Изометрические операторы
Самосопряженные операторы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

Определение

Линейный оператор $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *изометрическим*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{U}\mathbf{x}, \mathcal{U}\mathbf{y})$.

Ясно, что изометрический оператор сохраняет длины векторов, т.е. является *движением* в смысле элементарной геометрии. Оказывается, верно и обратное:

Теорема (о движениях)

Если линейный оператор $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ сохраняет длины векторов, он является изометрическим.

Благодаря теореме легко приводить примеры изометрических операторов – таковыми будут всевозможные повороты и симметрии.

Доказательство. Дано, что $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{x},\mathcal{U}\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$. Тогда для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V_1$ имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y}),\mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора $\mathcal{U}$ заключаем, что

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{x})+(\mathbf{y},\mathbf{y}) = (\mathcal{U}\mathbf{x},\mathcal{U}\mathbf{x})+(\mathcal{U}\mathbf{x},\mathcal{U}\mathbf{y})+(\mathcal{U}\mathbf{y},\mathcal{U}\mathbf{x})+(\mathcal{U}\mathbf{y},\mathcal{U}\mathbf{y}).$$

Отсюда

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{x},\mathcal{U}\mathbf{y}) + (\mathcal{U}\mathbf{y},\mathcal{U}\mathbf{x}). \tag{1}$$

Если пространства V_1 и V_2 евклидовы, то из (1) сразу следует

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathcal{U}\mathbf{x},\mathcal{U}\mathbf{y}).$$

Если пространства V_1 и V_2 унитарны, подставим вместо $\mathbf{x}$ вектор $i\mathbf{x}$:

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) - i(\mathbf{y},\mathbf{x}) = i(\mathcal{U}\mathbf{x},\mathcal{U}\mathbf{y}) - i(\mathcal{U}\mathbf{y},\mathcal{U}\mathbf{x}).$$

Сократив на i, получим

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) - (\mathbf{y},\mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{x},\mathcal{U}\mathbf{y}) - (\mathcal{U}\mathbf{y},\mathcal{U}\mathbf{x}). \tag{2}$$

Складывая (1) и (2) получаем $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathcal{U}\mathbf{x},\mathcal{U}\mathbf{y})$. $\square$

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$. Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{U}\mathbf{x}, \mathcal{U}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}).$$

Отсюда $\mathbf{y} = (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}$ по ослабленному закону сокращения, т.е. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ – тождественный оператор на пространстве V_1.
Вопрос: Можно ли утверждать, что $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ – тождественный оператор на V_2?

Пусть теперь $V_1 = V_2 = V$. Тогда из равенства $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}$ вытекает, что оператор $\mathcal{U}$ обратим и $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$. Поскольку $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^{-1}$ перестановочны, *каждый изометрический оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением нормален.*

Изометрические операторы на евклидовом пространстве называются *ортогональными*, а изометрические операторы на унитарном пространстве называются *унитарными*. Те же термины применяют к матрицам:

- матрица A над $\mathbb{R}$ называется *ортогональной*, если $A^{-1} = A^T$;
- матрица A над $\mathbb{C}$ называется *унитарной*, если $A^{-1} = A^*$.

$\nabla 1$. *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратно, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*

Доказательство. Прямое утверждение очевидно.
Пусть V – пространство со скалярным произведением размерности n и оператор $\mathcal{U}\colon V \to V$ таков, что для какого-то ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (1) в V система векторов $\mathcal{U}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{U}\mathbf{e}_n$ (2) также образует ортонормированный базис в V. Выразим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ через базис (1): $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. Применив $\mathcal{U}$, получим выражение вектора $\mathcal{U}\mathbf{x}$ через базис (2): $\mathcal{U}\mathbf{x} = x_1\mathcal{U}\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathcal{U}\mathbf{e}_n$. Вычисляя $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ через координаты в базисе (1) и $)\mathcal{U}\mathbf{x}, \mathcal{U}\mathbf{x})$ через координаты в базисе (2), получим одно и то же выражение $x_1\overline{x_1} + \dots + x_n\overline{x_n}$. Итак,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{x}, \mathcal{U}\mathbf{x}),$$

т.е. $\mathcal{U}$ сохраняет длины. Поэтому $\mathcal{U}$ – изометрический оператор. $\square$

На матричном языке $\nabla 1$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 2$. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* 1.
Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, λ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий λ. Тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{x}, \mathcal{U}\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \lambda\overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Отсюда $\lambda\overline{\lambda} = 1$, т.е. $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$.
Если $\mathcal{U}$ – ортогональный оператор, то его комплексификация – унитарный оператор с той же матрицей и теми же собственными значениями. $\square$

Обратное утверждение к $\nabla 2$, вообще говоря, неверно. Например, у матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оба собственных значения равны 1, но A не является ортогональной, так как $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^T$.

Мы вскоре увидим, что для нормальных операторов $\nabla 2$ обратимо.

Теорема (строение унитарного оператора)

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве V унитарен тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны 1.

Доказательство. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на унитарном пространстве с $\nabla 2$.
Достаточность. Если матрица A оператора $\mathcal{A}$ в каком-то ортонормированном базисе диагональна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Вычисляя произведение AA^*, получим диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят произведения вида $\lambda\overline{\lambda}$, где λ – диагональный элемент матрицы A. Поскольку $|\lambda| = 1$, имеем $\lambda\overline{\lambda} = 1$, откуда $AA^* = E$. Итак, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, т.е. $\mathcal{A}$ – унитарный оператор. □

Следствие

Если все собственные значения нормального оператора на унитарном пространстве по модулю равны 1, то оператор унитарен.

Теорема (строение ортогонального оператора)

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на евклидовом пространстве V ортогонален тогда и только тогда, когда в V есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1 и вида ± 1, либо размера 2 и вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Доказательство. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на евклидовом пространстве с $\nabla 2$.
Достаточность. Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию. Легко проверяется, что каждый блок блочно-диагональной матрицы из формулировки теоремы при умножении на транспонированный блок дает единичную матрицу (*проверьте!*). Значит, матрица оператора $\mathcal{A}$ ортогональна. $\square$

Следствие

Если все собственные значения нормального оператора на евклидовом пространстве по модулю равны 1, *то оператор ортогонален.*

Следствие (теорема Шаля)

Любое движение трехмерного пространства есть комбинация параллельного переноса с одним из следующих движений:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *– тождественное преобразование;*

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *– симметрия относительно плоскости;*

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *– симметрия относительно прямой;*

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *– симметрия относительно точки;*

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *– поворот вокруг оси на угол* φ*;*

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *– композиция поворота вокруг оси на угол* φ *и симметрии.*

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве V со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 3.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*
Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, λ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий λ. Тогда

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Отсюда $\lambda = \overline{\lambda}$, т.е. λ – действительное число. Если $\mathcal{U}$ – самосопряженный оператор на евклидовом пространстве, его комплексификация – самосопряженный оператор на унитарном пространстве с той же матрицей и теми же собственными значениями. $\square$

Строение самосопряженного оператора

Теорема (строение самосопряженного оператора)

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве V со скалярным произведением самосопряжен тогда и только тогда, когда в V есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна и действительна.

Доказательство. Необходимость. Самосопряженный оператор нормален. Остается применить теоремы о строении нормального оператора и $\nabla 3$.

Достаточность. Если матрица A оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе диагональна и действительна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ тоже равна A. Значит, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. $\square$

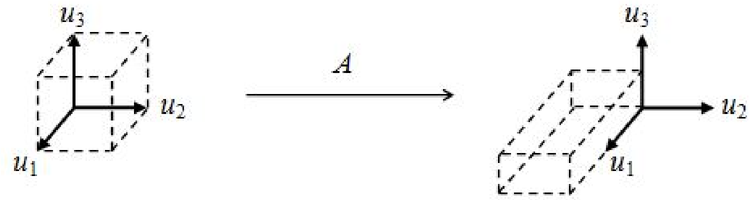
В качестве следствия отметим частичное обращение наблюдения $\nabla 3$:

Следствие

Если все собственные значения нормального оператора действительны, то оператор самосопряжен.

Вопрос: Верно ли обращение наблюдения $\nabla 3$ в общем случае?

Геометрический смысл самосопряженного оператора довольно прост – это растяжение или сжатие вдоль нескольких взаимно перпендикулярных осей, возможно в сочетании с отражением.
На рисунке вектора ортонормированного базиса $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ принадлежат собственным значениям 2, –1 и $\frac{1}{2}$.



В физике (квантовой механике) самосопряженные операторы – это *наблюдаемые*, а их собственные значения – это те результаты, которые могут быть зарегистрированы при наблюдении.

Матричные следствия

Переводя доказанные результаты на матричный язык и комбинируя их с теоремой о замене матрицы, получаем два важных следствия:

Следствие об эрмитовых матрицах

Квадратная матрица A *над полем* $\mathbb{C}$ *эрмитова тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица* U *и действительная диагональная матрица* D, *что* $D = U^*AU$.

Следствие о симметрических матрицах

Квадратная матрица A *над полем* $\mathbb{R}$ *симметрична тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица* U *и диагональная матрица* D *такие, что* $D = U^TAU$. □