§ 14. Приложения матрицы Грама

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

14.1. Псевдорешения системы линейных уравнений

Для удобства обозначений мы далее не будем делать различия между векторами, компоненты которых записаны в строку и в столбец. В частности, мы будем записывать систему линейных уравнений в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, записанные в виде столбцов.

Зафиксируем систему линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $\mathbb{R}$.

Определение

Псевдорешением системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с m неизвестными называется произвольный вектор $\mathbf{x}_0$ такой, что расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{b}$ минимально среди всех векторов из $\mathbb{R}^m$.

Замечание 14.1

Если система линейных уравнений совместна, то ее псевдорешениями являются все ее частные решения и только они.

Доказательство. Вектор $\mathbf{x}_0$ является решением системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, т. е. когда расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{b}$ равно нулю. Меньше нуля расстояние между векторами быть не может. $\square$

Предложение о псевдорешении системы

Пусть $A = (A_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Множество всех векторов вида $A\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ пробегает пространство $\mathbb{R}^n$, образует подпространство в $\mathbb{R}^m$. Из очевидного равенства

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n$$

вытекает, что это подпространство порождено векторами-столбцами матрицы A. Псевдорешение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор из этого подпространства, расстояние между которым и вектором $\mathbf{b}$ минимально.

Всюду далее: $\mathbf{a}_i$ — вектор, компонентами которого являются элементы i-го столбца матрицы A (для всякого $i = 1, 2, \dots, n$), $H = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$, а $\mathbf{b}_\perp$ и $\mathbf{b}^\perp$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{b}$ на подпространство H и ортогональная составляющая $\mathbf{b}$ относительно H соответственно. Из сказанного выше и замечания 13.3 вытекает следующий факт.

Предложение 14.1

Вектор $\mathbf{x}_0$ является псевдорешением системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\perp$. $\square$

Вычисление матрицы Грама

Иными словами, множество всех псевдорешений системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ совпадает с общим решением системы

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\perp}. \tag{1}$$

Наша цель — показать, как найти псевдорешения системы, не находя ортогональной проекции вектора $\mathbf{b}$ на подпространство H.

Из теоремы 13.2 вытекает следующее утверждение.

Замечание 14.2

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ — система векторов из V, а A — квадратная матрица порядка k, в которой по столбцам записаны координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ в некотором ортонормированном базисе пространства V. Тогда $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k\}} = A^{\top}\overline{A}$. В частности, если пространство V евклидово, то $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k\}} = A^{\top}A$. $\square$

Теорема 14.1

Множество всех псевдорешений системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *совпадает с общим решением системы*

$$G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\}}\mathbf{x} = A^\top\mathbf{b}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ *— совокупность всех векторов-столбцов матрицы* A.

Доказательство. В силу предложения 14.1 достаточно установить, что общее решение системы (2) совпадает с общим решением системы (1).

Пусть $\mathbf{x}_0$ — решение системы (1), т. е. выполнено равенство $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\perp$. Умножив обе части этого равенства слева на $A^\top$, получим

$$A^\top A\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}_\perp. \qquad (3)$$

В силу замечания 14.2 левую часть равенства (3) можно записать в виде $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\}}\mathbf{x}_0$. Пусть, как и ранее, $H = \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m\rangle$. В матрице $A^\top$ по строкам записаны векторы $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m$. Все они лежат в H, и потому ортогональны к вектору $\mathbf{b}^\perp$. Следовательно, $A^\top\mathbf{b}^\perp = \mathbf{0}$, и потому

$$A^\top\mathbf{b} = A^\top(\mathbf{b}_\perp + \mathbf{b}^\perp) = A^\top\mathbf{b}_\perp + A^\top\mathbf{b}^\perp = A^\top\mathbf{b}_\perp + \mathbf{0} = A^\top\mathbf{b}_\perp.$$

С учетом равенства (3), получаем, что $A^\top A\mathbf{x}_0 = A^\top \mathbf{b}$, т.е. $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_m\}}\mathbf{x}_0 = A^\top \mathbf{b}$. Мы доказали, что всякое решение системы (1) является решением системы (2).

Докажем обратное. Пусть $\mathbf{x}_0$ — решение системы (2), т. е. выполнено равенство $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_m\}}\mathbf{x}_0 = A^\top \mathbf{b}$. С учетом замечания 14.2, его можно переписать в виде $A^\top A\mathbf{x}_0 = A^\top \mathbf{b}$. Таким образом, $A^\top(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Положим $\mathbf{c} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$. В матрице $A^\top$ по строкам записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$. Из равенства $A^\top \mathbf{c} = \mathbf{0}$ вытекает, что вектор $\mathbf{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, и потому лежит в $H^\perp$. С другой стороны, очевидно, что вектор $A\mathbf{x}_0$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, и потому лежит в H. Итак, $\mathbf{b} = A\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}$, причем $A\mathbf{x}_0 \in H$, а $\mathbf{c} \in H^\perp$. Ясно, что $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\perp$ и $\mathbf{c} = \mathbf{b}^\perp$. Первое из этих равенств означает, что $\mathbf{x}_0$ — решение системы (1). $\square$

14.2. Другие алгебраические приложения матрицы Грама

Следующее утверждение показывает, что матрицу Грама можно использовать для выяснения вопроса о линейной зависимости или независимости данной системы векторов.

Предложение 14.2

Пусть V — пространство со скалярным произведением. Система векторов $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ из V линейно независима тогда и только тогда, когда матрица Грама этой системы невырожденна.

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что система A линейно зависима, т. е. $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_m$, не все из которых равны 0. Умножая это равенство последовательно на $\mathbf{a}_1$, на $\mathbf{a}_2$, ..., на $\mathbf{a}_m$ и учитывая определение матрицы $G_A = (a_{ij})$, получаем следующий набор равенств:

$$\begin{cases} t_1a_{11} + t_2a_{21} + \cdots + t_ma_{m1} = 0, \\ t_1a_{12} + t_2a_{22} + \cdots + t_ma_{m2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1a_{1m} + t_2a_{2m} + \cdots + t_ma_{mm} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m$ векторы-строки матрицы G_A.

Систему равенств (4) можно переписать в виде

$$t_1\mathbf{g}_1 + t_2\mathbf{g}_2 + \cdots + t_m\mathbf{g}_m = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Таким образом, векторы-строки матрицы G_A линейно зависимы. Следовательно, ранг этой матрицы по строкам меньше m. По теореме о ранге матрицы ее ранг по минорам также меньше m. Следовательно, матрица G_A вырожденна.

Необходимость. Предположим, что матрица G_A вырожденна. Следовательно, ранг этой матрицы по минорам меньше m. По теореме о ранге матрицы ее ранг по строкам также меньше m. Это означает, что векторы-строки матрицы G_A линейно зависимы, т. е. для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_m$, не все из которых равны 0, выполнено равенство (5), а значит и набор равенств (4). С учетом определения матрицы G_A, этот набор равенств можно переписать в виде

$$\begin{cases} t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m\mathbf{a}_1 = 0, \\ t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m\mathbf{a}_2 = 0, \\ \dotfill \\ t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_m + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_m + \cdots + t_m\mathbf{a}_m\mathbf{a}_m = 0. \end{cases}$$

В свою очередь, эти равенства можно переписать в виде

$$\begin{cases}(t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m)\mathbf{a}_1 = 0,\\ (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m)\mathbf{a}_2 = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m)\mathbf{a}_m = 0.\end{cases}$$

Положив $\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m$, получим $\mathbf{x}\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}\mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{x}\mathbf{a}_m = 0$. Для всякого $i = 1, 2, \dots, m$ умножим равенство $\mathbf{x}\mathbf{a}_i = 0$ на $\overline{t_i}$ и сложим полученные равенства. Используя формулу (2) из § 12, получим:

$$\begin{aligned}0 &= \overline{t_1}(\mathbf{x}\mathbf{a}_1) + \overline{t_2}(\mathbf{x}\mathbf{a}_2) + \dots + \overline{t_m}(\mathbf{x}\mathbf{a}_m) =\\ &= \mathbf{x}(t_1\mathbf{a}_1) + \mathbf{x}(t_2\mathbf{a}_2) + \dots + \mathbf{x}(t_m\mathbf{a}_m) =\\ &= \mathbf{x}(t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m) = \mathbf{x}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Итак, $\mathbf{x}\mathbf{x} = 0$. В силу аксиомы 4) $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m = \mathbf{x} = \mathbf{0}$, т. е. система A линейно зависима. $\square$

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, расстояние и угол между вектором и подпространством — второй способ нахождения (1)

Предположим, что даны вектор $\mathbf{x}$ и подпространство S пространства со скалярным произведением V. В § 13 был указан способ нахождения ортогональной проекции $\mathbf{x}_\perp$ вектора $\mathbf{x}$ на S, ортогональной составляющей $\mathbf{x}^\perp$ вектора $\mathbf{x}$ относительно S, расстояния $\rho(\mathbf{x}, S)$ от $\mathbf{x}$ до S, а если пространство V евклидово, то еще и угла $\varphi(\mathbf{x}, S)$ между $\mathbf{x}$ и S (см. алгоритм 13.2). Укажем еще один способ их нахождения. В отличие от алгоритма 13.2, этот новый способ использует матрицу Грама.

С учетом формул $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}^\perp$, $\rho(\mathbf{x}, S) = |\mathbf{x}^\perp|$ и $\cos\varphi(\mathbf{x}, S) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_\perp}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{x}_\perp|}$, достаточно найти вектор $\mathbf{x}_\perp$. Как и ранее, предполагаем, что известен базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства S. Поскольку $\mathbf{x}_\perp \in S$, можно разложить $\mathbf{x}_\perp$ по этому базису:

$$\mathbf{x}_\perp = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k. \tag{6}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ неизвестны, их надо найти. Имеем:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}^\perp) = \mathbf{a}_1\mathbf{x}_\perp + \mathbf{a}_1\mathbf{x}^\perp = \mathbf{a}_1\mathbf{x}_\perp + 0 = \mathbf{a}_1\mathbf{x}_\perp =$$
$$= \mathbf{a}_1(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k) = \overline{\alpha_1}\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \overline{\alpha_2}\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \cdots + \overline{\alpha_k}\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k.$$

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, расстояние и угол между вектором и подпространством — второй способ нахождения (2)

Поскольку скалярные произведения $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_1\mathbf{x}$ известны, равенство

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1)\,\overline{\alpha_1} + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)\,\overline{\alpha_2} + \cdots + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k)\,\overline{\alpha_k} = \mathbf{a}_1\mathbf{x}$$

является линейным уравнением с неизвестными $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_k}$. Рассуждая аналогичным образом, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1)\,\overline{\alpha_1} + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)\,\overline{\alpha_2} + \cdots + (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k)\,\overline{\alpha_k} = \mathbf{a}_1\mathbf{x}, \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)\,\overline{\alpha_1} + (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2)\,\overline{\alpha_2} + \cdots + (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_k)\,\overline{\alpha_k} = \mathbf{a}_2\mathbf{x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k\mathbf{a}_1)\,\overline{\alpha_1} + (\mathbf{a}_k\mathbf{a}_2)\,\overline{\alpha_2} + \cdots + (\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k)\,\overline{\alpha_k} = \mathbf{a}_k\mathbf{x}. \end{cases}$$

Это крамеровская система линейных уравнений, а ее основной матрицей является матрица Грама системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$. Эта система векторов является базисом S. В частности, она линейно независима. В силу предложения 14.2 основная матрица нашей системы невырожденна. По теореме Крамера эта система имеет единственное решение. Обозначим это решение через $\left(\overline{\alpha_1^0}, \overline{\alpha_2^0}, \ldots, \overline{\alpha_k^0}\right)$. Тогда $\mathbf{x}_\perp = \alpha_1^0\mathbf{a}_1 + \alpha_2^0\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k^0\mathbf{a}_k$.

Из сказанного вытекает алгоритм, сформулированный на следующем слайде.

Алгоритм 14.1

Даны подпространство S пространства со скалярным произведением V и вектор $\mathbf{x} \in V$. Будем считать известным базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства S. Решим систему линейных уравнений вида $GX = B$, где G — матрица Грама системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$, а B — столбец длины k, i-й элемент которого равен $\mathbf{a}_i\mathbf{x}$ (для $i = 1, 2, \ldots, k$). Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ — (единственное) решение указанной системы. Тогда $\mathbf{x}_\perp = \overline{\alpha_1}\,\mathbf{a}_1 + \overline{\alpha_2}\,\mathbf{a}_2 + \cdots + \overline{\alpha_k}\,\mathbf{a}_k$, $\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\perp$, $\rho(\mathbf{x}, S) = |\mathbf{x}^\perp|$, а в случае, когда пространство V евклидово, еще и $\cos\varphi(\mathbf{x}, S) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_\perp}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{x}_\perp|}$. □

Определитель Грама и процесс ортогонализации (1)

Для дальнейшего нам понадобится информация о связи определителя матрицы Грама с процессом ортогонализации Грама–Шмидта. Определитель матрицы Грама набора векторов A в пространстве со скалярным произведением называется *определителем Грама* этого набора векторов и обозначается через g_A. Таким образом, $g_A = |G_A|$.

Предложение 14.3

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ — линейно независимая система векторов из V, а $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ — ортогональная система векторов, полученная из системы A применением процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Тогда

$$g_A = g_B = |\mathbf{b}_1|^2 \cdot |\mathbf{b}_2|^2 \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_m|^2.$$

Доказательство. Равенство $g_B = |\mathbf{b}_1|^2 \cdot |\mathbf{b}_2|^2 \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_m|^2$ вытекает из того, что матрица G_B диагональна, и на ее главной диагонали стоят числа вида $\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i = |\mathbf{b}_i|^2$, где $i = 1, 2, \dots, m$. Осталось доказать, что $g_A = g_B$.

Как видно из описания процесса ортогонализации Грама–Шмидта (см. доказательство теоремы 13.3), каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ получается из системы векторов A применением конечное число раз операции прибавления к одному вектору из A другого вектора из A, умноженного на некоторое число. Пусть $k, \ell \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \neq \ell$, а λ — произвольный скаляр. Положим

$$B' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k + \lambda \mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_m\}.$$

В силу сказанного выше достаточно установить, что $g_A = g_{B'}$. Положим $G_{B'} = (b_{ij})$. Тогда, по определению матрицы Грама,

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j, & \text{если } i \neq k \text{ и } j \neq k; \\ (\mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_\ell)\mathbf{a}_j, & \text{если } i = k \text{ и } j \neq k; \\ \mathbf{a}_i(\mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_\ell), & \text{если } i \neq k \text{ и } j = k; \\ (\mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_\ell)(\mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_\ell), & \text{если } i = j = k. \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим через G_1 матрицу, полученную из G_A прибавлением к k-й строке матрицы G_A ее ℓ-й строки, умноженной на λ, а через G_2 — матрицу, полученную из G_1 прибавлением к k-му столбцу матрицы G_1 ее ℓ-го столбца, умноженного на $\overline{\lambda}$. Положим $G_1 = (a'_{ij})$ и $G_2 = (a''_{ij})$.

Ясно, что
$$a'_{kj} = a_{kj} + \lambda a_{\ell j} = \mathbf{a}_k\mathbf{a}_j + \lambda\mathbf{a}_\ell\mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_\ell)\mathbf{a}_j,$$
а если $i \neq k$, то $a'_{ij} = a_{ij} = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$. Используя эти равенства, имеем

$$a''_{kk} = a'_{kk} + \overline{\lambda}\, a'_{k\ell} = \mathbf{a}_k\mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_\ell\mathbf{a}_k + \overline{\lambda}\,(\mathbf{a}_k\mathbf{a}_\ell + \lambda\mathbf{a}_\ell\mathbf{a}_\ell) =$$
$$= \mathbf{a}_k\mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_\ell\mathbf{a}_k + \overline{\lambda}\,\mathbf{a}_k\mathbf{a}_\ell + \lambda\overline{\lambda}\,\mathbf{a}_\ell\mathbf{a}_\ell = (\mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_\ell)(\mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_\ell),$$
если $i \neq k$, то $a''_{ik} = a'_{ik} + \overline{\lambda}\, a'_{i\ell} = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_k + \overline{\lambda}\,\mathbf{a}_i\mathbf{a}_\ell = \mathbf{a}_i(\mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_\ell)$,

если $j \neq k$, то $a''_{kj} = a'_{kj} = (\mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_\ell)\mathbf{a}_j$,

если $i \neq k$ и $j \neq k$, то $a''_{ij} = a'_{ij} = a_{ij} = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$.

Сравнивая полученные равенства с (7), получаем, что $G_2 = G_{B'}$. Таким образом, матрица $G_{B'}$ получается из матрицы G_A путем двух последовательных преобразований: прибавления к k-й строке матрицы G_A ее ℓ-й строки, умноженной на λ, и последующего прибавления к k-му столбцу полученной матрицы ее ℓ-го столбца, умноженного на $\overline{\lambda}$. В силу 7-го свойства определителей и принципа равенства строк и столбцов $g_A = |G_A| = |G_{B'}| = g_{B'}$. □

Из предложений 14.2 и 14.3 непосредственно вытекает

Следствие 14.1

Определитель Грама произвольной системы векторов в евклидовом пространстве является неотрицательным действительным числом. Если система векторов линейно независима, то этот определитель больше 0. $\square$

14.3. Параллелотопы

Определение

Параллелотопом, порожденным линейно независимой системой векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ евклидова пространства V, называется множество всех векторов из V вида $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m$, где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. *Объем параллелотопа* $V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}}$ определяется индукцией по m: если $m = 1$, то $V_{\{\mathbf{a}_1\}} = |\mathbf{a}_1|$, а если $m > 1$, то $V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}} = V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}\}} \cdot d$, где d — длина ортогональной составляющей вектора $\mathbf{a}_m$ относительно подпространства $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1} \rangle$.

- В унитарном пространстве понятие параллелотопа ввести нельзя, так неравенства вида $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ в случае, когда λ — комплексное число, не имеют смысла.

Параллелотоп обобщает понятия отрезка, параллелограмма и параллелепипеда. В самом деле, точка X принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; точка X лежит внутри параллелогамма со сторонами AB и AC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \lambda_1\overrightarrow{AB} + \lambda_2\overrightarrow{AC}$, где $0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2 \leqslant 1$; наконец, точка X лежит внутри параллелепипеда с ребрами AB, AC и AD тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \lambda_1\overrightarrow{AB} + \lambda_2\overrightarrow{AC} + \lambda_3\overrightarrow{AD}$, где $0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leqslant 1$.

А объем параллелотопа — это обобщение длины отрезка, площади параллелограмма и объема параллелепипеда. Для отрезка это видно из определения, а случаи параллелограмма и параллелепипеда иллюстрируют рис. 1 и 2 соответственно.

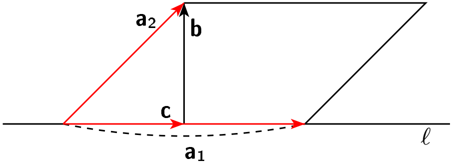

Рис. 1. Площадь параллелограмма

Здесь $m = 2$, $V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\}}$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$, $V_{\{\mathbf{a_1}\}} = |\mathbf{a_1}|$, подпространство $\langle \mathbf{a_1} \rangle$ — прямая ℓ, ортогональная составляющая вектора $\mathbf{a_2}$ относительно этого подпространства — вектор $\mathbf{b}$, и $V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\}} = |\mathbf{a_1}| \cdot |\mathbf{b}| = V_{\{\mathbf{a_1}\}} \cdot |\mathbf{b}|$. Через $\mathbf{c}$ обозначена ортогональная проекция вектора $\mathbf{a_2}$ на подпространство $\langle \mathbf{a_1} \rangle$.

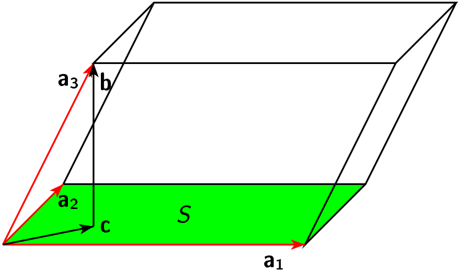

Рис. 2. Объем параллелепипеда

Здесь $m = 3$, $V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\}}$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$, $V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\}}$ — площадь S «зеленого» параллелограмма, подпространство $\langle \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2} \rangle$ — плоскость, в которой расположен этот параллелограмм, ортогональная составляющая вектора $\mathbf{a_3}$ относительно этого подпространства — вектор $\mathbf{b}$, и $V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\}} = S \cdot |\mathbf{b}| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\}} \cdot |\mathbf{b}|$. Через $\mathbf{c}$ обозначена ортогональная проекция вектора $\mathbf{a_3}$ на подпространство $\langle \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2} \rangle$.

Предложение 14.4

Если $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *— линейно независимая система векторов в евклидовом пространстве, то* $V_A = \sqrt{g_A}$.

Доказательство проведем индукцией по m.

База индукции. Если $m = 1$, то G_A — квадратная матрица 1-го порядка, единственным элементом которой является $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1$. Учитывая определение объема параллелотопа, имеем $g_A = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 = |\mathbf{a}_1|^2 = V_A^2$. Следовательно, $V_A = \sqrt{g_A}$.

Шаг индукции. Пусть теперь $m > 1$. Пусть $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ — ортогональная система векторов, полученная из системы A применением процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Положим $A' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}\}$ и $B' = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{m-1}\}$. Используя предположение индукции и предложение 14.3, получаем, что

$$V_{A'} = \sqrt{g_{A'}} = \sqrt{g_{B'}} = \sqrt{|\mathbf{b}_1|^2 \cdot |\mathbf{b}_2|^2 \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_{m-1}|^2} = |\mathbf{b}_1| \cdot |\mathbf{b}_2| \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_{m-1}|.$$

Положим $S = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1} \rangle$. В силу замечания 13.4 $\mathbf{b}_m$ является ортогональной составляющей вектора $\mathbf{a}_m$ относительно подпространства S. Используя определение объема параллелотопа и предложение 14.3, имеем

$$V_A = V_{A'} \cdot |\mathbf{b}_m| = |\mathbf{b}_1| \cdot |\mathbf{b}_2| \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_{m-1}| \cdot |\mathbf{b}_m| = \sqrt{g_A}.$$

Предложение доказано. □

Пусть A — квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$. Через $\operatorname{mod}|A|$ будем обозначать модуль определителя матрицы A.

Следствие 14.2

Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ — ортонормированный базис евклидова пространства V, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ — произвольный базис того же пространства, а A — квадратная матрица порядка n, в которой по столбцам записаны координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. Тогда

$$V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}} = \operatorname{mod}|A|. \tag{8}$$

Доказательство. В силу замечания 14.2 $A^\top A = G_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_n\}}$. Переходя к определителям, имеем $g_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_n\}} = |A^\top A| = |A^\top| \cdot |A| = |A|^2$. В силу предложения 14.3

$$V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_n\}} = \sqrt{g_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_n\}}} = \sqrt{|A|^2} = \mathrm{mod}\,|A|.$$

Следствие доказано. $\square$

- Формулу (8) можно рассматривать как обобщение формул для вычисления площади параллелограмма и объема параллелепипеда[1].

[1] В этих двух формулах координаты векторов обычно располагают не по столбцам, а по строкам, но в силу 1-го свойства определителей это не существенно.

Из определения расстояния от вектора до подпространства, данного в § 13, определения объема параллелотопа и предложения 14.3 непосредственно вытекает

Следствие 14.3

Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, *где* $m > 1$, *— линейно независимая система векторов евклидова пространства, а* $A' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}\}$. *Тогда расстояние от вектора* $\mathbf{a}_m$ *до подпространства, порожденного системой векторов* A', *равно* $\sqrt{\frac{g_A}{g_{A'}}}$. □

Следствие 14.3 позволяет указать третий способ вычисления расстояния между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством S (первые два способа приведены в § 13 и выше в данном параграфе): если $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ — базис пространства S, то $\rho(\mathbf{x}, S) = \sqrt{\frac{g_A}{g_B}}$, где $A = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{x}\}$, а $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$.