§ 15. Обобщенное векторное и обобщенное смешанное произведения векторов

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

15.1. Обобщенное векторное произведение

На протяжении данного параграфа V — n-мерное евклидово пространство. В силу теоремы об изоморфизме векторных пространств V изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$. Для простоты будем всюду далее считать, что $V = \mathbb{R}^n$. Как обычно, через $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ обозначается стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение

Базис F евклидова пространства называется *положительно ориентированным*, если определитель матрицы перехода от E к F больше 0, и *отрицательно ориентированным*, если этот определитель меньше 0.

В силу замечания 2.9 матрицей перехода от E к F является матрица, в которой по столбцам записаны векторы базиса F. С учетом этого, ясно, что

- в обычном трехмерном пространстве базис является положительно (или отрицательно) ориентированным в смысле введенного только что определения тогда и только тогда, когда он обладает этим свойством в смысле определения, которое было дано в § 3 курса «Аналитическая геометрия».

В произвольном евклидовом пространстве можно ввести аналог понятия векторного произведения векторов из векторной алгебры. Прежде, чем давать соответствующее определение, вспомним некоторые свойства этого «обычного» векторного произведения, сформулировав их с использованием терминов, появившихся при изучении пространств со скалярным произведением (см. § 3 курса «Аналитическая геометрия»).

Пусть $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — векторы из физического трехмерного пространства, а $\vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы (т. е. коллинеарны), то $\vec{b} = \vec{0}$. В противном случае вектор $\vec{b}$ обладает следующими тремя свойствами:

1) длина вектора $\vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$;
2) вектор $\vec{b}$ ортогонален векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, а значит, лежит в ортогональном дополнении к подпространству, порожденному этими векторами;
3) тройка $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})$ является положительно ориентированным базисом пространства.

Определение обобщенного векторного произведения

Определение

Пусть V — n-мерное евклидово пространство, где $n > 2$, и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \in V$. Если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно зависимы, то их *обобщенное векторное произведение* по определению равно $\mathbf{0}$. Если же векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно независимы, то их *обобщенным векторным произведением* называется вектор $\mathbf{b}$ такой, что:

1) длина вектора $\mathbf{b}$ равна объему параллелотопа, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$;
2) вектор $\mathbf{b}$ лежит в ортогональном дополнении к подпространству, порожденному векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$;
3) набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ является положительно ориентированным базисом пространства.

Обобщенное векторное произведение векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ обозначается через $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$.

Два замечания об обобщенном векторном произведении

- Из определения обобщенного векторного произведения не вытекает, что оно существует. Ниже мы покажем, что для произвольного набора из $(n-1)$-го вектора евклидова пространства их обобщенное векторное произведение существует и единственно.
- Обобщенное векторное произведение в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве является n-арной алгебраической операцией. Это единственный в нашем курсе пример n-арной операции при $n > 2$.

Построение обобщенного векторного произведения (1)

Теорема 15.1

Для любого набора векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ *из n-мерного евклидова пространства* V, *где* $n > 2$, *существует, и притом единственный, вектор* $\mathbf{b}$, *являющийся обобщенным векторным произведением векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$.

Доказательство. Если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно зависимы, то требуемый факт непосредственно вытекает из определения обобщенного векторного произведения. Поэтому далее можно считать, что эти векторы линейно независимы.

Существование. Обозначим через $A = (a_{ij})$ матрицу размера $n \times (n-1)$, в которой по столбцам записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ (или, что то же самое, координаты этих векторов в базисе E). Таким образом, $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно независимы, ранг этой матрицы по столбцам равен $n-1$. В силу теоремы о ранге матрицы ее ранг по минорам также равен $n-1$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через Δ_i минор $(n-1)$-го порядка матрицы A, полученный при вычеркивании из нее i-й строки. Ясно, что матрица A не содержит миноров $(n-1)$-го порядка, отличных от $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Следовательно, по крайней мере один из этих миноров отличен от 0.

Построение обобщенного векторного произведения (2)

Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $A_i = (-1)^{i+n} \cdot \Delta_i$. Ясно, что по крайней мере одно из чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отлично от 0. Пусть

$$\mathbf{b} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + \cdots + A_n\mathbf{e}_n. \tag{1}$$

Другими словами, $\mathbf{b} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Докажем, что вектор $\mathbf{b}$ является обобщенным векторным произведением векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$.

Положим $S = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1} \rangle$. Проверим сначала, что $\mathbf{b} \in S^\perp$. Пусть $1 \leqslant i \leqslant n - 1$. Рассмотрим следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & a_{2i} \\ \hdotsfor{5} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & a_{ni} \end{vmatrix}.$$

С одной стороны, этот определитель содержит два одинаковых столбца, и потому равен 0. С другой стороны, разлагая Δ по последнему столбцу, имеем

$$\Delta = a_{1i}A_1 + a_{2i}A_2 + \cdots + a_{ni}A_n = \mathbf{a}_i\mathbf{b}.$$

Итак, $\mathbf{a}_i\mathbf{b} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Следовательно, $\mathbf{b} \in S^\perp$.

Построение обобщенного векторного произведения (3)

Проверим теперь, что набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ является базисом пространства V. Поскольку число векторов в этом наборе равно размерности V, достаточно убедиться, что этот набор линейно независим. Предположим, что это не так. Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно независимы, из леммы 1.4 вытекает, что $\mathbf{b} \in S$. С другой стороны, как показано выше, $\mathbf{b} \in S^{\perp}$. Поскольку $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, мы получаем, что $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Но это не так, поскольку $\mathbf{b} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ и $A_i \neq 0$ для некоторого i.

Докажем теперь, что базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ положительно ориентирован. Матрица перехода от базиса E к базису $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & A_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & A_n \end{pmatrix}.$$

Разлагая определитель этой матрицы по последнему столбцу, получаем

$$|T| = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2. \qquad (2)$$

В частности, $|T| > 0$, и потому базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ положительно ориентирован.

Осталось доказать, что $|\mathbf{b}| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}}$. Заметим, что

$$\mathbf{bb} = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2. \tag{3}$$

Используя замечание 14.2 и тот факт, что $\mathbf{a}_i\mathbf{b} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, имеем

$$T^\top T = G_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_{n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{bb} \end{pmatrix}.$$

Вычислив определитель последней матрицы разложением по последней строке и учтя предложение 14.4, получим:

$$|T^\top T| = g_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}} \cdot \mathbf{bb} = (V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}})^2 \cdot |\mathbf{b}|^2.$$

В то же время, $|T^\top T| = |T^\top| \cdot |T| = |T|^2$. Следовательно, $|T|^2 = (V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}})^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$, откуда $|T| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}} \cdot |\mathbf{b}|$. С другой стороны, сравнивая равенства (2) и (3), получаем, что $|T| = \mathbf{bb} = |\mathbf{b}|^2$. Мы видим, что $|\mathbf{b}|^2 = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}} \cdot |\mathbf{b}|$, откуда $|\mathbf{b}| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}}$.

Существование обобщенного векторного произведения доказано.

Единственность. Предположим, что наряду с вектором $\mathbf{b}$ существует вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{c} \in S^{\perp}$, $|\mathbf{c}| = V_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}}$ и набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{c}\}$ является положительно ориентированным базисом пространства V. Поскольку вектор $\mathbf{c}$ входит в базис пространства V, он отличен от $\mathbf{0}$. Из теоремы 13.5 вытекает, что $\dim S^{\perp} = \dim V - \dim S = n - (n-1) = 1$. Следовательно, каждый из векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, будучи ненулевым, образует базис пространства $S^{\perp}$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{c} = t\mathbf{b}$ для некоторого t. Поскольку $|\mathbf{c}| = V_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}} = |\mathbf{b}|$, получаем, что $t \in \{1, -1\}$. Обозначим через T_1 и T_2 матрицы перехода от базиса E к базисам $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ и $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{c}\}$ соответственно. Если $t = -1$, т. е. $\mathbf{c} = -\mathbf{b}$, то в матрицах T_1 и T_2 все столбцы, кроме последнего совпадают, а последние столбцы получаются один из другого умножением на -1. Следовательно, $|T_1| = -|T_2|$. Поскольку базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ положительно ориентирован, $|T_1| > 0$. Следовательно, $|T_2| < 0$, т. е. базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{c}\}$ отрицательно ориентирован, что противоречит его выбору. Следовательно, $t = 1$, т. е. $\mathbf{c} = \mathbf{b}$. $\square$

Замечание 15.1

Пусть $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *— стандартный базис евклидова пространства* V, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ *— линейно независимый набор векторов из* V *и* $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ *для всякого* $i = 1, 2, \ldots, n-1$. *Тогда*

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & \mathbf{e}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Доказательство. Если разложить по последнему столбцу символический определитель из правой части равенства (4), то получится правая часть равенства (1), которая, как показано выше, равна $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$. $\square$

Транспонировав матрицу из правой части равенства (4) и поменяв в полученной матрице местами сначала n-ю и $(n-1)$-ю строки, затем $(n-1)$-ю и $(n-2)$-ю строки, ..., в конце концов, вторую и первую строки, мы получим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1\,n-1} & a_{2\,n-1} & \ldots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}.$$

Из 1-го и 4-го свойств определителей вытекает, что

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \Delta.$$

В частности, если n нечетно, то $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \Delta$. Таким образом, в обычном трехмерном пространстве формула (4) равносильна известной из курса аналитической геометрии формуле вычисления обычного векторного произведения векторов по их координатам в правом ортонормированном базисе.

15.2. Обобщенное смешанное произведение

Определение

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — векторы из n-мерного евклидова пространства V, где $n > 2$. *Обобщенным смешанным произведением* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется скалярное произведение вектора $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$ на вектор $\mathbf{a}_n$.

По определению это понятие аналогично смешанному произведению векторов в обычном трехмерном пространстве. По аналогии с обычным смешанным произведением, будем обозначать обобщенное смешанное произведение векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ через $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n$.

Запишем координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ в стандартном базисе пространства V в матрицу по столбцам и обозначим эту матрицу через A. Разлагая определитель матрицы A по последнему столбцу и учитывая формулу (4), мы получаем, что этот определитель равен скалярному произведению вектора $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$ на вектор $\mathbf{a}_n$, т. е. обобщенному смешанному произведению векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Итак,

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n = |A|. \tag{5}$$

Поскольку определитель матрицы не меняется при ее транспонировании, равенство (5) аналогично формуле вычисления обычного смешанного произведения векторов в трехмерном пространстве по их координатам в правом ортонормированном базисе.

В силу теоремы о ранге матрицы, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $|A| = 0$. Это утверждение является аналогом критерия компланарности векторов, поскольку три вектора в обычном трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Предположим теперь, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы. Из следствия 14.2 и формулы (5) вытекает, что

$$|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\cdots\mathbf{a}_n| = V_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}}.$$

При $n = 3$ это равенство есть не что иное, как геометрический смысл смешанного произведения векторов в обычном трехмерном пространстве. При этом требование о линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ соответствует требованию о некомпланарности векторов в геометрическом смысле смешанного произведения.