

Вопросы к экзамену по линейно алгебре  
(Весенний семестр 2023/2024 учебного года)

1. Определение линейного пространства. Примеры, следствия из определения.
2. Линейно зависимые системы векторов. Критерий линейной зависимости.
3. Линейно независимые системы векторов. Теорема о числе векторов в линейно независимой системе, которая линейно выражается через другую систему.
4. Системы образующих. Конечномерные пространства. Базис и размерность пространства.
5. Координаты вектора в базисе. замена базиса.
6. Изоморфизм линейных пространств.
7. Подпространства. Сумма и пересечение нескольких подпространств.
8. Теорема о связи размерностей суммы и пересечения двух подпространств.
9. Прямая сумма подпространств.
10. Ранг матрицы. Определения, теорема о ранге матрицы.
11. Теорема Кронекера–Капелли о системах линейных уравнений. Общее решение совместной системы линейных уравнений.
12. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений, фундаментальная система решений.
13. Линейные отображения. Теорема существования и единственности.
14. Матрица линейного отображения. Координаты образа вектора. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов.
15. Образ и ядро линейного отображения. Теорема о связи размерностей образа и ядра.
16. Линейные операции над линейными отображениями. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
17. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора.
18. Предложение о линейной независимости собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям. Признак диагонализируемости линейного оператора.
19. Инвариантные подпространства. Разложение Фиттинга.
20. Корневые подпространства. Теорема о корневом разложении. Алгоритм построения базиса корневого подпространства.

21. Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема о минимальном многочлене. Гамильтона–Кэли. Критерий диагонализируемости линейного оператора.
22. Жорданов базис нильпотентного оператора.
23. Нормальная форма Жордана. Матричная форма теоремы Жордана. Единственность жордановой формы. Критерий подобия матриц.
24. Линейные пространства со скалярным произведением. Длины векторов и углы между векторами. Неравенство Коши–Буняковского.
25. Ортогональность векторов. Ортогональные и ортонормированные базисы.
26. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
27. Ортогональное дополнение.
28. Линейные функционалы. Теорема о строении линейного функционала на пространстве со скалярным произведением.
29. Сопряженное отображение. Матрица сопряженного отображения.
30. Нормальный оператор. Ортогональность собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям нормального оператора. Теорема о строении нормального оператора на унитарном пространстве.
31. Теорема о строении нормального оператора на евклидовом пространстве.
32. Унитарный (ортогональный) оператор. Матрица унитарного (ортогонального) оператора. Характеризация унитарного (ортогонального) оператора как движения.
33. Теорема о строении унитарного (ортогонального) оператора на унитарном (евклидовом) пространстве.
34. Самосопряженный оператор. Матрица самосопряженного оператора. Теорема о строении самосопряженного оператора.
35. Неотрицательные самосопряженные операторы. Квадратные корни из неотрицательных самосопряженных операторов.
36. Полярное разложение оператора на унитарном (евклидовом) пространстве.
37. Сингулярные разложение оператора.
38. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
39. Закон инерции действительных квадратичных форм.
40. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.