Глава V. Квадратичные формы

§ 21. Приведение формы к каноническому виду и закон инерции

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

21.1. Понятие квадратичной формы. Канонический вид

Определения

Формой над полем F называется многочлен от произвольного числа переменных над этим полем, в котором все одночлены имеют одну и ту же ненулевую степень. Эта степень называется *степенью формы*. Формы 1-й степени, т. е. многочлены вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные, называются *линейными*. Формы 2-й степени называются *квадратичными*. Квадратичную форму принято записывать в виде

$$\begin{array}{rcccccccl} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 & + & a_{22}x_2^2 & + \cdots + & a_{nn}x_n^2 & + & & \\ & + \ 2a_{12}x_1x_2 & + & 2a_{13}x_1x_3 & + \cdots + & 2a_{1n}x_1x_n & + & & \\ & & + & 2a_{23}x_2x_3 & + \cdots + & 2a_{2n}x_2x_n & + & & (1) \\ & & & & + \ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & + & & \\ & & & & + & 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n & , & & \end{array}$$

где $a_{ij} \in F$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \leqslant j$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные. Скаляры a_{ij} называются *коэффициентами* формы (1).

Замечание о терминологии

В дальнейшем мы будем иметь дело только с квадратичными формами. Поэтому слово «квадратичная» часто будет опускаться.

! *Всюду в дальнейшем слово «форма» означает «квадратичная форма».*

Определение

Матрицей квадратичной формы (1) называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- *Матрица любой квадратичной формы является симметрической.*
- Кратко матрицу формы (1) записывают в виде $A = (a_{ij})$, полагая (как правило, неявно), что $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Матричная запись квадратичной формы

Пусть A — матрица квадратичной формы (1). Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вычислив, согласно определению, произведение матриц $X^\top AX$, можно убедиться, что оно представляет собой квадратную матрицу порядка 1, единственным элементом которой является правая часть равенства (1). Отождествляя, как это часто делается, квадратную матрицу 1-го порядка с ее единственным элементом, можно записать форму (1) в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^\top AX. \tag{2}$$

Определение

Правая часть равенства (2) называется *матричной записью* квадратичной формы (1).

Определения

Система равенств вида

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{cases} \tag{3}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ — наборы переменных, а b_{ij} — скаляры, называется *линейной заменой переменных*. Замена переменных (3) называется *невырожденной*, если матрица $B = (b_{ij})$ невырожденна. Матрица B называется *матрицей замены переменных* (3). Замену (3) можно записать в виде $X = BY$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Замена переменных $Y = B^{-1}X$ называется *обратной к замене* $X = BY$.

Замечание 21.1

Если к квадратичной форме $f = X^\top AX$ применить замену переменных $X = BY$, то получится квадратичная форма с матрицей $B^\top AB$.

Доказательство. Подставив BY вместо X в форму $X^\top AX$, мы получим форму $(BY)^\top A(BY) = Y^\top(B^\top AB)Y$, матрица которой равна $B^\top AB$. □

Из этого замечания вытекает

Следствие 21.1

Если квадратичная форма g получена из формы f невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм f и g либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны 0.

Доказательство. Пусть форма $g = Y^\top CY$ получена из формы $f = X^\top AX$ невырожденной линейной заменой переменных $X = BY$. В силу замечания 17.1 $C = B^\top AB$. Используя теорему 8.1 и 1-е свойство определителей из курса «Основы алгебры», имеем

$$|C| = |B^\top AB| = |B^\top| \cdot |A| \cdot |B| = |A| \cdot |B|^2.$$

Остается учесть, что $|B|^2 > 0$. □

Определение

Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если матрица этой формы диагональна. Иными словами, форма имеет канонический вид, если в ней все коэффициенты при произведениях различных переменных равны 0.

Теорема 21.1

Из любой квадратичной формы можно с помощью невырожденной линейной замены переменных получить квадратичную форму, имеющую канонический вид.

Доказательство. Мы приведем два доказательства этого факта. Оба они конструктивны, т. е. содержат алгоритмы приведения формы к каноническому виду. Первый алгоритм (*метод Лагранжа*) менее громоздок и его удобно применять при решении задач. Второй алгоритм (*метод приведения формы к главным осям*) применим только к формам над полем $\mathbb{R}$.

Метод Лагранжа. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма с матрицей $A = (a_{ij})$. Назовем переменную x_i *фиктивной*, если $a_{ij} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Если форма f содержит фиктивные переменные, то мы можем сначала привести к каноническому виду сумму всех слагаемых формы без фиктивных переменных, а затем добавить квадраты всех фиктивных переменных с коэффициентами 0. Поэтому будем далее считать, что форма не содержит фиктивных переменных. Покажем, что мы можем привести форму к виду

$$b_{11}y_1^2 + g(y_2, \ldots, y_n), \tag{4}$$

где $g(y_2, \ldots, y_n)$ — квадратичная форма, зависящая только от переменных $y_2, \ldots, y_n$. Если $a_{1i} = 0$ для всех $i > 1$, то форма уже имеет такой вид (с точностью до обозначения переменных). Предположим поэтому, что $a_{1i} \neq 0$ для некоторого $i > 1$. Для простоты обозначений будем считать, что $i = 2$ (в общем случае рассуждения аналогичны). Дальнейшие рассмотрения разбиваются на два случая.

Случай 1: $a_{11} \neq 0$. Обозначим через f' сумму всех слагаемых формы f, не содержащих переменную x_1. Тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + f'(x_2, \ldots, x_n).$$

Метод Лагранжа (2)

Сумму слагаемых, содержащих x_1, дополним до полного квадрата:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} \cdot \left(x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}^2} \right) -$$

$$- \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + f'(x_2, \dots, x_n) =$$

$$= a_{11} \cdot \left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}} \right)^2 + g(x_2, \dots, x_n),$$

где

$$g(x_2, \dots, x_n) = f'(x_2, \dots, x_n) - \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}.$$

Рассмотрим замену переменных

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} x_1 & = & y_1 & - & \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot y_2 & - & \cdots & - & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot y_n, \\ x_2 & = & & & y_2 & & & & , \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_n & = & & & & & & & y_n. \end{array} \right. \tag{5}$$

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1. В частности, замена (5) невырожденна. Ясно, что

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}}, \quad y_2 = x_2, \ \dots, \ y_n = x_n.$$

Следовательно, замена (5) приводит форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к виду $a_{11}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n)$, т. е. к форме вида (4).

Случай 2: $a_{11} = 0$. Напомним, что $a_{12} \neq 0$. Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \quad , \\ x_2 = y_1 - y_2 \quad , \\ x_3 = \qquad y_3 \quad , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \qquad\qquad y_n. \end{cases} \tag{6}$$

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим ее через B. По предложению 8.12 из курса «Основы алгебры» имеем:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 = -2 \neq 0.$$

Таким образом, замена (6) невырожденна. Применив ее, получим форму, в которой коэффициент при y_1^2 равен $2a_{12}$, и, в частности, отличен от 0. Это сводит ситуацию к случаю 1.

Итак, мы можем невырожденной линейной заменой переменных привести форму f к виду (4), т. е. избавиться от слагаемых, содержащих произведения x_1 на другие переменные. После этого аналогичными действиями можно избавиться от слагаемых, содержащих произведения x_2 на другие переменные, затем произведения x_3 на другие переменные и т. д.

Через конечное число шагов слагаемых, содержащих произведения различных переменных не останется, и форма примет канонический вид. Теорема доказана (первым способом). $\square$

Метод приведения к главным осям. Пусть f — квадратичная форма от n переменных над полем $\mathbb{R}$. Будем рассматривать матрицу A формы f как матрицу в стандартном базисе некоторого линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Матрица A симметрична. В силу следствия 18.1 оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. По следствию 18.2 существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D такие, что $D = T^\top AT$. Применим к форме $f = X^\top AX$ невырожденную линейную замену переменных $X = TY$. В силу замечания 18.1 мы получим форму, матрицей которой является матрица $T^\top AT = D$. Таким образом, в результате этой замены матрица формы станет диагональной, т. е. форма будет приведена к каноническому виду. Теорема доказана (вторым способом). $\square$

Более подробно алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям изложен на следующем слайде.

Алгоритм 21.1 (алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям)

Дана квадратичная форма $X^\top AX$ от n переменных над полем $\mathbb{R}$. Матрица A симметрична. Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющий в стандартном базисе этого пространства матрицу A, самосопряжен. Находим сначала все собственные значения, а затем все линейно независимые собственные векторы матрицы A. Они образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны (см. следствие 17.1). Применяя при необходимости процесс ортогонализации к линейно независимым собственным векторам, соответствующим одному и тому же собственному значению, находим ортогональный базис в $\mathbb{R}^n$. Нормируем векторы этого базиса и получаем ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A. Записываем векторы этого базиса в матрицу по столбцам, обозначаем эту матрицу через T. Замена переменных $X = TY$ приводит исходную форму к каноническому виду. Матрица полученной формы — это диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные значения матрицы A, причем каждое собственное значение стоит столько раз, сколько существует относящихся к нему линейно независимых собственных векторов.

21.2. Приложение к классификации квадрик

В курсе аналитической геометрии приводится полная классификация *квадрик в пространстве* (или *поверхностей второго порядка*), т. е. поверхностей, которые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задаются уравнением вида

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 &+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz+ \\ &+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}$ и a_{23} отличен от нуля. При этом используется без доказательства следующее утверждение.

Предложение 21.1

Для произвольной квадрики в пространстве существует прямоугольная декартова система координат, в которой эта квадрика имеет уравнение вида (7) такое, что $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, а по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{22} и a_{33} отличен от нуля.

Докажем это утверждение.

Доказательство. Сумма слагаемых второй степени, входящих в уравнение (7), т. е. выражение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

называется *квадратичной формой старших членов* этого уравнения. С учетом этого определения, доказываемое утверждение можно переформулировать так: существует прямоугольная декартова система координат, в которой квадратичная форма старших членов уравнения квадрики имеет канонический вид.

Обозначим квадратичную форму старших членов уравнения (7) через f. Чтобы достичь указанной в предыдущем абзаце цели, приведем форму f к главным осям, используя алгоритм 21.1. Его применение в описываемой ситуации имеет одну особенность: замену переменных $X = TY$, о которой идет речь в этом алгоритме, следует применять ко всей левой части уравнения (7), а не только к форме f. Уточним, что мы имеем в виду. Пусть $T = (t_{ij})$,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Тогда замену $X = TY$ можно переписать в координатном виде:

$$\begin{cases} x = t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z', \\ y = t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z', \\ z = t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z'. \end{cases}$$

Приводя квадратичную форму f главным осям, правые части трех последних равенств надо подставлять во все слагаемые из (7), а не только в слагаемые формы f.

Обозначим через A матрицу квадратичной формы f. После осуществления замены $X = TY$ мы получим, что в некоторой системе координат наша квадрика будет иметь уравнение вида (7), в котором матрица квадратичной формы старших членов диагональна. Обозначим эту матрицу через D. Тогда $D = T^{\top}AT$. Поскольку матрица T невырожденна, из следствия 4.1 вытекает, что $r(D) = r(A)$. Но матрица A ненулевая. Следовательно, $r(A) \neq 0$, откуда $r(D) \neq 0$, а значит и матрица D ненулевая. Таким образом, в уравнении квадрики в новой системе координат по крайней мере один из коэффициентов при квадратах переменных будет отличен от нуля.

Отметим еще, что система координат, к которой мы перейдем, состоит из старого начала координат и того ортонормированного базиса пространства, состоящего из собственных векторов матрицы A, который будет найден в процессе приведения формы f к главным осям (как видно из алгоритма 21.1, именно векторы этого ортонормированного базиса записаны в столбцах матрицы T). В частности, эта система координат будет прямоугольной декартовой. $\square$

Аналогичным образом, метод приведения к главным осям можно применять и при классификации *квадрик на плоскости* (или *кривых второго порядка*). Напомним, что квадрика на плоскости — это кривая, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} отличен от нуля. Для классификации квадрик на плоскости надо, в частности, перейти к новой системе координат, в которой уравнение квадрики не содержит слагаемого с произведением переменных. Иными словами, надо применить невырожденную линейную замену переменных, которая приводит квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ к каноническому виду (причем эта замена должна иметь геометрический смысл, т. е. соответствовать переходу к некоторой новой прямоугольной декартовой системе координат). Как показано в курсе аналитической геометрии, этого можно добиться, повернув исходную систему координат на угол α, определяемый равенством $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$. Но той же цели можно добиться, применив к форме $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ метод приведения к главным осям.

21.3. Закон инерции

Из одной и той же квадратичной формы с помощью различных невырожденных линейных замен переменных можно получить бесконечно много форм канонического вида. Но, как показывает следующее утверждение, некоторые важные характеристики всех этих форм должны совпадать.

Теорема 21.2 (закон инерции квадратичных форм)

Если квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$ двумя различными невырожденными линейными заменами переменных приведена к двум различным формам, имеющим канонический вид, то полученные формы имеют одинаковое число положительных коэффициентов при квадратах переменных и одинаковое число отрицательных коэффициентов при квадратах переменных.

Доказательство. Предположим, что мы привели квадратичную форму $f = X^\top AX$ к каноническому виду $g = Y^\top DY$. По определению канонического вида формы, матрица D диагональна.

Согласно второму доказательству теоремы 21.1, можно считать, что переход от формы f к форме g сделан с помощью замены $X = TY$, где матрица T ортогональна (и, в частности, невырожденна). Тогда $D = T^\top AT$. В силу следствия 4.1 ранги матриц A и D совпадают. Очевидно, что ранг диагональной матрицы равен числу ненулевых элементов на ее главной диагонали. Итак, число ненулевых элементов на главной диагонали матрицы D, т. е. число ненулевых коэффициентов при квадратах переменных в форме g, равно рангу матрицы A, и потому не зависит от способа приведения формы f к каноническому виду.

Пусть теперь форма $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases} \tag{8}$$

приводится к каноническому виду

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & t_1y_1^2 + t_2y_2^2 + \cdots + t_ky_k^2 - \\ & - t_{k+1}y_{k+1}^2 - t_{k+2}y_{k+2}^2 - \cdots - t_{k+\ell}y_{k+\ell}^2, \end{aligned} \tag{9}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{k+\ell} > 0$,

а невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n, \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n \end{cases} \qquad (10)$$

— к каноническому виду

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = {} & s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + \cdots + s_p z_p^2 - {} \\ & - s_{p+1} z_{p+1}^2 - s_{p+2} z_{p+2}^2 - \cdots - s_{p+q} z_{p+q}^2, \end{aligned} \qquad (11)$$

где $s_1, s_2, \dots, s_{p+q} > 0$. В силу сказанного выше, $k + \ell = p + q$. Требуется доказать, что $k = p$ и $\ell = q$. Ясно, что одно из этих равенств следует из другого, и потому достаточно доказать какое-нибудь одно из них. Докажем, что $k = p$. Предположим противное: пусть $k \neq p$. Для определенности будем считать, что $k < p$.

Закон инерции (4)

Так как замены переменных (8) и (10) невырожденны, существуют обратные к ним замены переменных. Пусть замена переменных

$$\begin{cases} y_1 = d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n, \\ y_2 = d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \cdots + d_{nn}x_n \end{cases} \qquad (12)$$

обратна к (8), а замена переменных

$$\begin{cases} z_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \cdots + f_{1n}x_n, \\ z_2 = f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \cdots + f_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \cdots + f_{nn}x_n \end{cases} \qquad (13)$$

обратна к (10). Замены (12) и (13) также невырожденны.

Проверим, что существует ненулевой набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при подстановке которых в правые части равенств (12) и (13) возникают равенства

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \cdots = z_n = 0.$$

Для этого рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n = 0, \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{k1}x_1 + d_{k2}x_2 + \cdots + d_{kn}x_n = 0, \\ f_{p+1\,1}x_1 + f_{p+1\,2}x_2 + \cdots + f_{p+1\,n}x_n = 0, \\ f_{p+2\,1}x_1 + f_{p+2\,2}x_2 + \cdots + f_{p+2\,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \cdots + f_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Это однородная система линейных уравнений, число уравнений в которой равно $k + n - p$. Поскольку $k < p$, получаем, что $k + n - p < n$. В силу замечания 7.3 из курса «Основы алгебры» система (14) имеет ненулевое решение $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$.

Подставив эти значения вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в правые части равенств (12) и (13), получим значения левых частей этих равенств:

$$y_1 = y_1', y_2 = y_2', \ldots, y_n = y_n', z_1 = z_1', z_2 = z_2', \ldots, z_n = z_n'.$$

Из того, что $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ — решение системы (14), вытекает, что

$$y_1' = y_2' = \cdots = y_k' = z_{p+1}' = z_{p+2}' = \cdots = z_n' = 0. \tag{15}$$

Равенство (9) означает, что если в его левой части произвести замену переменных (8), то мы получим правую часть этого равенства. Отсюда и из того, что $y_1' = y_2' = \cdots = y_k' = 0$, следует, что

$$\begin{aligned} f(x_1', x_2', \ldots, x_n') = {} & t_1(y_1')^2 + t_2(y_2')^2 + \cdots + t_k(y_k')^2 - \\ & - t_{k+1}(y_{k+1}')^2 - t_{k+2}(y_{k+2}')^2 - \cdots - t_{k+\ell}(y_{k+\ell}')^2 = \\ & = -t_{k+1}(y_{k+1}')^2 - t_{k+2}(y_{k+2}')^2 - \cdots - t_{k+\ell}(y_{k+\ell}')^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Аналогично из равенства (11) и того, что $z_{p+1}' = z_{p+2}' = \cdots = z_n' = 0$, следует, что

$$\begin{aligned} f(x_1', x_2', \ldots, x_n') = {} & s_1(z_1')^2 + s_2(z_2')^2 + \cdots + s_p(z_p')^2 - \\ & - s_{p+1}(z_{p+1}')^2 - s_{p+2}(z_{p+2}')^2 - \cdots - s_{p+q}(z_{p+q}')^2 = \\ & = s_1(z_1')^2 + s_2(z_2')^2 + \cdots + s_p(z_p')^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Итак, $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \leqslant 0$ и $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \geqslant 0$. Следовательно, $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = 0$. Но тогда $s_1(z'_1)^2 + s_2(z'_2)^2 + \dots + s_p(z'_p)^2 = 0$. Поскольку $s_1, s_2, \dots, s_p > 0$, это означает, что $z'_1 = z'_2 = \dots = z'_p = 0$. Учитывая равенства (15), имеем

$$z'_1 = z'_2 = \dots = z'_n = 0. \tag{16}$$

Пусть $F = (f_{ij})$ — матрица замены (13). Обозначим векторы-столбцы этой матрицы через $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$. Равенства (13) можно переписать в виде векторного равенства $x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \dots + x_n\mathbf{f}_n = \mathbf{z}$, где $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Положим $\mathbf{z}' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$. В силу (16), $x'_1\mathbf{f}_1 + x'_2\mathbf{f}_2 + \dots + x'_n\mathbf{f}_n = \mathbf{z}' = \mathbf{0}$. Поскольку среди чисел $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ есть ненулевые, получаем, что векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ линейно зависимы. Следовательно, ранг матрицы F по столбцам меньше n. В силу теоремы о ранге матрицы, ее ранг по минорам также меньше n. Это означает, что $|F| = 0$. Но это не так, поскольку замена (13) невырожденна. Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что $k \neq p$, ложно. Следовательно, $k = p$. $\square$

21.4. Эквивалентность квадратичных форм

Определение

Квадратичные формы f и g над одним и тем же полем называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью невырожденной линейной замены переменных.

Легко понять, что отношение «быть эквивалентными» на множестве всех квадратичных форм над одним и тем же полем является отношением эквивалентности.

Чтобы сформулировать критерий эквивалентности квадратичных форм над полем $\mathbb{R}$, нам понадобятся некоторые новые понятия.

Определения

Пусть f — квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$, а g — форма канонического вида, полученная из формы f с помощью невырожденной линейной замены переменных. Число положительных [отрицательных] коэффициентов при квадратах переменных в форме g называется *положительным* [*отрицательным*] *индексом инерции* формы f.

Предложение 21.2

Квадратичные формы f и g над полем $\mathbb{R}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый положительный индекс инерции и одинаковый отрицательный индекс инерции.

Доказательство. *Необходимость.* Существует невырожденная линейная замена переменных $X = TY$, с помощью которой из формы f получается форма g. Пусть, далее, $Y = SZ$ — невырожденная линейная замена переменных, которая приводит форму g к форме канонического вида h. Тогда линейная замена переменных $X = (TS)Z$ невырожденна (поскольку $|TS| = |T| \cdot |S| \neq 0$) и приводит форму f к форме h. Поскольку мы привели формы f и g к одной и той же форме канонического вида, положительный и отрицательный индексы инерции у этих форм совпадают.

Достаточность. Предположим, что формы $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g = g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ имеют одинаковый положительный индекс инерции k и одинаковый отрицательный индекс инерции ℓ. Пусть форма f невырожденной линейной заменой переменных $X = TX'$ приводится к форме канонического вида h_f, а форма g невырожденной линейной заменой переменных $Y = SY'$ приводится к форме канонического вида h_g. Каждая из форм h_f и h_g имеет k положительных и ℓ отрицательных коэффициентов при квадратах переменных. Переименовав при необходимости переменные, можно добиться того, что в каждой из форм h_f и h_g коэффициенты при первых k переменных положительны, а при последних ℓ отрицательны. Пусть

$$h_f = a_1(x_1')^2 + \dots + a_k(x_k')^2 - a_{k+1}(x_{k+1}')^2 - \dots - a_{k+\ell}(x_{k+\ell}')^2,$$
$$h_g = b_1(y_1')^2 + \dots + b_k(y_k')^2 - b_{k+1}(y_{k+1}')^2 - \dots - b_{k+\ell}(y_{k+\ell}')^2,$$

где $a_1, \dots, a_{k+\ell}, b_1, \dots, b_{k+\ell} > 0$.

Рассмотрим следующую линейную замену переменных:

$$\begin{cases} x'_1 = \sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\, y'_1, \\ x'_2 = \sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\, y'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_{k+\ell} = \sqrt{\frac{b_{k+\ell}}{a_{k+\ell}}}\, y'_{k+\ell}. \end{cases}$$

Обозначим матрицу этой замены через U. Очевидно, что $|U| = \sqrt{\frac{b_1 b_2 \cdots b_{k+\ell}}{a_1 a_2 \cdots a_{k+\ell}}} \neq 0$, и потому линейная замена переменных $X' = UY'$ невырожденна. Применяя эту замену к форме h_f, получаем форму h_g.

Таким образом, применив к форме f замену $X = TX'$, к полученной форме h_f замену $X' = UY'$, а к полученной форме h_g замену $Y' = S^{-1}Y$, мы получим форму g. Последовательное применение нескольких невырожденных линейных замен переменных является невырожденной линейной заменой переменных (поскольку определитель произведения невырожденных матриц равен произведению их определителей, и потому не равен 0). Таким образом, форма g может быть получена из формы f невырожденной линейной заменой переменных. $\square$