# Глава IV. Линейные отображения и линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

# § 16. Сопряженное отображение

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

## 15.1. Линейные функционалы в пространстве со скалярным произведением

Пусть $V$ — пространство со скалярным произведением над полем $F$, а $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из $V$. Из аксиом скалярного произведения вытекает, что отображение $\mathcal{A}$ из $V$ в $F$, задаваемое правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$, является линейным функционалом. Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением всякий линейный функционал устроен именно так. Более точно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 16.1**

*Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство со скалярным произведением над полем $F$, а $\mathcal{A}$ — линейный функционал из $V$ в $F$. Тогда существует, и притом только один, вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$.*

# Строение линейного функционала (2)

**Доказательство.** *Существование.* Поле $F$, рассматриваемое как векторное пространство над самим собой, порождается любым своим ненулевым элементом. Следовательно, $\dim F = 1$, и потому размерность любого подпространства пространства $F$ равна либо 0, либо 1. В частности, это верно для подпространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Если $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 0$, то $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{0\}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 0 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Поэтому в качестве искомого вектора $\mathbf{a}$ можно взять нулевой вектор.

Пусть теперь $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 1$. По теореме о ранге и дефекте $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = n - 1$, где $n = \dim V$. В силу теоремы 13.5 $\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{A})^{\perp} = n - (n - 1) = 1$. Зафиксируем ненулевой вектор $\mathbf{y} \in (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^{\perp}$ и положим $\alpha = \mathcal{A}(\mathbf{y})$. Проверим, что вектор

$$\mathbf{a} = \frac{\overline{\alpha}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}$$

является искомым, т. е. что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Из того, что $\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{A})^{\perp} = 1$ вытекает, что пространство $(\operatorname{Ker} \mathcal{A})^{\perp}$ порождается вектором $\mathbf{y}$. Пусть $\mathbf{x} \in V$. Учитывая, что, в силу теоремы 13.5, $V = \operatorname{Ker} \mathcal{A} \oplus (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^{\perp}$, получаем, что $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \beta\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и некоторого $\beta \in F$. Следовательно,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{z} + \beta\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{z}) + \mathcal{A}(\beta\mathbf{y}) = 0 + \beta\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \beta\alpha.$$

С другой стороны, учитывая, что $\mathbf{zy} = 0$, а $\overline{\mathbf{y}^2} = \mathbf{y}^2$ (поскольку $\mathbf{y}^2 \in \mathbb{R}$), имеем:

$$\mathbf{xa} = (\mathbf{z} + \beta\mathbf{y})\Big(\frac{\overline{\alpha}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}\Big) = \mathbf{z}\Big(\frac{\overline{\alpha}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}\Big) + (\beta\mathbf{y})\Big(\frac{\overline{\alpha}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}\Big) =$$

$$= \frac{\overline{\overline{\alpha}}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{zy} + \frac{\beta\,\overline{\overline{\alpha}}}{\mathbf{y}^2} \cdot \mathbf{y}^2 = 0 + \beta\alpha = \beta\alpha.$$

Таким образом, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \beta\alpha = \mathbf{xa}$.

*Единственность.* Если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ в силу ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением. $\square$

## 15.2. Отображение, сопряженное к данному

**Определения**

Пусть $V$ и $W$ — пространства со скалярным произведением над одним и тем же полем, а $\mathcal{A}$ — линейное отображение из $V$ в $W$. Отображение $\mathcal{B}$ из $W$ в $V$ называется *сопряженным к отображению* $\mathcal{A}$, если для любых векторов $\mathbf{x} \in V$ и $\mathbf{y} \in W$ выполнено равенство $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{y})$. Отображение, сопряженное к $\mathcal{A}$, обозначается через $\mathcal{A}^*$. Ясно, что если $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве $V$, то сопряженное к нему отображение (если оно существует) также является оператором в $V$. Этот оператор называется *оператором, сопряженным к* $\mathcal{A}$.

Из определения не вытекает ни существование отображения, сопряженного к $\mathcal{A}$, ни его линейность.

**Предложение 16.1**

*Пусть $V$ и $W$ — пространства со скалярным произведением над полем $F$. Для произвольного линейного отображения $\mathcal{A}$ из $V$ в $W$ существует сопряженное к нему отображение. Это отображение линейно и определено однозначно.*

**Доказательство.** *Существование.* Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{y} \in W$ и рассмотрим отображение $\mathcal{F}_\mathbf{y}$ из $V$ в $F$, заданное правилом $\mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Это отображение является линейным функционалом, поскольку если $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ и $t \in F$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)\big) \cdot \mathbf{y} = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{y} + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = \mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}_2), \\ \text{и} \quad \mathcal{F}_\mathbf{y}(t\mathbf{x}_1) &= \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{y} = \big(t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)\big) \cdot \mathbf{y} = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{y}\big) = t\mathcal{F}_\mathbf{y}(\mathbf{x}_1).\end{aligned}$$

По теореме 16.1 существует однозначно определенный вектор $\mathbf{y}' \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}'$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Определим отображение $\mathcal{B}$ из $W$ в $V$ правилом: $\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'$ для всякого $\mathbf{y} \in W$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}' = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{y})$ для всякого $\mathbf{x} \in V$ и всякого $\mathbf{y} \in W$. Следовательно, отображение $\mathcal{B}$ сопряжено к $\mathcal{A}$.

*Единственность.* Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — отображения, сопряженные к $\mathcal{A}$, $\mathbf{x} \in V$ и $\mathbf{y} \in W$. Тогда $\mathbf{x} \cdot \mathcal{B}_1(\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}_2(\mathbf{y})$. Таким образом, для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполнено равенство $\mathbf{x} \cdot \mathcal{B}_1(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}_2(\mathbf{y})$. Из ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением вытекает, что $\mathcal{B}_1(\mathbf{y}) = \mathcal{B}_2(\mathbf{y})$. Поскольку это равенство выполнено для любого вектора $\mathbf{y} \in W$, получаем, что $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

# Отображение, сопряженное к данному (4)

*Линейность.* Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W$. Для любого $\mathbf{x} \in V$, с одной стороны, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$, а с другой,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}_1 + \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}_2 = \\ = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1) + \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \cdot \big(\mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_2)\big).$$

Таким образом, $\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \cdot \big(\mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_2)\big)$. В силу ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением получаем, что $\mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^*(\mathbf{y}_2)$.
Пусть теперь $t \in F$ и $\mathbf{y} \in W$. Для любого $\mathbf{x} \in V$, с одной стороны, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (t\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(t\mathbf{y})$, а с другой,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot (t\mathbf{y}) = \overline{t}\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}\big) = \overline{t}\big(\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big) = \mathbf{x} \cdot \big(\overline{\overline{t}}\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big) = \mathbf{x} \cdot \big(t\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big).$$

Таким образом, $\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(t\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \big(t\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big)$. Вновь ссылаясь на ослабленный закон сокращения в пространстве со скалярным произведением, получаем, что $\mathcal{A}^*(t\mathbf{y}) = t\mathcal{A}^*(\mathbf{y})$. Мы доказали, что отображение $\mathcal{A}^*$ линейно. $\square$

# Свойства сопряженного отображения (1)

## Свойства сопряженного отображения

*Пусть $V$ и $W$ — пространства со скалярным произведением над полем $F$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные отображения из $V$ в $W$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — линейные операторы в пространстве $V$, а $t \in F$. Тогда:*

1) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$;
2) $(t\mathcal{A})^* = \overline{t}\mathcal{A}^*$;
3) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$;
4) $(\mathcal{C}\mathcal{D})^* = \mathcal{D}^*\mathcal{C}^*$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{x} \in V$ и $\mathbf{y} \in W$.

1) С одной стороны, $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}+\mathcal{B})^*(\mathbf{y})$, а с другой,

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) \cdot \mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathcal{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}) + \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}^*(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \big(\mathcal{A}^*(\mathbf{y}) + \mathcal{B}^*(\mathbf{y})\big) = \\ &= \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}+\mathcal{B})^*(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)(\mathbf{y})$. Поскольку это равенство выполнено для любого вектора $\mathbf{x} \in V$, из ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением вытекает, что $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^*(\mathbf{y}) = (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)(\mathbf{y})$ для любого $\mathbf{y} \in W$, т. е. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$.

2) С одной стороны, $(t\mathcal{A})(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(t\mathcal{A})^*(\mathbf{y})$, а с другой,

$$(t\mathcal{A})(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \big(t(\mathcal{A}(\mathbf{x}))\big)\cdot\mathbf{y} = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}\big) = t\big(\mathbf{x}\cdot\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big) = \mathbf{x}\cdot\big(\overline{t}\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big).$$

Таким образом, $\mathbf{x}\cdot(t\mathcal{A})^*(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\big(\overline{t}\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\big)$. Поскольку это равенство выполнено для любого вектора $\mathbf{x}\in V$, вновь используя ослабленный закон сокращения в пространстве со скалярным произведением, получаем, что $(t\mathcal{A})^*(\mathbf{y}) = \overline{t}\mathcal{A}^*(\mathbf{y})$ для любого $\mathbf{y}\in W$, т. е. $(t\mathcal{A})^* = \overline{t}\mathcal{A}^*$.

3) Поскольку

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathcal{A}^*(\mathbf{y}) &= \overline{\mathcal{A}^*(\mathbf{y})\cdot\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}\cdot(\mathcal{A}^*)^*(\mathbf{x})} = \\ &= \overline{\overline{(\mathcal{A}^*)^*(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}}} = (\mathcal{A}^*)^*(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}\end{aligned}$$

для любого вектора $\mathbf{y}\in W$, в очередной раз применяя ослабленный закон сокращения в пространстве со скалярным произведением, получаем, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathcal{A}^*)^*(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x}\in V$, т. е. $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$.

4) Пусть теперь $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. Тогда

$$(\mathcal{C}\mathcal{D})(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathcal{D}\big(\mathcal{C}(\mathbf{x})\big)\cdot\mathbf{y} = \mathcal{C}(\mathbf{x})\cdot\mathcal{D}^*(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathcal{C}^*\big(\mathcal{D}^*(\mathbf{y})\big) = \mathbf{x}\cdot(\mathcal{D}^*\mathcal{C}^*)(\mathbf{y}).$$

Отсюда и из определения сопряженного оператора вытекает, что $\mathcal{D}^*\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}\mathcal{D})^*$.

Следующее утверждение показывает, как связаны между собой матрицы отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

**Предложение 16.2**

*Пусть $V$ и $W$ — пространства со скалярным произведением над одним и тем же полем, $Q$ — базис пространства $V$, $R$ — базис пространства $W$, $\mathcal{A}$ — линейное отображение из $V$ в $W$, $A$ — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах $Q$ и $R$, а $B$ — матрица отображения $\mathcal{A}^*$ в базисах $R$ и $Q$. Тогда:*

а) $B = \overline{G_Q^{-1} A^\top G_R}$;

б) *если пространства $V$ и $W$ евклидовы, то $B = G_Q^{-1} A^\top G_R$.*

**Доказательство.** а) Пусть $\mathbf{x} \in V$ и $\mathbf{y} \in W$. В силу формулы (1) из § 6 $[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_R = A \cdot [\mathbf{x}]_Q$. С учетом предложения 12.2, имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = [\mathcal{A}(\mathbf{x})]_R^\top \cdot G_R \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R} = (A \cdot [\mathbf{x}]_Q)^\top \cdot G_R \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R} = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot A^\top \cdot G_R \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R}.$$

С другой стороны, формула (1) из § 6 влечет, что $[\mathcal{A}^*(\mathbf{y})]_Q = B \cdot [\mathbf{y}]_R$, и потому

$$\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot G_Q \cdot \overline{[\mathcal{A}^*(\mathbf{y})]_Q} = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot G_Q \cdot \overline{B \cdot [\mathbf{y}]_R} = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot G_Q \cdot \overline{B} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R}.$$

# Матрица сопряженного отображения (2)

Поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y})$, получаем, что

$$[\mathbf{x}]_Q^\top \cdot A^\top \cdot G_R \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R} = [\mathbf{x}]_Q^\top \cdot G_Q \cdot \overline{B} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_R}\,.$$

Поскольку $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы из $V$ и $W$ соответственно, из последнего равенства и ослабленного закона сокращения в пространстве со скалярным произведением вытекает, что $A^\top G_R = G_Q \overline{B}$, откуда $\overline{B} = G_Q^{-1} A^\top G_R$. Следовательно, $B = \overline{\overline{B}} = \overline{G_Q^{-1} A^\top G_R Q}$.

б) непосредственно вытекает из а). $\square$

Из предложения 16.2 непосредственно вытекает

**Следствие 16.1**

*Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве со скалярным произведением $V$, $Q$ — базис пространства $V$, а $A$ и $B$ — матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в базисе $Q$ соответственно. Тогда:*

а) $B = \overline{G_Q^{-1} A^\top G_Q}$;

б) *если пространство $V$ евклидово, то* $B = G_Q^{-1} A^\top G_Q$. $\square$

Поскольку матрица Грама ортонормированного базиса является единичной матрицей, из предложения 16.2 непосредственно вытекает

**Следствие 16.2**

*Пусть $V$ и $W$ — пространства со скалярным произведением над одним и тем же полем, $Q$ — ортонормированный базис пространства $V$, $R$ — ортонормированный базис пространства $W$, а $\mathcal{A}$ — линейное отображение из $V$ в $W$. Если отображение $\mathcal{A}$ имеет в базисах $Q$ и $R$ матрицу $A$, то:*

а) *отображение $\mathcal{A}^*$ имеет в базисах $R$ и $Q$ матрицу $A^*$;*

б) *если пространства $V$ и $W$ евклидовы, то отображение $\mathcal{A}^*$ имеет в базисах $R$ и $Q$ матрицу $A^\top$.* □

Следующий факт непосредственно вытекает из следствия 16.1 и является специализацией следствия 16.2 для линейных операторов.

**Следствие 16.3**

*Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве со скалярным произведением $V$, а $Q$ — ортонормированный базис пространства $V$. Если оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $Q$ матрицу $A$, то:*

а) *оператор $\mathcal{A}^*$ имеет в базисе $Q$ матрицу $A^*$;*

б) *если пространство $V$ евклидово, то оператор $\mathcal{A}^*$ имеет в базисе $Q$ матрицу $A^\top$.* □

## Ранг сопряженного отображения (1)

Укажем еще одно следствие из предложения 16.2.

**Следствие 16.4**

*Пусть $V$ и $W$ — пространства со скалярным произведением над одним и тем же полем, а $\mathcal{A}$ — линейное отображение из $V$ в $W$. Тогда* $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}^*)$.

**Доказательство.** Пусть $P$ — базис пространства $V$, а $Q$ — базис пространства $W$. В силу замечания 13.2 достаточно доказать, что если $A$ — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах $P$ и $Q$, а $B$ — матрица отображения $\mathcal{A}^*$ в базисах $Q$ и $P$, то $r(A) = r(B)$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} r(B) &= r(\,\overline{G_P^{-1}A^\top G_Q}\,) && \text{в силу предложения 16.2} \\ &= r(G_P^{-1}A^\top G_Q) && \text{поскольку } r(\,\overline{X}\,) = r(X) \text{ для любой} \\ & && \text{матрицы } X \text{ над } \mathbb{C} \\ &= r(A^\top) && \text{в силу следствия 4.1 и предложения 12.3} \\ &= r(A). \end{aligned}$$

Следствие доказано. $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 16.1**

*Пусть $V$ — пространство со скалярным произведением, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в $V$, а $S$ — подпространство в $V$. Если $S$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то подпространство $S^{\perp}$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$.*

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{x} \in S$, а $\mathbf{y} \in S^{\perp}$. Учитывая, что $S$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, получаем, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in S$, и потому $\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Таким образом, вектор $\mathcal{A}^*(\mathbf{y})$ ортогонален к любому вектору из $S$, и потому $\mathcal{A}^*(\mathbf{y}) \in S^{\perp}$. Поскольку это выполнено для любого $\mathbf{y} \in S^{\perp}$, получаем, что $S^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$. $\square$