§ 18. Самосопряженные операторы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V называется *самосопряженным*, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, т. е. если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ выполнено равенство $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y})$.

Очевидно, что всякий самосопряженный оператор нормален.

Приведем пример самосопряженного оператора. Пусть S — подпространство пространства со скалярным произведением V. В силу теоремы 13.5 $V = S \oplus S^{\perp}$. Оператор проектирования на S параллельно $S^{\perp}$ называется *оператором ортогонального проектирования на подпространство* S и обозначается через $\mathcal{P}_S$. Иными словами, оператор $\mathcal{P}_S$ ставит в соответствие каждому вектору из V его ортогональную проекцию на S. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда, с одной стороны,

$$\mathcal{P}_S(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_{\perp}(\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{y}^{\perp}) = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}^{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + 0 = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp},$$

а с другой, —

$$\mathbf{x} \cdot \mathcal{P}_S(\mathbf{y}) = (\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp})\mathbf{y}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp}\mathbf{y}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + 0 = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp}.$$

Следовательно, $\mathcal{P}_S(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{P}_S(\mathbf{y})$, т. е. $\mathcal{P}_S$ — самосопряженный оператор.

Матрица самосопряженного оператора (1)

Определение

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ называется *эрмитовой*, если $A = A^*$.

Предложение 18.1

Для произвольного линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V следующие условия эквивалентны:

а) *$\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор;*

б) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе пространства V эрмитова;*

в) *существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ эрмитова.*

Доказательство. Импликация а)$\Longrightarrow$б) вытекает из следствия 16.3, а импликация б)$\Longrightarrow$в) очевидна. Осталось доказать импликацию в)$\Longrightarrow$а).

в) $\Longrightarrow$ а) Пусть P — тот ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ эрмитова. Обозначим эту матрицу через A. Тогда $A = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top$, и потому $A^\top = (\overline{A}^\top)^\top = \overline{A}$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= [\mathcal{A}(\mathbf{x})]_P^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} && \text{по предложению 12.2} \\
&= [\mathbf{x}]_P^\top \cdot A^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} && \text{по формуле (3) из § 6} \\
&= [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{A} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} && \text{так как } A^\top = \overline{A} \\
&= [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{A \cdot [\mathbf{y}]_P} && \text{так как } \overline{B} \cdot \overline{C} = \overline{BC} \text{ для любых матриц } B \text{ и } C \\
&= [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{[\mathcal{A}(\mathbf{y})]_P} && \text{по формуле (2) из § 6} \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}) && \text{по предложению 12.2.}
\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y})$, и потому оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. $\square$

Матрица самосопряженного оператора в евклидовом пространстве

Определение

Квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A = A^{\top}$.

Очевидно, что квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$ эрмитова тогда и только тогда, когда она является симметрической матрицей. Поэтому из предложения 18.1 немедленно вытекает

Следствие 18.1

Для произвольного линейного оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V следующие условия эквивалентны:

а) *$\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор;*

б) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе пространства V симметрична;*

в) *существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ симметрична.* □

Теорема 18.1

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве V со скалярным произведением является самосопряженным тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна, причем все числа на ее главной диагонали являются действительными.

Доказательство. *Достаточность.* Очевидно, что диагональная матрица, в которой все числа на главной диагонали действительны, эрмитова. Поэтому достаточность непосредственно вытекает из предложения 18.1.

Необходимость. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 18.1

Если $\mathcal{A}$ — самосопряженный линейный оператор в пространстве V со скалярным произведением, то все корни его характеристического уравнения являются действительными числами.

Доказательство. Пусть λ — корень характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$. Зафиксируем некоторый базис P пространства V и обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда выполнено равенство $|A - \lambda E| = 0$. В силу следствия 9.3 из курса «Основы алгебры» система линейных уравнений $(A - \lambda E)X = O$ имеет ненулевое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через $\mathbf{x}$ вектор с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисе P. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Следовательно,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{xx} \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda} \cdot \mathbf{xx}.$$

Поскольку оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x})$, и потому $\lambda(\mathbf{xx}) = \overline{\lambda}(\mathbf{xx})$, т. е. $(\lambda - \overline{\lambda}) \cdot \mathbf{xx} = 0$. Но $\mathbf{xx} \neq 0$, поскольку $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, $\lambda = \overline{\lambda}$, т. е. $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Необходимость в теореме 18.1 в случае унитарного пространства непосредственно вытекает из леммы 18.1 и теоремы 17.1. Предположим теперь, что V — евклидово пространство. В силу теоремы 17.2 в V существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ клеточно-диагональна, причем каждая ее диагональная клетка либо имеет порядок 1, либо является матрицей вида

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

для некоторых $r \in \mathbb{R}$ и φ. Из доказательства теоремы 17.2 вытекает, что всякая клетка второго типа соответствует некоторому корню характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$, который не является действительным числом. В силу леммы 18.1 в случае самосопряженного оператора таких клеток не возникает. Таким образом, существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна. Ясно, что на диагонали этой матрицы стоят корни характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$. В силу леммы 18.1 все они являются действительными числами. $\square$

Предложение 18.2

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ эрмитова тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица T и диагональная матрица D с действительными числами на главной диагонали такие, что $D = T^*AT$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A — эрмитова матрица, P — ортонормированный базис унитарного пространства V, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, имеющий в базисе P матрицу A. Из предложения 18.1 вытекает, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. В силу теоремы 18.1 в пространстве V существует ортонормированный базис Q, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна с действительными числами на главной диагонали. Обозначим эту матрицу через D и положим $T = T_{PQ}$. Тогда $D = T^{-1}AT$, а из предложения 13.2 вытекает, что $T^{-1} = T^*$. Следовательно, $D = T^*AT$.

Достаточность. Пусть $D = T^*AT$, где матрица T унитарна, а матрица D — диагональная с действительными числами на главной диагонали. По определению унитарной матрицы $T^{-1} = T^* = \overline{T^\top}$. Следовательно, $A = (T^*)^{-1}DT^{-1} = (T^{-1})^{-1}DT^{-1} = TDT^{-1}$. Учитывая, что $\overline{D^\top} = D$, имеем

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{(TDT^{-1})^\top} = \overline{(T^{-1})^\top D^\top T^\top} = \overline{(T^{-1})^\top} \cdot \overline{D^\top} \cdot \overline{T^\top} =$$

$$= \left(\overline{T^{-1}}\right)^\top DT^{-1} = \left(\overline{\overline{T^\top}}\right)^\top DT^{-1} = (T^\top)^\top DT^{-1} = TDT^{-1} = A.$$

Следовательно, матрица A эрмитова. □

Заменив в доказательстве этого утверждения ссылку на предложение 13.2 ссылкой на следствие 13.3, мы получаем

Следствие 18.2

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{R}$ является симметрической тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D такие, что $D = T^\top AT$. □