Лингвистические основы информатики
Лекция 2
Контекстно-свободные грамматики и языки, иерархия Хомского

И. А. Михайлова, Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Контекстно-свободные грамматики и языки. Определение. Примеры 1-2 КС грамматик

- Грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется контекстно-свободной (КС), если все правила вывода в ней имеют вид $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$.

Контекстно-свободные грамматики и языки. Определение. Примеры 1-2 КС грамматик

- Грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется контекстно-свободной (КС), если все правила вывода в ней имеют вид $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$.
- Язык L называется контекстно-свободным, если **существует** КС грамматика, порождающая этот язык.

Контекстно-свободные грамматики и языки. Определение. Примеры 1-2 КС грамматик

- Грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется контекстно-свободной (КС), если все правила вывода в ней имеют вид $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$.
- Язык L называется контекстно-свободным, если **существует** КС грамматика, порождающая этот язык.

Пример 1 Язык $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ является КС языком, так как порождается КС грамматикой $S \to aSb \mid \varepsilon$.

Контекстно-свободные грамматики и языки. Определение. Примеры 1-2 КС грамматик

- Грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется контекстно-свободной (КС), если все правила вывода в ней имеют вид $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$.
- Язык L называется контекстно-свободным, если **существует** КС грамматика, порождающая этот язык.

Пример 1 Язык $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ является КС языком, так как порождается КС грамматикой $S \to aSb \mid \varepsilon$.

Действительно, $S \Rightarrow \varepsilon$ либо
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow^* a^n S b^n \Rightarrow a^n \varepsilon b^n = a^n b^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Контекстно-свободные грамматики и языки. Определение. Примеры 1-2 КС грамматик

- Грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется контекстно-свободной (КС), если все правила вывода в ней имеют вид $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$.
- Язык L называется контекстно-свободным, если **существует** КС грамматика, порождающая этот язык.

Пример 1 Язык $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ является КС языком, так как порождается КС грамматикой $S \to aSb \mid \varepsilon$.

Действительно, $S \Rightarrow \varepsilon$ либо
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow^* a^n S b^n \Rightarrow a^n \varepsilon b^n = a^n b^n$, $n \in \mathbb{N}$.

А какой язык порождает грамматика $S \to aaAb \mid \varepsilon, aA \to S$?

Контекстно-свободные грамматики и языки. Определение. Примеры 1-2 КС грамматик

- Грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется контекстно-свободной (КС), если все правила вывода в ней имеют вид $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$.
- Язык L называется контекстно-свободным, если **существует** КС грамматика, порождающая этот язык.

Пример 1 Язык $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ является КС языком, так как порождается КС грамматикой $S \to aSb \mid \varepsilon$.

Действительно, $S \Rightarrow \varepsilon$ либо
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow^* a^n S b^n \Rightarrow a^n \varepsilon b^n = a^n b^n$, $n \in \mathbb{N}$.

А какой язык порождает грамматика $S \to aaAb \mid \varepsilon, aA \to S$?

Пример 2 Язык $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, кроме того, порождается не КС грамматикой $S \to aaAb \mid \varepsilon, aA \to S$:

Контекстно-свободные грамматики и языки. Определение. Примеры 1-2 КС грамматик

- Грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется контекстно-свободной (КС), если все правила вывода в ней имеют вид $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$.
- Язык L называется контекстно-свободным, если **существует** КС грамматика, порождающая этот язык.

Пример 1 Язык $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ является КС языком, так как порождается КС грамматикой $S \to aSb \mid \varepsilon$.

Действительно, $S \Rightarrow \varepsilon$ либо
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow^* a^n S b^n \Rightarrow a^n \varepsilon b^n = a^n b^n$, $n \in \mathbb{N}$.

А какой язык порождает грамматика $S \to aaAb \mid \varepsilon, aA \to S$?

Пример 2 Язык $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, кроме того, порождается не КС грамматикой $S \to aaAb \mid \varepsilon, aA \to S$:

$S \Rightarrow \varepsilon$ либо
$S \Rightarrow aaAb \Rightarrow aSbb \Rightarrow aaaAb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow^* a^n S b^n \Rightarrow a^n \varepsilon b^n = a^n b^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка

Пример 3 Язык $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не является КС языком (докажем позже) и порождается следующей не КС грамматикой:

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка

Пример 3 Язык $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не является КС языком (докажем позже) и порождается следующей не КС грамматикой:

$S \to S'R \mid \varepsilon$ — добавляем маркер R справа и заменяем стартовый нетерминал S нетерминалом-дублёром, либо сразу получаем слово ε;

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка

Пример 3 Язык $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не является КС языком (докажем позже) и порождается следующей не КС грамматикой:

$S \to S'R \mid \varepsilon$ — добавляем маркер R справа и заменяем стартовый нетерминал S нетерминалом-дублёром, либо сразу получаем слово ε;

$S' \to aS'bC$ — добавляем терминал a слева и терминал b справа, а также нетерминал C, который потом «превратится» в терминал c;

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка

Пример 3 Язык $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не является КС языком (докажем позже) и порождается следующей не КС грамматикой:

$S \to S'R \mid \varepsilon$ — добавляем маркер R справа и заменяем стартовый нетерминал S нетерминалом-дублёром, либо сразу получаем слово ε;

$S' \to aS'bC$ — добавляем терминал a слева и терминал b справа, а также нетерминал C, который потом «превратится» в терминал c;

$Cb \to bC$ — нетерминал и терминал b перестановочны, это нужно для того, чтобы «загнать» все терминалы C влево и «превратить» их затем в терминалы c;

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (продолжение)

$CR \to Rc$ — нетерминалы C, дойдя до R, «превращаются» в терминалы c, а маркер R «переползает» влево;

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (продолжение)

$CR \to Rc$ — нетерминалы C, дойдя до R, «превращаются» в терминалы c, а маркер R «переползает» влево;

$bR \to Rb$ — маркер R «переползает» влево сквозь терминалы b;

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (продолжение)

$CR \to Rc$ — нетерминалы C, дойдя до R, «превращаются» в терминалы c, а маркер R «переползает» влево;

$bR \to Rb$ — маркер R «переползает» влево сквозь терминалы b;

$S'R \to \varepsilon$ — маркер R и нетерминал S' «стираются», когда нетерминал R «переполз» в самое левое положение, дойдя до нетерминала S' (все нетерминалы C уже «превратились» в терминалы c.

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

S

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо S

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо $S \Rightarrow S'R$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$
$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2} CR$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$
$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow a^n S' bbC(Cb)^{n-2} CR$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$
$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow a^n S' bbC(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$

$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow a^n S' bbC(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n C^n R$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$
$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow a^n S' bbC(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n C^n R$
$\Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} CR$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$
$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow a^n S' bbC(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n C^n R$
$\Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} CR \Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} Rc$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^nS'(bC)^nR$
$= a^nS'bCb(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow a^nS'bbC(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nC^nR$
$\Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}CR \Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^nS'(bC)^nR$
$= a^nS'bCb(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow a^nS'bbC(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nC^nR$
$\Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}CR \Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nRc^n =$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$
$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow a^n S' bbC(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n C^n R$
$\Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} CR \Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n Rc^n = a^n S' b^{n-1} bRc^n$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^nS'(bC)^nR$
$= a^nS'bCb(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow a^nS'bbC(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nC^nR$
$\Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}CR \Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nRc^n = a^nS'b^{n-1}bRc^n$
$\Rightarrow a^nS'b^{n-1}Rbc^n$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$
либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^nS'(bC)^nR$
$= a^nS'bCb(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow a^nS'bbC(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nC^nR$
$\Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}CR \Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nRc^n = a^nS'b^{n-1}bRc^n$
$\Rightarrow a^nS'b^{n-1}Rbc^n \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^nS'(bC)^nR$
$= a^nS'bCb(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow a^nS'bbC(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nC^nR$
$\Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}CR \Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nRc^n = a^nS'b^{n-1}bRc^n$
$\Rightarrow a^nS'b^{n-1}Rbc^n \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'Rb^nc^n$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^nS'(bC)^nR$
$= a^nS'bCb(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow a^nS'bbC(Cb)^{n-2}CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nC^nR$
$\Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}CR \Rightarrow a^nS'b^nC^{n-1}Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'b^nRc^n = a^nS'b^{n-1}bRc^n$
$\Rightarrow a^nS'b^{n-1}Rbc^n \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS'Rb^nc^n \Rightarrow a^n\varepsilon b^nc^n =$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$

$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow a^n S' bbC(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n C^n R$

$\Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} CR \Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n Rc^n = a^n S' b^{n-1} bRc^n$

$\Rightarrow a^n S' b^{n-1} Rbc^n \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' R b^n c^n \Rightarrow a^n \varepsilon b^n c^n = a^n b^n c^n$

Контекстно-свободные грамматики и языки. Пример 3 не КС языка (окончание)

Покажем, что язык L совпадает с языком $L(G)$. Для этого проанализируем произвольный вывод в этой грамматике:

$S \Rightarrow \varepsilon$

либо $S \Rightarrow S'R \Rightarrow aS'bCR \Rightarrow aaS'bCbCR \ldots \Rightarrow a^n S'(bC)^n R$
$= a^n S' bCb(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow a^n S' bbC(Cb)^{n-2} CR \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n C^n R$
$\Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} CR \Rightarrow a^n S' b^n C^{n-1} Rc \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S' b^n Rc^n = a^n S' b^{n-1} bRc^n$
$\Rightarrow a^n S' b^{n-1} Rbc^n \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S'R b^n c^n \Rightarrow a^n \varepsilon b^n c^n = a^n b^n c^n$

Заметим, что другая последовательность применения правил вывода исключена, поскольку при этом будут получаться «тупиковые» цепочки из $(\Gamma \cup \Sigma)^*$, из которых нет вывода слов из Σ^*.

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. S

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. $S \Rightarrow \varepsilon$ — самый короткий вывод из S. Очевидно, $\varepsilon \in L_1$.

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. $S \Rightarrow \varepsilon$ — самый короткий вывод из S. Очевидно, $\varepsilon \in L_1$.

Ш.И.

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проироиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. $S \Rightarrow \varepsilon$ — самый короткий вывод из S. Очевидно, $\varepsilon \in L_1$.

Ш.И. S

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. $S \Rightarrow \varepsilon$ — самый короткий вывод из S. Очевидно, $\varepsilon \in L_1$.

Ш.И. $S \Rightarrow aSb$.

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. $S \Rightarrow \varepsilon$ — самый короткий вывод из S. Очевидно, $\varepsilon \in L_1$.

Ш.И. $S \Rightarrow aSb$. Поскольку грамматика G_1 — КС, каждое правило вывода, участвующие в дальнейшем выводе после слова aSb не может «захватывать» терминалы a и b, стоящие справа от терминала S в слове aSb. Значит, последующий вывод будет только из нетерминала S в этом слове. И длина этого вывода будет на единицу короче вывода из исходного стартового символа S.

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. $S \Rightarrow \varepsilon$ — самый короткий вывод из S. Очевидно, $\varepsilon \in L_1$.

Ш.И. $S \Rightarrow aSb$. Поскольку грамматика G_1 — КС, каждое правило вывода, участвующие в дальнейшем выводе после слова aSb не может «захватывать» терминалы a и b, стоящие справа от терминала S в слове aSb. Значит, последующий вывод будет только из нетерминала S в этом слове. И длина этого вывода будет на единицу короче вывода из исходного стартового символа S.

Применяя предположение индукции (П.И.):

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. $S \Rightarrow \varepsilon$ — самый короткий вывод из S. Очевидно, $\varepsilon \in L_1$.

Ш.И. $S \Rightarrow aSb$. Поскольку грамматика G_1 — КС, каждое правило вывода, участвующие в дальнейшем выводе после слова aSb не может «захватывать» терминалы a и b, стоящие справа от терминала S в слове aSb. Значит, последующий вывод будет только из нетерминала S в этом слове. И длина этого вывода будет на единицу короче вывода из исходного стартового символа S.

Применяя предположение индукции (П.И.):

S

Строгое доказательство по индукции в Примере 1

Доказательство того, что данная грамматика порождает данный язык для КС грамматик можно проводить индукцией по длине вывода.

(Почему только для КС?)

Проиллюстрируем это на примерах 1-3.

Пример 1 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_1)$, порождаемый грамматикой G_1: $S \Rightarrow aSb \mid \varepsilon$, совпадает с языком $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Б.И. $S \Rightarrow \varepsilon$ — самый короткий вывод из S. Очевидно, $\varepsilon \in L_1$.

Ш.И. $S \Rightarrow aSb$. Поскольку грамматика G_1 — КС, каждое правило вывода, участвующие в дальнейшем выводе после слова aSb не может «захватывать» терминалы a и b, стоящие справа от терминала S в слове aSb. Значит, последующий вывод будет только из нетерминала S в этом слове. И длина этого вывода будет на единицу короче вывода из исходного стартового символа S.

Применяя предположение индукции (П.И.):

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow^* aa^n b^n b = a^{n+1} b^{n+1} \in L_1$, имеем требуемое.

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,

(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$

и, кроме того,

(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$

для некоторого $n \geq 0$.

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,

(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$

и, кроме того,

(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$

для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) S

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Ш.И.

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Ш.И. S

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Ш.И. $S \Rightarrow S'R$.

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Ш.И. $S \Rightarrow S'R$.
Пользуясь теми же рассуждениями, что и в примере 1, используем П.И.:
(б) S'

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Ш.И. $S \Rightarrow S'R$.
Пользуясь теми же рассуждениями, что и в примере 1, используем П.И.:
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$ для некоторого $n \geq 0$, тогда

Строгое доказательство по индукции в Примере 3

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Ш.И. $S \Rightarrow S'R$.
Пользуясь теми же рассуждениями, что и в примере 1, используем П.И.:
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$ для некоторого $n \geq 0$, тогда
$S' \Rightarrow^* aa^n S' b^n C^n bC = a^{n+1} S' b^n C^n bC$

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Ш.И. $S \Rightarrow S'R$.
Пользуясь теми же рассуждениями, что и в примере 1, используем П.И.:
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$ для некоторого $n \geq 0$, тогда
$S' \Rightarrow^* aa^n S' b^n C^n bC = a^{n+1} S' b^n C^n bC$

Применяя необходимое число раз правило вывода $Cb \to bC$, имеем
S'

Пример 3 Покажем индукцией по выводу из S, что язык $L(G_3)$, порождаемый грамматикой G_3 из примера 3 совпадает с языком $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, а именно,
(а) $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$
и, кроме того,
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$
для некоторого $n \geq 0$.

Б.И. (а) $S \Rightarrow \varepsilon \in L_3$ — самый короткий вывод из S.
(б) При этом $S' \Rightarrow a^0 S' b^0 C^0$.

Ш.И. $S \Rightarrow S'R$.
Пользуясь теми же рассуждениями, что и в примере 1, используем П.И.:
(б) $S' \Rightarrow^* a^n S' b^n C^n$ для некоторого $n \geq 0$, тогда
$S' \Rightarrow^* aa^n S' b^n C^n bC = a^{n+1} S' b^n C^n bC$

Применяя необходимое число раз правило вывода $Cb \to bC$, имеем
$S' \Rightarrow^* a^{n+1} S' b^{n+1} C^{n+1}$, что и нужно было доказать в (б).

Строгое доказательство по индукции в Примере 3 (окончание)

(a) Следовательно, $S \Rightarrow^* a^{n+1} S' b^{n+1} C^{n+1} R$.

Строгое доказательство по индукции в Примере 3 (окончание)

(a) Следовательно, $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}C^{n+1}R$.

Далее, применяя правило вывода $CR \to Rc$, имеем S

Строгое доказательство по индукции в Примере 3 (окончание)

(a) Следовательно, $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}C^{n+1}R$.

Далее, применяя правило вывода $CR \rightarrow Rc$, имеем $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}Rc^{n+1}$.

А затем, правило вывода $bR \rightarrow Rb$, следовательно

Строгое доказательство по индукции в Примере 3 (окончание)

(a) Следовательно, $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}C^{n+1}R$.

Далее, применяя правило вывода $CR \to Rc$, имеем $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}Rc^{n+1}$.

А затем, правило вывода $bR \to Rb$, следовательно S

Строгое доказательство по индукции в Примере 3 (окончание)

(a) Следовательно, $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}C^{n+1}R$.

Далее, применяя правило вывода $CR \to Rc$, имеем $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}Rc^{n+1}$.

А затем, правило вывода $bR \to Rb$, следовательно $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'Rb^{n+1}c^{n+1}$.

Наконец, используем правило вывода $S'R \to \varepsilon$, получаем S

Строгое доказательство по индукции в Примере 3 (окончание)

(a) Следовательно, $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}C^{n+1}R$.

Далее, применяя правило вывода $CR \to Rc$, имеем $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'b^{n+1}Rc^{n+1}$.

А затем, правило вывода $bR \to Rb$, следовательно $S \Rightarrow^* a^{n+1}S'Rb^{n+1}c^{n+1}$.

Наконец, используем правило вывода $S'R \to \varepsilon$, получаем $S \Rightarrow^* a^{n+1}b^{n+1}c^{n+1}$, что и требовалось доказать в (a).

Связь с рациональными языками

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется правоЛинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma, A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Связь с рациональными языками

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется правoлинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma, A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

Связь с рациональными языками

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется правоилинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma, A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

- **Необходимость.** Пусть язык L рационален, тогда существует ДКА $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, который распознает этот язык.

Связь с рациональными языками

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется праволинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma, A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

- **Необходимость.** Пусть язык L рационален, тогда существует ДКА $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, который распознает этот язык.
- Построим грамматику $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$, где $\Gamma = Q, S = q_0$, а правила вывода будут следующими:

$$\delta(q, a) = r \Leftrightarrow q \to ar$$
$$q \in F \Leftrightarrow q \to \varepsilon$$

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется правoлинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma, A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

- **Необходимость.** Пусть язык L рационален, тогда существует ДКА $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, который распознает этот язык.
- Построим грамматику $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$, где $\Gamma = Q, S = q_0$, а правила вывода будут следующими:

$$\delta(q, a) = r \Leftrightarrow q \to ar$$
$$q \in F \Leftrightarrow q \to \varepsilon$$

- Проверим, что $L(\mathcal{A}) = L(G)$ (см. рис.1):

$$\begin{aligned} w = a_1 \dots a_n \in L(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \delta(q_0, a_1) = q_1, \delta(q_1, a_2) = q_2, \dots, \delta(q_{n-1}, a_n) = q_n \in F \\ &\Leftrightarrow q_0 \to a_1 q_1, q_1 \to a_2 q_2 \dots q_{n-1} \to a_n q_n, q_n \to \varepsilon \\ &\Leftrightarrow q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow a_1 a_2 q_2, \dots, \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n q_n \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n = w \\ &\Leftrightarrow w \in L(G) \end{aligned}$$

Доказательство теоремы. Иллюстрация

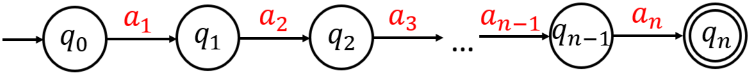


Рис. 1

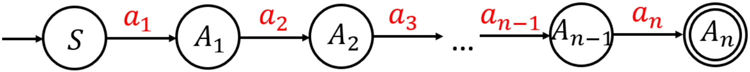


Рис. 2

Связь с рациональными языками (продолжение)

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется праволинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma, A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

- **Достаточность.** Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — праволинейная грамматика, пусть в ней есть правило вида $A \to u \in \Sigma^*$, где $u \neq \varepsilon$.

Связь с рациональными языками (продолжение)

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется праволинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma$, $A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

- **Достаточность.** Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — праволинейная грамматика, пусть в ней есть правило вида $A \to u \in \Sigma^*$, где $u \neq \varepsilon$.
- Пусть $u = a_1 \dots a_m$. Рассмотрим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$ такую, что $\Gamma' = \Gamma \cup \{A_1, \dots A_m\}$ ($A_1, \dots A_m$ — новые нетерминалы) и $P' = P \setminus \{A \to u\} \cup \{A \to a_1 A_1, \dots, A_{m-1} \to a_m A_m, A_m \to \varepsilon\}$. Очевидно, что G' и G порождают один и тот же язык.

Связь с рациональными языками (продолжение)

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется праволинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma$, $A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

- **Достаточность.** Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — праволинейная грамматика, пусть в ней есть правило вида $A \to u \in \Sigma^*$, где $u \neq \varepsilon$.
- Пусть $u = a_1 \dots a_m$. Рассмотрим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$ такую, что $\Gamma' = \Gamma \cup \{A_1, \dots A_m\}$ ($A_1, \dots A_m$ — новые нетерминалы) и $P' = P \setminus \{A \to u\} \cup \{A \to a_1 A_1, \dots, A_{m-1} \to a_m A_m, A_m \to \varepsilon\}$. Очевидно, что G' и G порождают один и тот же язык.
- Поэтому можно считать, что если $A \to u \in \Sigma^*$ — правило вывода, то $u = \varepsilon$. Построим НКА $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, q_0, F)$, где $Q = \Gamma$, $q_0 = S$.

Связь с рациональными языками (продолжение)

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется правoлинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma$, $A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

- **Достаточность.** Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — праволинейная грамматика, пусть в ней есть правило вида $A \to u \in \Sigma^*$, где $u \neq \varepsilon$.
- Пусть $u = a_1 \dots a_m$. Рассмотрим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$ такую, что $\Gamma' = \Gamma \cup \{A_1, \dots A_m\}$ ($A_1, \dots A_m$ — новые нетерминалы) и $P' = P \setminus \{A \to u\} \cup \{A \to a_1 A_1, \dots, A_{m-1} \to a_m A_m, A_m \to \varepsilon\}$. Очевидно, что G' и G порождают один и тот же язык.
- Поэтому можно считать, что если $A \to u \in \Sigma^*$ — правило вывода, то $u = \varepsilon$. Построим НКА $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, q_0, F)$, где $Q = \Gamma$, $q_0 = S$.
- Определим множество переходов и множество конечных состояний:

$$A \to aB \Leftrightarrow \delta(A, a) = B$$

$$A \to \varepsilon \Leftrightarrow A \in F$$

Связь с рациональными языками (продолжение)

КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется праволинейной, если ее правила вывода имеют вид либо $A \to aB$, где $a \in \Sigma$, $A, B \in \Gamma$, либо $A \to u$, где $u \in \Sigma^*$.

Теорема о связи рациональных языков с языками, порождаемыми праволинейными грамматиками

Язык рационален тогда и только тогда, когда он порождается некоторой праволинейной грамматикой

- **Достаточность.** Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — праволинейная грамматика, пусть в ней есть правило вида $A \to u \in \Sigma^*$, где $u \neq \varepsilon$.
- Пусть $u = a_1 \dots a_m$. Рассмотрим грамматику $G' = (\Gamma', \Sigma, P', S)$ такую, что $\Gamma' = \Gamma \cup \{A_1, \dots A_m\}$ ($A_1, \dots A_m$ — новые нетерминалы) и $P' = P \setminus \{A \to u\} \cup \{A \to a_1 A_1, \dots, A_{m-1} \to a_m A_m, A_m \to \varepsilon\}$. Очевидно, что G' и G порождают один и тот же язык.
- Поэтому можно считать, что если $A \to u \in \Sigma^*$ — правило вывода, то $u = \varepsilon$. Построим НКА $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, q_0, F)$, где $Q = \Gamma$, $q_0 = S$.
- Определим множество переходов и множество конечных состояний:

$$A \to aB \Leftrightarrow \delta(A, a) = B$$
$$A \to \varepsilon \Leftrightarrow A \in F$$

- Равенство $L(\mathcal{A}) = L(G)$ доказывается аналогично предыдущему (см. рис.2):

Связь с рациональными языками (окончание)

$$w = a_1 \dots a_n \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta(S, a_1) = A_1, \delta(A_1, a_2) = A_2, \dots, \delta(A_{n-1}, a_n) = A_n \in F$$

$$\text{где } A_1, A_2, \dots, A_n \in \Gamma,\ A_n \leftrightarrow \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow S \to a_1 A_1, A_1 \to a_2 A_2 \dots A_{n-1} \to a_n A_n, A_n \to \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2, \dots, \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n A_n \Rightarrow w$$

$$\Leftrightarrow w \in L(G)$$

Связь с рациональными языками (окончание)

$$w = a_1 \dots a_n \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta(S, a_1) = A_1, \delta(A_1, a_2) = A_2, \dots, \delta(A_{n-1}, a_n) = A_n \in F$$

$$\text{где } A_1, A_2, \dots, A_n \in \Gamma,\ A_n \leftrightarrow \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow S \to a_1 A_1, A_1 \to a_2 A_2 \dots A_{n-1} \to a_n A_n, A_n \to \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2, \dots, \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n A_n \Rightarrow w$$

$$\Leftrightarrow w \in L(G)$$

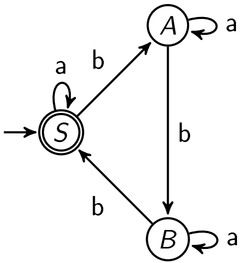
Почему полученный автомат не обязательно является ДКА?

Пример

Постройте грамматику, которая распознает язык всех слов над алфавитом $\{a, b\}$, в которых число букв b делится на 3.

Постройте грамматику, которая распознает язык всех слов над алфавитом $\{a, b\}$, в которых число букв b делится на 3.

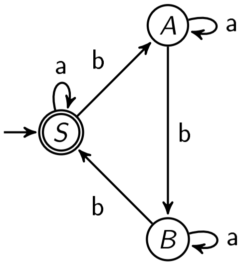
1. Нарисуем автомат, распознающий язык (отметим, что для решения задачи он необязательно должен быть детерминированным)



Пример

Постройте грамматику, которая распознает язык всех слов над алфавитом $\{a, b\}$, в которых число букв b делится на 3.

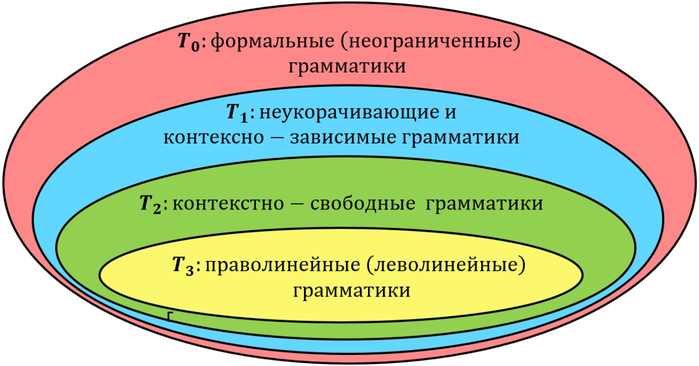
1. Нарисуем автомат, распознающий язык (отметим, что для решения задачи он необязательно должен быть детерминированным)
2. Напишем грамматику, используя теорему.



$$S \to aS \mid bA \mid \varepsilon$$
$$A \to aA \mid bB$$
$$B \to aB \mid bS$$

Иерархия Хомского

Ноамом Хомским (1950-е гг.) предложена следующая иерархия формальных языков с точки зрения грамматик, их порождающих.



T_3 — **регулярные или рациональные** языки, порождаемые **праволинейными** (или **леволинейными**) грамматиками с правилами вывода вида $A \to aB$ (соответственно, $A \to Ba$) или вида $A \to \alpha$, где $A, B \in \Gamma$, $a \in \Sigma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Иерархия Хомского (продолжение)

T_3 — **регулярные или рациональные** языки, порождаемые **праволинейными** (или **леволинейными**) грамматиками с правилами вывода вида $A \to aB$ (соответственно, $A \to Ba$) или вида $A \to \alpha$, где $A, B \in \Gamma$, $a \in \Sigma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Распознаются конечными автоматами и применяются для описания простейших конструкций: идентификаторов, строк, констант, а также языков ассемблера, командных процессоров и др.

Иерархия Хомского (продолжение)

T_3 — **регулярные или рациональные** языки, порождаемые **праволинейными** (или **леволинейными**) грамматиками с правилами вывода вида $A \to aB$ (соответственно, $A \to Ba$) или вида $A \to \alpha$, где $A, B \in \Gamma$, $a \in \Sigma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Распознаются конечными автоматами и применяются для описания простейших конструкций: идентификаторов, строк, констант, а также языков ассемблера, командных процессоров и др.

T_2 — языки, порождаемые **контекстно-свободными** грамматиками с правилами вывода вида $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Иерархия Хомского (продолжение)

T_3 — **регулярные или рациональные** языки, порождаемые **праволинейными** (или **леволинейными**) грамматиками с правилами вывода вида $A \to aB$ (соответственно, $A \to Ba$) или вида $A \to \alpha$, где $A, B \in \Gamma$, $a \in \Sigma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Распознаются конечными автоматами и применяются для описания простейших конструкций: идентификаторов, строк, констант, а также языков ассемблера, командных процессоров и др.

T_2 — языки, порождаемые **контекстно-свободными** грамматиками с правилами вывода вида $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Распознаются автоматами с магазинной памятью (МП-автоматами) (докажем позже) и широко применяются для описания синтаксиса языков программирования.

Иерархия Хомского (продолжение)

T_3 — **регулярные или рациональные** языки, порождаемые **праволинейными** (или **леволинейными**) грамматиками с правилами вывода вида $A \to aB$ (соответственно, $A \to Ba$) или вида $A \to \alpha$, где $A, B \in \Gamma$, $a \in \Sigma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Распознаются конечными автоматами и применяются для описания простейших конструкций: идентификаторов, строк, констант, а также языков ассемблера, командных процессоров и др.

T_2 — языки, порождаемые **контекстно-свободными** грамматиками с правилами вывода вида $A \to \alpha$, где $A \in \Gamma$, $\alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Распознаются автоматами с магазинной памятью (МП-автоматами) (докажем позже) и широко применяются для описания синтаксиса языков программирования.

Иерархия Хомского (окончание)

Иерархия Хомского (окончание)

T_1 — языки, порождаемые **неукорачивающими** грамматиками с правилами $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta, \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$, $|\alpha| \leq |\beta|$ или **контекстно-зависимыми** грамматиками с правилами вывода вида $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$, где $A \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$. В обоих случаях возможно правило $S \to \varepsilon$, но тогда S не встречается в правых частях правил вывода.

Иерархия Хомского (окончание)

T_1 — языки, порождаемые **неукорачивающими** грамматиками с правилами $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta, \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$, $|\alpha| \leq |\beta|$ или **контекстно-зависимыми** грамматиками с правилами вывода вида $\alpha A \beta \to \alpha\gamma\beta$, где $A \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$. В обоих случаях возможно правило $S \to \varepsilon$, но тогда S не встречается в правых частях правил вывода.

Нет хороших распознавателей, применяются для описания практически всех используемых формальных языков, в том числе при анализе текстов на естественных языках, однако при построении компиляторов практически не используются в силу своей сложности.

Иерархия Хомского (окончание)

T_1 — языки, порождаемые **неукорачивающими** грамматиками с правилами $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta, \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$, $|\alpha| \leq |\beta|$ или **контекстно-зависимыми** грамматиками с правилами вывода вида $\alpha A \beta \to \alpha\gamma\beta$, где $A \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$. В обоих случаях возможно правило $S \to \varepsilon$, но тогда S не встречается в правых частях правил вывода.

Нет хороших распознавателей, применяются для описания практически всех используемых формальных языков, в том числе при анализе текстов на естественных языках, однако при построении компиляторов практически не используются в силу своей сложности.

T_0 — **рекурсивно-перечислимые** языки, порождаемые **всеми** грамматиками с правилами вывода вида $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, α содержит хотя бы один нетерминал.

Иерархия Хомского (окончание)

T_1 — языки, порождаемые **неукорачивающими** грамматиками с правилами $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta, \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$, $|\alpha| \leq |\beta|$ или **контекстно-зависимыми** грамматиками с правилами вывода вида $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$, где $A \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (\Gamma \cup \Sigma)^+$. В обоих случаях возможно правило $S \to \varepsilon$, но тогда S не встречается в правых частях правил вывода.

Нет хороших распознавателей, применяются для описания практически всех используемых формальных языков, в том числе при анализе текстов на естественных языках, однако при построении компиляторов практически не используются в силу своей сложности.

T_0 — **рекурсивно-перечислимые** языки, порождаемые **всеми** грамматиками с правилами вывода вида $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, α содержит хотя бы один нетерминал.

Распознаются машиной Тьюринга, порождаются всевозможными грамматиками, т.е. представляют собой класс всех формальных языков. Имеют чисто теоретический интерес. Практического применения грамматики, порождающие такие языки, в силу своей сложности не имеют.