§ 19. Изометрические операторы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Изометрические операторы (1)

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V называется *изометрическим*, если $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Изометрические операторы сохраняют скалярное произведение. Отсюда автоматически вытекает, что изометрические операторы сохраняют длины векторов, так как $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \sqrt{\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x})} = |\mathcal{A}(\mathbf{x})|$. Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Теорема 19.1

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V является изометрическим тогда и только тогда, когда $|\mathbf{x}| = |\mathcal{A}(\mathbf{x})|$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. *Необходимость* доказана перед формулировкой теоремы.

Достаточность. По условию $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x})$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$. Следовательно, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{x}\mathbf{x}+\mathbf{x}\mathbf{y}+\mathbf{y}\mathbf{x}+\mathbf{y}\mathbf{y}=\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y})\big)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y})\big)=$$
$$=\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})+\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})=$$
$$=\mathbf{x}\mathbf{x}+\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})+\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathbf{y}\mathbf{y}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}\mathbf{y}+\mathbf{y}\mathbf{x}=\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})+\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{x}).\tag{1}$$

Если пространство V евклидово, то (1) равносильно равенству $2\mathbf{x}\mathbf{y}=2\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})$, откуда $\mathbf{x}\mathbf{y}=\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что пространство V унитарно. Подставим в (1) вместо $\mathbf{x}$ вектор $i\mathbf{x}$. Поскольку

$$(i\mathbf{x})\mathbf{y}+\mathbf{y}(i\mathbf{x})=i\mathbf{x}\mathbf{y}+\overline{i}\,\mathbf{y}\mathbf{x}=i\mathbf{x}\mathbf{y}-i\mathbf{y}\mathbf{x},\quad \text{а}$$
$$\mathcal{A}(i\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})+\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(i\mathbf{x})=i\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})+\overline{i}\,\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{x})=$$
$$=i\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})-i\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{x}),$$

имеем $i\mathbf{x}\mathbf{y}-i\mathbf{y}\mathbf{x}=i\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})-i\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{x})$. Сократив на i, получаем, что

$$\mathbf{x}\mathbf{y}-\mathbf{y}\mathbf{x}=\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{x}).\tag{2}$$

Складывая (1) и (2), получаем $2\mathbf{x}\mathbf{y}=2\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})$, откуда $\mathbf{x}\mathbf{y}=\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})$. $\square$

Примеры изометрических операторов. Сохранение углов изометрическими операторами

Теорема 19.1 показывает, что всевозможные повороты и симметрии в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ являются изометрическими операторами. Более того, как мы увидим ниже, действие любого симметрического оператора в евклидовом пространстве в некотором смысле сводится к поворотам и симметриям.

Из определения изометрического оператора и определения угла между векторами непосредственно вытекает

Замечание 19.1

Если $\mathcal{A}$ — изометрический оператор в евклидовом пространстве V, а $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, то угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равен углу между векторами $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{y})$. □

Аналогичное утверждение об унитарных пространствах не имеет смысла, поскольку в унитарных пространствах угол между векторами не определен.

Предложение 19.1

Для линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V следующие условия эквивалентны:

а) *$\mathcal{A}$ — изометрический оператор;*

б) *$\mathcal{A}$ переводит произвольный ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис;*

в) *$\mathcal{A}$ переводит некоторый ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис.*

Доказательство. а) $\Longrightarrow$ б). Пусть $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — ортонормированный базис пространства V. Из теоремы 19.1 вытекает, что $|\mathcal{A}(\mathbf{f}_i)| = |\mathbf{f}_i| = 1$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$, а из определения изометрического оператора следует, что $\mathcal{A}(\mathbf{f}_i) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i\mathbf{f}_j = 0$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Следовательно, $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1), \mathcal{A}(\mathbf{f}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{f}_n)$ — ортонормированный набор ненулевых векторов. Из теоремы 13.1 вытекает, что векторы $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1), \mathcal{A}(\mathbf{f}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{f}_n)$ линейно независимы. Число этих векторов равно размерности пространства V, и потому они образуют его базис.

Импликация б) $\Longrightarrow$ в) очевидна.

в) $\Longrightarrow$ а) Пусть F: $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ — ортонормированный базис в V такой, что набор векторов G: $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{f}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{f}_n)$ тоже является ортонормированным базисом в V. Разложим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ по базису F: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n$. Тогда разложение вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ по базису G имеет вид: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{f}_n)$. Вычисляя $\mathbf{xx}$ по координатам вектора $\mathbf{x}$ в базисе F и $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x})$ по координатам вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе G, получим одно и то же выражение $x_1\,\overline{x_1} + x_2\,\overline{x_2} + \cdots + x_n\,\overline{x_n}$. Следовательно, $\mathbf{xx} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x})$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ изометричен. $\square$

Предложение 19.2 (критерий изометричности оператора)

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V является изометрическим оператором тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{A}$ — изометрический оператор в V и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*\big(\mathcal{A}(\mathbf{y})\big) = \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathbf{y}).$$

Поскольку равенство $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathbf{y})$ выполнено для любого вектора $\mathbf{x} \in V$, из ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением вытекает, что $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$. Поскольку это равенство выполнено для любого вектора $\mathbf{y} \in V$, получаем, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*\big(\mathcal{A}(\mathbf{y})\big) = (\mathcal{A}^*)^*(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}).$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ — изометрический оператор. □

Из критерия изометричности оператора вытекает

Следствие 19.1

Всякий изометрический оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V является нормальным оператором.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — изометрический оператор. В силу предложения 19.2 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$, и потому $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. □

Для дальнейшего нам понадобится следующая конструкция. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в евклидовом пространстве V, имеющий в некотором ортонормированном базисе F этого пространства матрицу A. Обозначим через U унитарное пространство такое, что $\dim U = \dim V$. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис G пространства U и обозначим через $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ линейный оператор в U, имеющий в этом базисе матрицу A. Оператор $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* оператора $\mathcal{A}$. Учитывая, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе F совпадает с матрицей оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в базисе G, получаем следующее утверждение.

Замечание 19.2

Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ имеют один и тот же характеристический многочлен. $\square$

Отметим еще одно следствие критерия изометричности оператора.

Следствие 19.2

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве изометричен тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ изометричен.

Доказательство. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе того пространства, в котором действует этот оператор. По определению оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, его матрица в некотором ортонормированном базисе того пространства, в котором действует этот оператор, равна A. Из критерия изометричности оператора и леммы 7.1 теперь вытекает, что изометричность операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ эквивалентна одному и тому же равенству $A^*A = E$. $\square$

Лемма 19.1

Если λ — корень характеристического уравнения изометрического оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением, то $|\lambda| = 1$.

Доказательство. В силу замечания 19.2 операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ имеют один и тот же характеристический многочлен, а в силу следствия 19.2 оператор $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ изометричен. Положим

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \mathcal{A}, & \text{если } \mathcal{A} \text{ действует в унитарном пространстве,} \\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}, & \text{если } \mathcal{A} \text{ действует в евклидовом пространстве.} \end{cases}$$

Тогда, в любом случае, оператор $\mathcal{B}$ изометричен, а λ — его собственное значение. Обозначим через $\mathbf{x}$ собственный вектор оператора $\mathcal{B}$, соответствующий собственному значению λ. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\,\overline{\lambda}\,\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

Следовательно, $\lambda\overline{\lambda} = 1$, откуда $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$. $\square$

Как мы увидим ниже, справедливо и утверждение, обратное к доказанной только что лемме.

Определения

Изометрический оператор в унитарном пространстве называется *унитарным*, а изометрический оператор в евклидовом пространстве называется *ортогональным*.

Сравнивая эти определения с определениями унитарных и ортогональных матриц, мы видим, что

- *унитарные [ортогональные] матрицы — это матрицы унитарных [ортогональных] операторов в унитарном [евклидовом] пространстве.*

Теорема 19.2

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве V унитарен тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис F, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все ее диагональные элементы по модулю равны 1.

Доказательство. *Необходимость.* В силу теоремы 17.1 существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна. На диагонали в этой матрице стоят собственные значения оператора (см. доказательство теоремы 9.3). В силу леммы 19.1 эти собственные значения по модулю равны 1.

Достаточность. Обозначим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе F через A. Тогда матрица $\mathcal{A}^*$ в базисе F равна $A^* = \overline{A^\top}$, и потому также диагональна. Матрица AA^* также диагональна, причем на ее главной диагонали стоят числа вида $\lambda\overline{\lambda}$, где λ — число, стоящее на главной диагонали матрицы A. Поскольку $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$, получаем, что $AA^* = E$. Следовательно, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$. Из критерия изометричности оператора вытекает, что $\mathcal{A}$ — унитарный оператор. $\square$

Матрица ортогонального оператора (1)

Теорема 19.3

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V ортогонален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис F, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ клеточно-диагональна, причем каждый диагональная клетка имеет либо вид (r), где $r \in \{1, -1\}$, либо вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3}$$

для некоторого φ.

Доказательство. *Необходимость.* В силу теоремы 17.2 существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ клеточно-диагональна, причем каждая диагональная клетка имеет либо вид (r) для некоторого r, либо вид

$$r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

для некоторых r и φ.

Из доказательства теорем 17.1 и 17.2 видно, что в первом случае r — собственное значение оператора $\mathcal{A}$, а во втором r — модуль некоторого корня характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$. Остается сослаться на следствие 19.2 и лемму 19.1.

Достаточность. Обозначим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе F через A. Тогда матрица $\mathcal{A}^*$ в базисе F равна $\overline{A^\top}$. Каждая клетка клеточно-диагональной матрицы из формулировки теоремы при умножении на транспонированную матрицу дает единичную матрицу. В самом деле, если $r \in \{1, -1\}$, то $(r) \cdot (r) = (1)$, а если

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

то

$$AA^\top = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$. Из критерия изометричности оператора вытекает, что $\mathcal{A}$ — ортогональный оператор. $\square$

Пусть $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — тот ортонормированный базис пространства V, в котором матрица A ортогонального оператора $\mathcal{A}$ имеет вид, указанный в теореме 19.3. Если клетка матрицы A имеет вид (r) и расположена, скажем, в k-м столбце матрицы A, то ограничение оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $\langle \mathbf{f}_k \rangle$ пространства V является либо тождественным оператором (если $r = 1$), либо оператором $-\mathcal{E}$ (если $r = -1$). Во втором случае ограничение $\mathcal{A}$ на указанное подпространство является симметрией. Предположим теперь, что клетка матрицы A имеет вид (3) для некоторого φ и расположена, скажем, в k-м и $(k+1)$-м столбцах матрицы A. Тогда подпространство $\langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_{k+1} \rangle$ пространства V изоморфно $\mathbb{R}^2$, и ограничение оператора $\mathcal{A}$ на это подпространство является поворотом на угол φ (последнее вытекает из формул поворота системы координат на плоскости на угол φ, известных из курса аналитической геометрии). Таким образом, как уже отмечалось выше, действие изометрического оператора в евклидовом пространстве сводится к симметриям и поворотам.

Предложение 19.3

Нормальный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V является изометрическим оператором тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны 1.

Доказательство. *Необходимость* доказана выше (см. лемму 19.1).

Достаточность. Предположим сначала, что пространство V унитарно. В силу теоремы 17.1 существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна. Числа, стоящие на главной диагонали этой матрицы, — это в точности все собственные значения оператора $\mathcal{A}$. По условию модули этих чисел равны 1. Согласно теореме 19.2 оператор $\mathcal{A}$ изометричен.

Пусть теперь пространство V евклидово. В силу теоремы 17.1 существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица A оператора $\mathcal{A}$ клеточно-диагональна, причем каждая диагональная клетка имеет либо вид (r), либо вид

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

для некоторых r и φ. Как видно из доказательства теоремы 17.2, в первом случае r — собственное значение оператора $\mathcal{A}$, а во втором r — модуль некоторого корня характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$. В силу леммы 19.1 в первом случае $|r| = 1$, а во втором $r = 1$. Согласно теореме 19.2 оператор $\mathcal{A}$ изометричен. $\square$