \to abc$, где $abc \in \Sigma^*$.
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{B\} = \{B, C\}$, поскольку есть правила $B \to Ca$, где $Ca \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'$ — производящие нетерминалы грамматики G.

Пример 2 построения приведенной грамматики

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$S \to ABb \mid cAA$$
$$A \to aAc$$
$$B \to Ca \mid Ab$$
$$C \to Cb \mid Ab \mid abc$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{C\}$, поскольку есть правило $C \to abc$, где $abc \in \Sigma^*$.
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{B\} = \{B, C\}$, поскольку есть правила $B \to Ca$, где $Ca \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'$ — производящие нетерминалы грамматики G.
Значит, $\Gamma' = \{B, C\}$, $P' = \{B \to Ca, C \to Cb \mid abc\}$, поскольку слова $Ca, Cb, abc \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.

Пример 2. Постройте приведенную грамматику, эквивалентную данной

$$S \to ABb \mid cAA$$
$$A \to aAc$$
$$B \to Ca \mid Ab$$
$$C \to Cb \mid Ab \mid abc$$

Решение.
$\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, B, C\}$.
Найдем производящие нетерминалы грамматики G:
$\Gamma_1 = \{C\}$, поскольку есть правило $C \to abc$, где $abc \in \Sigma^*$.
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{B\} = \{B, C\}$, поскольку есть правила $B \to Ca$, где $Ca \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$.
$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma'$ — производящие нетерминалы грамматики G.
Значит, $\Gamma' = \{B, C\}$, $P' = \{B \to Ca, C \to Cb \mid abc\}$, поскольку слова $Ca, Cb, abc \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$.
$G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$.

Пример 2 построения приведенной грамматики

$S \notin \Gamma'$.
Следовательно, $\Gamma'' = \emptyset$, $L(G'') = L(G) = \emptyset$,
а приведенная грамматика G'', эквивалентная данной грамматике G, имеет пустое множество правил вывода.