§ 17. Нормальные операторы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V называется *нормальным*, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Лемма 17.1

Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор в пространстве со скалярным произведением. Если вектор $\mathbf{x}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ, то он является собственным вектором оператора $\mathcal{A}^*$, соответствующим собственному значению $\overline{\lambda}$.

Доказательство. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$. Используя свойства сопряженного оператора и очевидное равенство $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$, имеем

$$\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^* = \mathcal{A}^* - (\lambda\mathcal{E})^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\,\mathcal{E}^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\,\mathcal{E}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\,\mathcal{E}. \qquad (1)$$

Проверим теперь, что оператор $\mathcal{B}$ нормален, т. е. что

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*\mathcal{B}. \qquad (2)$$

Собственные векторы нормальных операторов (2)

В самом деле, используя равенство (1), получаем, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}\mathcal{B}^*)(\mathbf{x}) &= \mathcal{B}^*\big(\mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = (\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x})\big) = \\
&= (\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}\big) = \\
&= \mathcal{A}^*\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}\big) - \overline{\lambda}\mathcal{E}\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}\big) = \\
&= \mathcal{A}^*\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) - \mathcal{A}^*(\lambda\mathbf{x}) - \overline{\lambda}\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}\big) = \\
&= (\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathbf{x}) - \lambda\mathcal{A}^*(\mathbf{x}) - \overline{\lambda}\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \overline{\lambda}\,\lambda\mathbf{x} \\
\text{и}\quad (\mathcal{B}^*\mathcal{B})(\mathbf{x}) &= \mathcal{B}\big(\mathcal{B}^*(\mathbf{x})\big) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\big((\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})(\mathbf{x})\big) = \\
&= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\big(\mathcal{A}^*(\mathbf{x}) - \overline{\lambda}\,\mathbf{x}\big) = \\
&= \mathcal{A}\big(\mathcal{A}^*(\mathbf{x}) - \overline{\lambda}\,\mathbf{x}\big) - \lambda\mathcal{E}\big(\mathcal{A}^*(\mathbf{x}) - \overline{\lambda}\,\mathbf{x}\big) = \\
&= \mathcal{A}\big(\mathcal{A}^*(\mathbf{x})\big) - \mathcal{A}(\overline{\lambda}\,\mathbf{x}) - \lambda\big(\mathcal{A}^*(\mathbf{x}) - \overline{\lambda}\,\mathbf{x}\big) = \\
&= (\mathcal{A}^*\mathcal{A})(\mathbf{x}) - \overline{\lambda}\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \lambda\mathcal{A}^*(\mathbf{x}) + \lambda\,\overline{\lambda}\,\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения и учитывая, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, получаем равенство (2).

Собственные векторы нормальных операторов (3)

Используя равенство (2) и тот факт, что $(\mathcal{B}^*)^* = \mathcal{B}$, имеем

$$\mathcal{B}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{B}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}(\mathcal{B}^*(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}^*(\mathcal{B}(\mathbf{x})) = (\mathcal{B}^*)^*(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{x}) =$$
$$= \mathcal{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{x}) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Итак, $\mathcal{B}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{B}^*(\mathbf{x}) = 0$. Это равносильно тому, что $\mathcal{B}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. В силу (1) имеем $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\,\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т. е. $\mathcal{A}^*(\mathbf{x}) = \overline{\lambda}\,\mathbf{x}$. □

Следствие 17.1

Собственные векторы нормального оператора $\mathcal{A}$, соответствующие его различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — собственные векторы линейного оператора, относящиеся к его различным собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно. В силу леммы 17.1 вектор $\mathbf{y}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}^*$, соответствующим собственному значению $\overline{\lambda_2}$. С учетом этого факта, имеем

$$\lambda_1(\mathbf{xy}) = (\lambda_1\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\overline{\lambda_2}\,\mathbf{y}) = \overline{\overline{\lambda_2}}(\mathbf{xy}) = \lambda_2(\mathbf{xy}),$$

т. е. $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{xy}) = 0$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, отсюда вытекает, что $\mathbf{xy} = 0$. □

В случае унитарного пространства существует базис, в котором матрица нормального оператора устроена совсем просто.

Теорема 17.1

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис F, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна.

Доказательство. *Достаточность.* Обозначим матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в базисе F через A и A' соответственно. По условию, матрица A диагональна. В силу следствия 16.2 $A' = A^* = \overline{A^\top}$. Следовательно, матрица A' тоже диагональна. Из диагональности матриц A и A' вытекает, что $AA' = A'A$. С учетом леммы 7.1, получаем, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ нормален.

Необходимость будем доказывать индукцией по $\dim V$.

База индукции. Если $\dim V = 1$, то матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе является квадратной матрицей порядка 1, а всякая квадратная матрица порядка 1 диагональна.

Матрица нормального оператора в унитарном пространстве (2)

Шаг индукции. Пусть теперь $\dim V > 1$. В силу основной теоремы алгебры характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ имеет в поле $\mathbb{C}$ по крайней мере один корень. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет по крайней мере одно собственное значение, а значит и по крайней мере один собственный вектор.

Пусть $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, а $\mathbf{f}_1$ — орт вектора $\mathbf{x}$. Ясно, что $\mathbf{f}_1$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$. По лемме 17.1, $\mathbf{f}_1$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}^*$. Положим $S = \langle \mathbf{f}_1 \rangle$. Пусть $\dim V = n$. Тогда $S^\perp$ — подпространство в V и $\dim S^\perp = \dim V - \dim S = n - 1$.

В силу выбора вектора $\mathbf{f}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = \lambda \mathbf{f}_1$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\mathbf{a} \in S$, то $\mathbf{a} = t\mathbf{f}_1$ для некоторого $t \in \mathbb{C}$, и потому

$$\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \mathcal{A}(t\mathbf{f}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = t(\lambda \mathbf{f}_1) = (t\lambda)\mathbf{f}_1 \in S.$$

Мы видим, что S инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Аналогично проверяется, что S инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$. В силу леммы 16.1 подпространство $S^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Следовательно, ограничения этих операторов на S и $S^\perp$ являются линейными операторами на S и $S^\perp$ соответственно. Из перестановочности операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ на V вытекает перестановочность их ограничений на $S^\perp$.

Поскольку $\dim S^{\perp} < \dim V$, по предположению индукции в $S^{\perp}$ существует ортонормированный базис $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, в котором матрица ограничения оператора $\mathcal{A}$ на $S^{\perp}$ диагональна. Поскольку $V = S \oplus S^{\perp}$, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — базис пространства V. Из следствия 17.1 вытекает, что этот базис ортонормирован. Из п. 1) предложения 10.1 вытекает, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе диагональна. $\square$

Из теоремы 17.1 вытекает, что для любого нормального оператора в унитарном пространстве существует базис пространства, состоящий из собственных векторов этого оператора (см. теорему 9.3). В случае евклидова пространства аналог этого утверждения места не имеет. В самом деле обозначим через $\mathcal{U}$ оператор поворота плоскости (т. е. пространства $\mathbb{R}^2$) вокруг начала координат на угол α такой, что $0 < \alpha < \pi$. Как известно из курса аналитической геометрии, его матрица в стандартном базисе плоскости имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Простейшие вычисления показывают, что $UU^\top = U^\top U = E$. В частности, оператор $\mathcal{U}$ нормален. В тоже время, $|U - tE| = 1 - (2\cos\alpha)t + t^2$. Дискриминант этого квадратного трехчлена равен $D = 4(\cos^2\alpha - 1)$. Поскольку $0 < \alpha < \pi$, $\cos\alpha \neq \pm 1$, и потому $D < 0$. Таким образом, характеристический многочлен оператора $\mathcal{U}$ не имеет действительных корней. Следовательно, этот оператор не имеет собственных значений, и тем более собственных векторов. Отметим, что отсутствие собственных векторов у оператора поворота на угол, не кратный π, очевидно и из геометрических соображений: ясно, что если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $\vec{x} \nparallel \mathcal{U}(\vec{x})$, и потому равенство $\mathcal{U}(\vec{x}) = t\vec{x}$ не выполняется ни для какого $t \in \mathbb{R}$.

Матрица нормального оператора в евклидовом пространстве (1)

Теорема 17.2

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис F, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ клеточно-диагональна, причем каждая диагональная клетка либо имеет порядок 1, либо имеет вид

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3}$$

для некоторых $r \in \mathbb{R}$ и φ.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть F — тот ортонормированный базис, существование которого утверждается в теореме. Обозначим матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в базисе F через A и A' соответственно. В силу следствия 16.2 $A' = A^\top$. Следовательно, матрица A' клеточно-диагональна, причем каждая диагональная клетка либо имеет порядок 1, либо имеет вид

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ясно, что квадратные матрицы порядка 1 перестановочны. Всякая матрица вида (3) перестановочна с транспонированной к ней, поскольку каждое из произведений

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

равно единичной матрице порядка 2. Отсюда вытекает вытекает, что $AA' = A'A$. С учетом леммы 7.1, получаем, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ нормален.

Необходимость будем доказывать индукцией по $\dim V$.

База индукции. Если $\dim V = 1$, то матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе является квадратной матрицей порядка 1, а всякая квадратная матрица порядка 1 диагональна.

Шаг индукции. Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

Случай 1: у оператора $\mathcal{A}$ есть хотя бы одно собственное значение (другими словами, характеристическое уравнение оператора $\mathcal{A}$ имеет хотя бы один действительный корень). В этом случае доказательство почти дословно совпадает с доказательством необходимости в теореме 17.1.

В самом деле, пусть $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, а $\mathbf{f}_1$ — орт вектора $\mathbf{x}$. Ясно, что $\mathbf{f}_1$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$. По лемме 17.1, $\mathbf{f}_1$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}^*$. Положим $S = \langle \mathbf{f}_1 \rangle$. Тогда $S^\perp$ — подпространство в V и $\dim S^\perp = \dim V - \dim S = n - 1$. Поскольку подпространство S состоит из векторов вида $t\mathbf{f}_1$, где $t \in \mathbb{R}$, это подпространство инвариантно относительно любого линейного оператора, в частности, относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. В силу лемм 16.1 и 17.1 подпространство $S^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Следовательно, ограничения этих операторов на S и $S^\perp$ являются линейными операторами на S и $S^\perp$ соответственно. Из перестановочности операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ на V вытекает перестановочность их ограничений на $S^\perp$. Поскольку $\dim S^\perp < \dim V$, по предположению индукции в $S^\perp$ существует ортонормированный базис $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, в котором матрица ограничения оператора $\mathcal{A}$ на $S^\perp$ имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Поскольку $V = S \oplus S^{\perp}$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ — базис пространства V. Из следствия 17.1 вытекает, что этот базис ортонормирован. Из п. 1) предложения 10.1 вытекает, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе получается из матрицы ограничения оператора $\mathcal{A}$ на $S^{\perp}$ добавлением одной диагональной клетки размера 1. Следовательно, матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Случай 2: у оператора $\mathcal{A}$ нет собственных значений. В этом случае характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами. Рассмотрим один из этих квадратных трехчленов. Поскольку его коэффициентами являются действительные числа, он имеет комплексные корни вида $z = s + ti$ и $\overline{z} = s - ti$ для некоторых $s, t \in \mathbb{R}$. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ пространства V и обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Матрица нормального оператора в евклидовом пространстве (5)

Тогда $A^* = A^\top$ (так как A — матрица над полем $\mathbb{R}$) и $AA^\top = A^\top A$ (так как оператор $\mathcal{A}$ нормален). Следовательно, $AA^* = A^*A$. По определению оператора $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, его матрица в некотором базисе равна A. Учитывая лемму 7.1, получаем, что $\mathcal{A}_\mathbb{C}\mathcal{A}_\mathbb{C}^* = \mathcal{A}_\mathbb{C}^*\mathcal{A}_\mathbb{C}$, т. е. оператор $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ нормален. Пусть U — то унитарное пространство, в котором действует оператор $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, а $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ — тот ортонормированный базис пространства U, в котором оператор $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ имеет матрицу A. Определим отображение ψ из V в U правилом: если $\mathbf{x} \in V$ и $\mathbf{x} = t_1\mathbf{f}_1 + t_2\mathbf{f}_2 + \cdots + t_n\mathbf{f}_n$, то $\psi(\mathbf{x}) = t_1\mathbf{g}_1 + t_2\mathbf{g}_2 + \cdots + t_n\mathbf{g}_n$. Ясно, что ψ — изоморфное вложение V в U. Поэтому мы можем считать, что $V \subset U$. При этом операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ действуют на V одинаково. Характеристические многочлены операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ совпадают. Следовательно, z и $\overline{z}$ — собственные значения оператора $\mathcal{A}_\mathbb{C}$.

Пусть $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, соответствующий z. Тогда $AX = zX$, где X — столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Сопрягая обе части этого равенства и учитывая, что $\overline{A} = A$, получаем, что $\overline{AX} = \overline{A} \cdot \overline{X} = A\overline{X}$ и $\overline{zX} = \overline{z}\,\overline{X}$, откуда $A\overline{X} = \overline{z}\,\overline{X}$. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Учитывая, что $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — векторы из евклидова пространства V, имеем

$$\overline{x} = \overline{x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n} = \overline{x}_1\overline{\mathbf{f}}_1 + \overline{x}_2\overline{\mathbf{f}}_2 + \cdots + \overline{x}_n\overline{\mathbf{f}}_n = \overline{x}_1\mathbf{f}_1 + \overline{x}_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \overline{x}_n\mathbf{f}_n.$$

Следовательно, $\overline{X}$ — это столбец координат вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$. Это означает, что $\overline{\mathbf{x}}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, соответствующий собственному значению $\overline{z}$.

Пусть $\mathbf{x} = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \dots, a_n + b_n i)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$. Положим $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Ясно, что $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}}}{2} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}}{2i}.$$

Учитывая, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ действуют на V одинаково, $z = s + ti$ и $\overline{z} = s - ti$, имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\overline{\mathbf{x}})) = \frac{1}{2}(z\mathbf{x} + \overline{z}\,\overline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}((s+ti)\mathbf{x} + (s-ti)\overline{\mathbf{x}}) =$$
$$= \frac{1}{2}s(\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}ti(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}s(\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2i}ti^2(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) =$$
$$= \frac{1}{2}s(\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2i}t(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = s\mathbf{a} - t\mathbf{b}.$$

Аналогично,

$$\mathcal{A}(\mathbf{b}) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2i}\big(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\overline{\mathbf{x}})\big) = \frac{1}{2i}(z\mathbf{x} - \overline{z}\,\overline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}\big((s+ti)\mathbf{x} - (s-ti)\overline{\mathbf{x}}\big) = \\ = \frac{1}{2i}s(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}t(\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}}) = t\mathbf{a} + s\mathbf{b}.$$

Мы видим, в частности, что $\mathcal{A}(\mathbf{a}), \mathcal{A}(\mathbf{b}) \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Следовательно, подпространство S пространства V, порожденное векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Из леммы 17.1 вытекает, что $\mathbf{x}$ и $\overline{\mathbf{x}}$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}^*_{\mathbb{C}}$, соответствующие собственным значениям $\overline{z}$ и z соответственно. Отсюда легко вытекает, что подпространство S инвариантно и относительно оператора $\mathcal{A}^*$. В силу леммы 16.1 подпространство $S^{\perp}$ также инвариантно относительно операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Ограничения операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ на $S^{\perp}$ перестановочны, и потому ограничение $\mathcal{A}$ на $S^{\perp}$ — нормальный оператор. Поскольку

$$\dim S^{\perp} = \dim V - \dim S = n - 2 < \dim V,$$

в $S^{\perp}$ существует ортонормированный базис $\mathbf{f}_3, \ldots, \mathbf{f}_n$, в котором матрица ограничения $\mathcal{A}$ на $S^{\perp}$ имеет клеточно-диагональный вид, указанный в формулировке теоремы.

Поскольку $V = S \oplus S^{\perp}$, в силу п. 1) предложения 10.1 остается построить ортонормированный базис пространства S, в котором матрица ограничения $\mathcal{A}$ на S была бы квадратной матрицей порядка 2 и имела вид, указанный в формулировке теоремы. Векторы $\mathbf{x}$ и $\overline{\mathbf{x}}$ являются собственными векторами нормального оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, соответствующими его различным собственным значениям z и $\overline{z}$. По следствию 17.1, эти два вектора ортогональны. Поскольку $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы из евклидова пространства V, $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$. Используя этот факт, имеем

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{x}\,\overline{\mathbf{x}} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)(\mathbf{a} - \mathbf{b}i) = \mathbf{aa} - \mathbf{a}(\mathbf{b}i) + (\mathbf{b}i)\mathbf{a} - (\mathbf{b}i)(\mathbf{b}i) = \\ &= \mathbf{aa} - \overline{i}\,\mathbf{ab} + i\mathbf{ba} - i\,\overline{i}\,\mathbf{bb} = \mathbf{aa} + i\mathbf{ab} + i\mathbf{ba} - \mathbf{bb} = \\ &= \mathbf{aa} - \mathbf{bb} + 2i\mathbf{ab}. \end{aligned}$$

Из равенства $\mathbf{aa} - \mathbf{bb} + 2i\mathbf{ab} = 0$ вытекает, что $\mathbf{aa} - \mathbf{bb} = 0$ и $\mathbf{ab} = 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, а их длины равны. Следовательно, их орты $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ и $\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ образуют ортонормированный базис в S. Выше показано, что $\mathcal{A}(\mathbf{a}) = s\mathbf{a} - t\mathbf{b}$, а $\mathcal{A}(\mathbf{b}) = t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$. Положим $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = d$.

Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = \mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right) = \frac{1}{d}\cdot\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \frac{1}{d}(s\mathbf{a} - t\mathbf{b}) = s\cdot\frac{\mathbf{a}}{d} - t\cdot\frac{\mathbf{b}}{d} = s\mathbf{f}_1 - t\mathbf{f}_2,$$
$$\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) = \mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{b}}{d}\right) = \frac{1}{d}\cdot\mathcal{A}(\mathbf{b}) = \frac{1}{d}(t\mathbf{a} + s\mathbf{b}) = t\cdot\frac{\mathbf{a}}{d} + s\cdot\frac{\mathbf{b}}{d} = t\mathbf{f}_1 + s\mathbf{f}_2.$$

Ясно, что упорядоченный набор векторов $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ является ортонормированным базисом пространства S. В силу сказанного выше, матрица ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство S в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}.$$

Запишем комплексное число $z = s + ti$ в тригонометрической форме $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Тогда указанную матрицу можно переписать в виде

$$r\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Положим $\varphi = -\alpha$. Тогда эта матрица примет вид

$$r\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

т. е. в точности тот вид, который указан в формулировке теоремы. $\square$

Матрица нормального оператора в евклидовом пространстве (комментарий)

Отметим важную для дальнейшего информацию, вытекающую из доказательства теоремы 17.2. В клеточно-диагональной матрице нормального оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве, существующей в силу этой теоремы, каждая диагональная клетка порядка 1 содержит собственное значение оператора. Если же эта матрица содержит клетку вида (3), то комплексное число $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ является корнем характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$; в частности, число r равно модулю этого корня характеристического многочлена.