

Вопросы к экзамену по курсу «Линейная алгебра»

1. Векторное пространство. Линейно зависимые и линейно независимые наборы векторов и их свойства.
2. Базис векторного пространства. Базис и система образующих. Координаты вектора в базисе. Равномощность базисов. Размерность векторного пространства. Дополнение линейно независимого набора векторов до базиса. Теорема об изоморфизме векторных пространств.
3. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств.
4. Прямая сумма подпространств.
5. Ранг матрицы по строкам и по столбцам. Теорема о ранге матрицы.
6. Ранг произведения матриц. Теорема Кронекера-Капелли.
7. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Векторная запись общего решения произвольной системы линейных уравнений.
8. Линейное отображение и линейный оператор. Теорема существования и единственности линейного отображения. Матрица линейного отображения в базисах и матрица линейного оператора в базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора и матрицы оператора при замене базиса.
9. Образ и ядро линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте. Алгоритмы нахождения базисов образа и ядра.
10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Теоремы о собственных векторах, относящихся к одному и тому же собственному значению и к разным собственным значениям. Собственные значения и корни характеристического уравнения оператора. Линейные операторы, приводимые к диагональному виду.
11. Модель Леонтьева.
12. Нильпотентные операторы. Жорданова нормальная форма матрицы. Основная теорема о нильпотентных операторах.
13. Цепочки ядер и образов степеней линейного оператора. Разложение Фитинга.
14. Корневые подпространства. Корневое разложение векторного пространства. Теорема о приведении матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме.
15. Алгоритм приведения матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме.
16. Скалярное произведение в векторном пространстве. Ослабленный закон сокращения в пространствах со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами. Неравенство Минковского. Расстояние между векторами. Вычисление скалярного произведения с помощью матрицы Грама.
17. Ортогональность. Линейная независимость ортогонального набора ненулевых векторов. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
18. Дополнение ортогональной системы ненулевых векторов до ортогонального базиса. Ортогональное дополнение к подпространству и его свойства. Ортогональное разложение векторного пространства.
19. Критерий линейной независимости векторов на языке матрицы Грама.
20. Псевдорешения системы линейных уравнений (определение и способ нахождения).
21. Параллелотоп. Вычисление объема параллелотопа.
22. Обобщенное векторное произведение векторов: определение, существование и единственность, способ вычисления.
23. Отображение, сопряженное к данному. Теорема о существовании, единственности и линейности сопряженного отображения.
24. Нормальные операторы. Свойства собственных векторов и собственных значений нормальных операторов.
25. Строение матрицы нормального оператора в унитарном пространстве.
26. Строение матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве.

27. Самосопряженные операторы. Эрмитовость матрицы самосопряженного оператора. Основная теорема о самосопряженном операторе. Свойства матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому.
28. Изометрические операторы. Сохранение длины вектора изометрическим оператором. Действие изометрического оператора на ортонормированный базис. Критерий изометричности оператора. Нормальность изометрического оператора.
29. Свойства корней характеристического уравнения изометрического оператора. Строение матрицы изометрического оператора в унитарном и евклидовом пространствах.
30. Полярное разложение. Теорема о полярном разложении: редукция к предложению о существовании корня квадратного из неотрицательного оператора и лемме о метрически равных операторах.
31. Предложение о существовании корня квадратного из неотрицательного оператора.
32. Лемма о метрически равных операторах.
33. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, приведение к главным осям). Приложение к классификации квадрик в пространстве.
34. Закон инерции квадратичных форм.
35. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности формы в терминах ее канонического вида. Критерий Сильвестра. Критерий отрицательной определенности формы.