§ 20. Полярное разложение

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Полярное разложение (1)

Основным результатом данного параграфа является следующее утверждение, которое объясняет наш интерес к самосопряженным и изометрическим операторам.

Теорема 20.1

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V существуют самосопряженный оператор $\mathcal{B}$ и изометрический оператор $\mathcal{C}$ такие, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. Оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно. Если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то оператор $\mathcal{C}$ также определен однозначно.

Равенство $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, где $\mathcal{B}$ — самосопряженный, а $\mathcal{C}$ — изометрический оператор, называется *полярным разложением* оператора $\mathcal{A}$.

На матричном языке теорему 20.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 20.2

Для любой квадратной матрицы A над полем $\mathbb{C}$ [над полем $\mathbb{R}$] существуют эрмитова [симметрическая] матрица B и унитарная [ортогональная] матрица C такие, что $A = BC$. Матрица B определена однозначно. Если матрица A невырожденна, то матрица C также определена однозначно. $\square$

Неотрицательные и положительные операторы (1)

Для того, чтобы доказать теорему 20.1, нам понадобятся некоторые новые понятия и вспомогательные результаты. Заметим, что если $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор в пространстве со скалярным произведением V и $\mathbf{x} \in V$, то $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}}$, и потому $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}$. Это делает корректным следующее определение.

Определение

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V называется *неотрицательным* [*положительным*], если $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \geqslant 0$ [соответственно $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} > 0$] для любого вектора $\mathbf{x} \in V$.

В силу леммы 18.1 все собственные значения самосопряженного оператора являются действительными числами. Это делает корректным следующее утверждение.

Предложение 20.1

Самосопряженный оператор неотрицателен тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{A}$ — неотрицательный оператор, λ — его собственное значение, а $\mathbf{x}$ — собственный вектор, соответствующий λ. Тогда $\lambda(\mathbf{xx}) = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \geqslant 0$. Поскольку $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (по определению собственного вектора), имеем $\mathbf{xx} > 0$, и потому $\lambda \geqslant 0$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор в пространстве со скалярным произведением V. В силу теорем 6.1 и 9.3 существует ортонормированный базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ пространства V, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через λ_i собственное значение оператора $\mathcal{A}$, соответствующее собственному вектору $\mathbf{f}_i$. По условию $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$. Пусть $\mathbf{x} \in V$. Разложим $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} &= \mathcal{A}(x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n) \cdot (x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n) = \\
&= \big(x_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{f}_n)\big) \cdot (x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n) = \\
&= (x_1\lambda_1\mathbf{f}_1 + x_2\lambda_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\lambda_n\mathbf{f}_n) \cdot (x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n) = \\
&= \lambda_1 x_1 \overline{x_1} + \lambda_2 x_2 \overline{x_2} + \cdots + \lambda_n x_n \overline{x_n} = \\
&= \lambda_1|x_1|^2 + \lambda_2|x_2|^2 + \cdots + \lambda_n|x_n|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Утверждение доказано. $\square$

Неотрицательные и положительные операторы (3)

Предложение 20.2

Неотрицательный оператор $\mathcal{A}$ положителен тогда и только тогда, когда он невырожден.

Доказательство. В силу предложения 20.1 все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ неотрицательны. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Число 0 является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $|A| = |A - 0 \cdot E| = 0$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ положителен тогда и только тогда, когда он невырожден. $\square$

Лемма 20.1

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V, оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ неотрицателен.

Доказательство. Оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ является самосопряженным, поскольку $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = (\mathcal{A}^*)^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Кроме того, для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ имеем:

$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathcal{A}^*\left(\mathcal{A}(\mathbf{x})\right) \cdot \mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (\mathcal{A}^*)^*(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) \geqslant 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Квадратный корень из линейного оператора

Для доказательства теоремы 20.1 нам понадобятся еще два утверждения. Чтобы сформулировать первое из них, введем следующее понятие.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{U}$ называется *квадратным корнем из оператора* $\mathcal{V}$, если $\mathcal{U}^2 = \mathcal{V}$.

Разумеется, ниоткуда не вытекает, что квадратный корень из данного линейного оператора существует. Оказывается, что для неотрицательных операторов это так.

Предложение 20.3

Для любого неотрицательного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V существует, и притом единственный, неотрицательный оператор $\mathcal{B}$, являющийся квадратным корнем из оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство преложения 19.6 будет приведено позднее.

Еще одно утверждение, необходимое для доказательства теоремы 20.1, — это следующая лемма.

Лемма 20.2 (лемма о метрически равных операторах)

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные операторы в пространстве со скалярным произведением V такие, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда существует изометрический оператор $\mathcal{C}$ в V такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$.

Название леммы 20.2 объясняется тем, что если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — операторы, о которых идет речь в этой лемме, а $\mathbf{x}$ — произвольный вектор, то векторы $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ имеют одинаковую длину, поскольку

$$|\mathcal{A}(\mathbf{x})| = \sqrt{\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x})} = \sqrt{\mathcal{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{x})} = |\mathcal{B}(\mathbf{x})|.$$

Вывод теоремы 20.1 из предложения 20.3 и леммы 20.2 (1)

Покажем, как теорема 20.1 вытекает из предложения 20.3, леммы 20.2 и некоторых более ранних утверждений. По лемме 20.1 и предложению 20.3 существует, и притом единственный, неотрицательный (в частности, самосопряженный) оператор $\mathcal{B}$, являющийся квадратным корнем из оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathcal{A}^*\big(\mathcal{A}(\mathbf{y})\big) = \mathbf{x}\cdot(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathcal{B}^2(\mathbf{y}) = \mathcal{B}^*(\mathbf{x})\cdot\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{B}(\mathbf{y}).$$

По лемме о метрически равных операторах, $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$ для некоторого изометрического оператора $\mathcal{C}$. Первые два утверждения теоремы 20.1 доказаны.

Предположим теперь, что оператор $\mathcal{A}$ невырожден. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе. Тогда оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ имеет в том же базисе матрицу A^*A. Ясно, что

$$|A^*A| = |\,\overline{A^\top}\,A| = |\,\overline{A^\top}\,|\cdot|A| = |A^\top|\cdot|A| = |A|\cdot|A| = |A|^2.$$

Из невырожденности оператора $\mathcal{A}$ вытекает, что $|A| \neq 0$, а значит и $|A^*A| = |A|^2 \neq 0$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ невырожден. Поэтому из леммы 20.1 и предложения 20.2 вытекает, что оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ положителен.

Вывод теоремы 20.1 из предложения 20.3 и леммы 20.2 (2)

Из определения оператора $\mathcal{B}$ вытекает, что собственные значения оператора $\mathcal{B}$ — это корни квадратные из собственных значений оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Следовательно, оператор $\mathcal{B}$ также положителен. Вновь применяя предложение 20.2, получаем, что оператор $\mathcal{B}$ невырожден. Но тогда оператор $\mathcal{C}$ однозначно определяется равенством $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, поскольку, в силу этого равенства, $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. Это доказывает третье утверждение теоремы 20.1.

Таким образом, остается доказать предложение 20.3 и лемму 20.2.

Теорема о полярном разложении (комментарий)

Из доказательства теоремы 20.1 вытекает, что ее формулировку, а также формулировку теоремы 20.2, можно несколько усилить. А именно:

- *самосопряженный оператор* $\mathcal{B}$, *о котором идет речь в теореме* 20.1, *обязан быть неотрицательным, а в случае, когда оператор* $\mathcal{A}$ *невырожден, — положительным*;
- *все собственные значения матрицы* B, *о которой идет речь в теореме* 20.2, *неотрицательны, а в случае, когда матрица* A *невырожденна, — положительны*.

Доказательство предложения 20.3. Пусть $\mathcal{A}$ — неотрицательный (в частности, самосопряженный) оператор в пространстве со скалярным произведением V. Требуется доказать, что существует, и притом только один оператор $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Существование. По теореме 18.1 существует ортонормированный базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ пространства V, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями оператора $\mathcal{A}$. По предложению 20.1 все они неотрицательны. Оператор $\mathcal{B}$, имеющий в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

неотрицателен в силу предложения 20.1. Ясно, что $B^2 = A$, и потому $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Доказательство предложения 20.3 (2)

Единственность. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — все попарно различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k_1} = \alpha_1$, $\lambda_{k_1+1} = \cdots = \lambda_{k_2} = \alpha_2$, ..., $\lambda_{k_{s-1}+1} = \cdots = \lambda_n = \alpha_s$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & O & \ldots & O \\ O & \alpha_2 E_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & \alpha_s E_s \end{pmatrix},$$

где $E_1, E_2, \ldots, E_s$ — единичные матрицы порядков k_1, k_2, ..., k_s соответственно, а через O обозначены нулевые матрицы соответствующих размеров. Матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} E_1 & O & \ldots & O \\ O & \sqrt{\alpha_2} E_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & \sqrt{\alpha_s} E_s \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный неотрицательный оператор такой, что $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}$. Требуется доказать, что $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Обозначим через C матрицу оператора $\mathcal{C}$ в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$. Тогда $C^2 = A$.

Разобьем матрицу C на блоки тех же размеров, что и у матрицы A:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1s} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2s} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ C_{s1} & C_{s2} & \dots & C_{ss} \end{pmatrix}.$$

Тогда у матрицы AC блок в позиции (i, j) равен $\alpha_i C_{ij}$, а у матрицы CA в той же позиции стоит блок $\alpha_j C_{ij}$. Учитывая, что $AC = C^3 = CA$, получаем, что $\alpha_i C_{ij} = \alpha_j C_{ij}$, откуда $(\alpha_i - \alpha_j) C_{ij} = O$. Отсюда вытекает, что если $i \neq j$, то $C_{ij} = O$. Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & O & \dots & O \\ O & C_{22} & \dots & O \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ O & O & \dots & C_{ss} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через M подпространство, порожденное векторами $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_{k_1}$. Из строения матрицы C видно, что $\mathcal{C}(\mathbf{f}_i) \in M$ для всякого $i = 1, 2, \dots, k_1$. Следовательно, подпространство M инвариантно относительно оператора $\mathcal{C}$.

Заметим, что если $\mathbf{x} \in M$ и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \dots + x_{k_1}\mathbf{f}_{k_1}$, то

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \dots + x_{k_1}\mathbf{f}_{k_1}) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \dots + x_{k_1}\mathcal{A}(\mathbf{f}_{k_1}) =$$
$$= x_1\alpha_1\mathbf{f}_1 + x_2\alpha_1\mathbf{f}_2 + \dots + x_{k_1}\alpha_1\mathbf{f}_{k_1} = \alpha_1(x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \dots + x_{k_1}\mathbf{f}_{k_1}) = \alpha_1\mathbf{x}.$$

В частности, $\mathcal{A}(\mathbf{f}_i) = \alpha_1\mathbf{f}_i$ для всякого $i = 1, 2, \dots, k_1$.

Ограничение оператора $\mathcal{C}$ на подпространство M — это неотрицательный оператор с матрицей C_{11}. Выберем в M ортонормированный базис $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ..., $\mathbf{g}_{k_1}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{C}$. Пусть γ_1, γ_2, ..., γ_{k_1} — собственные значения оператора $\mathcal{A}$, соответствующие собственным векторам $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ..., $\mathbf{g}_{k_1}$ соответственно. Для всякого $i = 1, 2, \dots, k_1$ имеем

$$\alpha_1\mathbf{f}_j = \mathcal{A}(\mathbf{f}_j) = \mathcal{C}^2(\mathbf{f}_j) = \mathcal{C}\big(\mathcal{C}(\mathbf{f}_j)\big) = \mathcal{C}(\gamma_j\mathbf{f}_j) = \gamma_j^2\mathbf{f}_j.$$

Итак, $\gamma_j^2 = \alpha_1$. Поскольку $\gamma_j \geqslant 0$, имеем $\gamma_j = \sqrt{\alpha_1}$. Таким образом, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{k_1} = \sqrt{\alpha_1}$. Для всякого $i = 1, 2, \dots, k_1$ разложим вектор $\mathbf{f}_i$ по базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ..., $\mathbf{g}_{k_1}$: $\mathbf{f}_i = x_{i1}\mathbf{g}_1 + x_{i2}\mathbf{g}_2 + \dots + x_{ik_1}\mathbf{g}_{k_1}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbf{f}_i) &= \mathcal{C}(x_{i1}\mathbf{g}_1 + x_{i2}\mathbf{g}_2 + \dots + x_{ik_1}\mathbf{g}_{k_1}) = \\
&= x_{i1}\mathcal{C}(\mathbf{g}_1) + x_{i2}\mathcal{C}(\mathbf{g}_2) + \dots + x_{ik_1}\mathcal{C}(\mathbf{g}_{k_1}) = \\
&= x_{i1}\gamma_1\mathbf{g}_1 + x_{i2}\gamma_2\mathbf{g}_2 + \dots + x_{ik_1}\gamma_{k_1}\mathbf{g}_{k_1} = \\
&= x_{i1}\sqrt{\alpha_1}\,\mathbf{g}_1 + x_{i2}\sqrt{\alpha_1}\,\mathbf{g}_2 + \dots + x_{ik_1}\sqrt{\alpha_1}\,\mathbf{g}_{k_1} = \\
&= \sqrt{\alpha_1}(x_{i1}\mathbf{g}_1 + x_{i2}\mathbf{g}_2 + \dots + x_{ik_1}\mathbf{g}_{k_1}) = \sqrt{\alpha_1}\,\mathbf{f}_i.
\end{aligned}$$

Это означает, что

$$C_{11} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_1} \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha_1}E,$$

где E — единичная матрица порядка k_1. Аналогично проверяется, что, для всякого $i = 2, \dots, s$, $C_{ii} = \sqrt{\alpha_i}E$, где E — единичная матрица порядка k_i. Следовательно, $C = B$, и потому $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. □

Доказательство леммы о метрически равных операторах. Из условия вытекает, что для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполнено равенство $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{x})$. Отсюда вытекает, в частности, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т. е. что $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{Ker} \mathcal{B}$. Положим $\dim V = n$. По теореме о ранге и дефекте

$$r(\mathcal{A}) = n - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = n - \dim \operatorname{Ker} B = r(\mathcal{B}),$$

т. е. $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{B}$. Положим $r = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{B}$. Выберем в $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ некоторый ортонормированный базис $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r$. Поскольку $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, для всякого $i = 1, 2, \ldots, r$ существует вектор $\mathbf{g}_i \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{g}_i) = \mathbf{f}_i$. Положим $\mathbf{h}_i = \mathcal{B}(\mathbf{g}_i)$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда

$$\mathbf{h}_i \mathbf{h}_j = \mathcal{B}(\mathbf{g}_i) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{g}_j) = \mathcal{A}(\mathbf{g}_i) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{g}_j) = \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В частности, векторы $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_r$ ортогональны и отличны от $\mathbf{0}$ (поскольку $|\mathbf{h}_i| = 1$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$), а значит, линейно независимы (см. теорему 13.1). Их число равно размерности пространства $\operatorname{Im} \mathcal{B}$. Кроме того, их длины равны 1. Следовательно, они образуют ортонормированный базис пространства $\operatorname{Im} \mathcal{B}$.

Доказательство леммы о метрически равных операторах (2)

Пусть $\mathbf{f}_{r+1}, \ldots, \mathbf{f}_n$ — ортонормированный базис пространства $(\operatorname{Im}\mathcal{A})^\perp$, а $\mathbf{h}_{r+1}, \ldots, \mathbf{h}_n$ — ортонормированный базис пространства $(\operatorname{Im}\mathcal{B})^\perp$. Тогда $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ и $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$ — два ортонормированных базиса пространства V. В силу предложения 19.1 оператор $\mathcal{C}$, определяемый правилом $\mathcal{C}(\mathbf{h}_i) = \mathbf{f}_i$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$, будет изометрическим.

Действие операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ на векторы $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_i$, $\mathbf{h}_i$ можно проиллюстрировать следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
 & g_i \arrow[dl, "\mathcal{B}"'] \arrow[dr, "\mathcal{A}"] & \\
h_i \arrow[rr, "\mathcal{C}"'] & & f_i
\end{tikzcd}$$

Покажем, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. Пусть $\mathbf{x} \in V$. Разложим вектор $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ по базису $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r$ пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{f}_r$. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{f}_r = \alpha_1\mathcal{A}(\mathbf{g}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\mathbf{g}_2) + \cdots + \alpha_r\mathcal{A}(\mathbf{g}_r) =$$
$$= \mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{g}_1 + \alpha_2\mathbf{g}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{g}_r).$$

Полагая $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{g}_1 + \alpha_2\mathbf{g}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{g}_r$, имеем $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$, и потому

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Таким образом, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

Поскольку $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$, получаем, что $\mathcal{B}(\mathbf{x}) - \mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, и потому

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{y}) &= \mathcal{B}(\alpha_1\mathbf{g}_1 + \alpha_2\mathbf{g}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{g}_r) = \\ &= \alpha_1\mathcal{B}(\mathbf{g}_1) + \alpha_2\mathcal{B}(\mathbf{g}_2) + \cdots + \alpha_r\mathcal{B}(\mathbf{g}_r) = \\ &= \alpha_1\mathbf{h}_1 + \alpha_2\mathbf{h}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{h}_r.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}\mathcal{C})(\mathbf{x}) &= \mathcal{C}\big(\mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{C}(\alpha_1\mathbf{h}_1 + \alpha_2\mathbf{h}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{h}_r) = \\ &= \alpha_1\mathcal{C}(\mathbf{h}_1) + \alpha_2\mathcal{C}(\mathbf{h}_2) + \cdots + \alpha_r\mathcal{C}(\mathbf{h}_r) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{f}_r.\end{aligned}$$

Мы видим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_r\mathbf{f}_r = (\mathcal{B}\mathcal{C})(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, т. е. $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. $\square$

Тем самым, мы завершили доказательство теоремы 20.1. $\square$