Теорема Симона.

Язык кусочно тестируем тогда и только тогда, когда он распознается некоторым (конечным) $\mathscr{J}$-тривиальным моноидом.

Доказательство.

Необходимость. Пусть L – кусочно тестируем, т.е. L есть объединение $\sim_n$-классов для некоторого n. Ясно, что L распознается моноидом $\Sigma^*/\sim_n$. Остается доказать, что $\Sigma^*/\sim_n$ – $\mathscr{J}$-тривиален. Пусть $a\mathscr{J}b$, тогда $a\mathscr{D}b$, т.е. $a\mathscr{R}c\mathscr{L}b$, тогда из условия $a\mathscr{R}c$ найдутся элементы моноида x и y такие, что $a = cx,\ c = ay \Rightarrow a = ayx = a(yx)^n$ для любого n. По следствию из предложения 3 $(yx)^n = (yx)^n y$, значит $a(yx)^n = a(yx)^n y = ay = c$.

Аналогично из условия $c\mathscr{L}b$ получаем $c = b$, следовательно $a = b$ и моноид $\Sigma^*/\sim_n$ – $\mathscr{J}$-тривиален.

Достаточность. Пусть L распознается некоторым $\mathscr{J}$-тривиальным моноидом M, т.е. существует гомоморфизм $\varphi:\ \Sigma^* \to M$ такой, что $L = L\varphi\varphi^{-1}$. Обозначим через $\overline{f}$ образ элемента f языка L при этом гомоморфизме.

На M отношение $\leq_{\mathscr{J}}$ является порядком в силу $\mathscr{J}$-тривиальности M. Пусть n – длина максимальной цепи в этом моноиде. Покажем, что L есть объединение классов относительно $\sim_{2n-1}$. Для этого достаточно доказать, что если $f \sim_{2n-1} g$, то $\overline{f} = \overline{g}$. По предложению 4 можно считать, что f – подслово в g. Поскольку $f \sim_{2n-1} g$, то g получается из f вставкой букв, которые не дают новых подслов длины не более $2n-1$, причем на каждом шаге вставка букв не меняет отношение $f \sim_{2n-1} g$, следовательно можно считать, что g получается из f вставкой всего одной буквы. Значит $f = uv,\ g = uav$ для некоторых $u, v \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$ и мы находимся в условиях предложения 2, тогда будем считать, что выполняется $av \sim_n v$. По предложению 3 $v = v_1 v_2 \ldots v_n$, $c(a) = \{a\} \subseteq c(v_1) \subseteq c(v_2) \subseteq \ldots \subseteq c(v_n)$. Рассмотрим последовательность

$$1,\ v_n,\ v_{n-1}v_n,\ \ldots\ , v_1 v_2 \ldots v_n,$$

тогда

$$\overline{1} \geq_{\mathscr{J}} \overline{v_n} \geq_{\mathscr{J}} \overline{v_{n-1}v_n} \geq_{\mathscr{J}} \ldots \geq_{\mathscr{J}} \overline{v_1 \ldots v_n}.$$

По выбору n в этой цепи есть 2 одинаковых элемента (поскольку ее длина равна $n+1$), т.е найдутся $i,\ j$ такие что $\overline{v_i \ldots v_j \ldots v_n} = \overline{v_j \ldots v_n} = s$. Пусть $b \in c(v_i)$. Тогда $v_i = v_i' b v_i''$ и

$$s = \overline{v_i \ldots v_n} \leq_{\mathscr{J}} \overline{b v_i'' \ldots v_n} \leq_{\mathscr{J}} \overline{v_i'' \ldots v_n} \leq_{\mathscr{J}} \overline{v_j \ldots v_n} = s.$$

Значит, все элементы в этой цепочке неравенств равны s, $\Rightarrow \overline{b}s = s$. Среди букв b встречается и $a, \Rightarrow \overline{a}s = s \Rightarrow \overline{av} = \overline{av_1 \ldots v_n} = \overline{v_1 \ldots v_n} = \overline{v}$, откуда $\overline{g} = \overline{uav} = \overline{u}\overline{av} = \overline{u}\overline{v} = \overline{uv} = \overline{f}$. □

Определение. Преобразование α упорядоченного множества $< X, \leq >$ называется направленным (экстенсивным), если $x\alpha \geq x$, монотонным, если для $x \leq y$ выполняется $x\alpha \leq y\alpha$.

Обозначим через C_n все направленные монотонные преобразования n-элементной цепи, через R_n – все рефлексивные отношения на n-элементном множестве, через U_n – подполугруппу верхнетреугольных матриц в R_n.

Теорема (Страубинг, 1980)

Для конечного моноида M следующие условия эквивалентны:

(1) M – $\mathscr{J}$-тривиален
(2) M делит C_n для некоторого n
(3) M делит R_n для некоторого n
(4) M делит U_n для некоторого n.

Теорема Щютценберже

Напомним определение беззвёздного языка.

Определение 1. *Язык называется беззвёздным, если его можно получить из не более чем одноэлементных с помощью булевых операций и операции умножения.*

Лемма 1. *Полугруппа S является $\mathscr{H}$-тривиальной* $\Leftrightarrow \exists n : x^n = x^{n+1}$.

Доказательство. **Необходимость.** В силу конечности S

$$\forall x \in S, \exists n, k : x^n = x^{n+k}.$$

Элементы x^n и x^{n+k} находятся в одном $\mathscr{H}$-классе. Значит в силу того, что S – $\mathscr{H}$-тривиальна, $x^n = x^{n+k}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $x\mathscr{H}y \Rightarrow \exists a, b, c, d \in S^1$:

$$x = ay, x = yc$$

$$y = bx, y = xd$$

Тогда $x = ay = axd = a^n x d^n$, $y = xd = a^n x d^{n+1} = a^n x d^n = x$. То есть $y = x$. Это и означает, что S – $\mathscr{H}$-тривиальна. □

Теорема 1 (Щютценберже). *Язык является беззвёздным тогда и только тогда, когда он распознаётся некоторым $\mathscr{H}$-тривиальным моноидом.*

Доказательство. **Необходимость.** Покажем, что булевы операции и умножение сохраняют апериодичность распознающего моноида.

1. Пусть некоторый язык $L \subseteq \Sigma^*$ распознаётся моноидом M. Тогда язык $\Sigma^* \setminus L$ распознаётся тем же моноидом M:

$$L = P\phi^{-1} \Leftrightarrow \Sigma^* \setminus L = (M \setminus P)\phi^{-1}$$

2. Пусть есть два языка L_1 и L_2:

$$\phi_1 : \Sigma^* \to M_1; L_1 = P_1\phi_1^{-1}$$

$$\phi_2 : \Sigma^* \to M_2; L_2 = P_2\phi_2^{-1}$$

Рассмотрим $P_1 \times P_2 \subseteq M_1 \times M_2 . \phi : \Sigma^* \to M_1 \times M_2$, где $\phi = \phi_1 \times \phi_2$. То есть $w\phi = (w\phi_1, w\phi_2)$, а значит $(P_1 \times P_2)\phi^{-1} = L_1 \cap L_2$.

3. Аналогично $Q\phi^{-1} = L_1 \cup L_2$, для $Q = M_1 \times P_2 \cup P_1 \times M_2$.

4. Построим апериодичный моноид, распознающий L_1L_2. Обозначим $\mathcal{P}$ – множество всех подмножеств множества $M_1 \times M_2$.

   Обозначим $M_1 \diamond M_2 = M_1 \times \mathcal{P} \times M_2$. На элементах $M_1 \diamond M_2$ определим операцию умножения следующим образом:

$$(m_{11}, N_1, m_{21}) \cdot (m_{12}, N_2, m_{22}) = (m_{11}m_{12}, m_{11}N_2 \cup N_1m_{22}, m_{21}m_{22}),$$

   где если $N = \{(n_1, n_2)\}$, то

$$m_{11}N = (m_{11}n_1, n_2),$$

$$Nm_{22} = (n_1, n_2m_{22}).$$

   Эта операция по сути является умножением матриц такого вида:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & N_1 \\ 0 & m_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{12} & N_2 \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}m_{12} & m_{11}N_2 \cup N_1m_{22} \\ 0 & m_{21}m_{22} \end{pmatrix}.$$

   $M_1 \diamond M_2$ – это моноид. Единица в нем выглядит так:

$$1_{M_1 \diamond M_2} = \begin{pmatrix} 1_{M_1} & \emptyset \\ 0 & 1_{M_2} \end{pmatrix}$$

   Предложение 1. *Пусть языки L_1 и L_2 распознаются, соответственно, моноидами M_1 и M_2. Тогда язык L_1L_2 распознаётся моноидом $M_1 \diamond M_2$.*

   Доказательство.

$$\phi_1 : \Sigma^* \to M_1;$$

$$\phi_2 : \Sigma^* \to M_2;$$

$$\phi : \Sigma^* \to M_1 \diamond M_2,$$

$$w\phi = (w\phi_1, \{(u\phi_1, v\phi_2) | uv = w\}, w\phi_2).$$

   Проверим, что ϕ – это гомоморфизм. Для этого проверим равенство $(ww')\phi = w\phi w'\phi$. Введём вспомогательные множества K и L следующим образом:

$$K = \{(u\phi_1, v\phi_2) | uv = w\},$$

$$L = \{(u\phi_1, v\phi_2) | uv = w'\}.$$

   Вычислим значение правой и левой частей проверяемого равенства:

$$w\phi w'\phi = ((w\phi_1 w'\phi_1, M, w\phi_2 w'\phi_2) = ((ww')\phi_1, M, (ww')\phi_2),$$

$$(ww')\phi = ((ww')\phi_1, N, (ww')\phi_2),$$

где

$$M = w\phi_1 L \cup K w' \phi_2,$$

$$N = \{(u\phi_1, v\phi_2) | uv = ww'\}.$$

Необходимо показать, что $M = N$.

Равноделимость. Если $uv = ww'$, то имеет место один из двух вариантов:

(a) $u = wz, w' = zv$ – слова 1-ого типа;

(b) $w = uz, v = zw'$ – слова 2-ого типа;

Теперь легко понять, что множества M и N совпадают. Действительно, $w\phi_1 L = w\phi_1\{(z\phi_1, v\phi_2)|zv = w'\}$ – это слова 1-ого типа из N, аналогично $Kw'\phi_2$ – это слова 2-ого типа из N. Значит $N = w\phi_1 L \cup K w'\phi_2 = M$, то есть ϕ – это гомоморфизм.

Покажем теперь, что $L_1L_2 = (L_1L_2)\phi\phi^{-1}$. То есть, что если $z\phi \in (L_1L_2)\phi$, то $z \in L_1L_2$.

Если $z\phi \in (L_1L_2)\phi$, то $\exists w \in L_1L_2 : z\phi = w\phi$. Тогда тройки из определения ϕ совпадают. В частности совпадают множества пар:

$$I_1 = \{(u\phi_1, v\phi_2)|uv = z\} = \{(u\phi_1, v\phi_2)|uv = w\} = I_2;$$

$$w \in L_1L_2 \Rightarrow \exists u' \in L_1, v' \in L_2 : u'v' = w;$$

$$(u'\phi_1, v'\phi_2) \in I_1 \Rightarrow \exists u, v : uv = z, (u'\phi_1, v'\phi_2) = (u\phi_1, v\phi_2).$$

Но если $u'\phi_1 = u\phi_1$, то $u \in L_1$ и, аналогично, если $v'\phi_2 = v\phi_2$, то $v \in L_2$. Значит $z = uv \in L_1L_2$. $\square$

Моноиды M_1 и M_2 – $\mathscr{H}$-тривиальны. Используя это, легко показать, что выполняется условие леммы $x^n = x^{n+1}$, для моноида матриц $M_1 \diamond M_2$. Это означает, что моноид $M_1 \diamond M_2$ тоже $\mathscr{H}$-тривиален.

Таким образом булевы операции и умножение сохраняют апериодичность распознающего моноида. Поскольку все не более чем одноэлементные языки распознаются апериодичными моноидами, то все беззвёздные языки также распознаются апериодичными моноидами. То есть доказана необходимость в теореме Щютценберже.

Достаточность. Доказательство проведём индукцией по числу элементов моноида M, распознающего данный язык L.

База индукции. $|M| = 1 \Rightarrow L = \emptyset$, либо $L = \Sigma^*$. Но как $\emptyset$, так и Σ^* – беззвёздные языки. Таким образом база индукции доказана.

Шаг индукции.

$$L = P\phi^{-1} = \bigcup_{m \in P} \{m\}\phi^{-1}$$

Это означает, что достаточно доказать беззвёздность только для языка, являющегося прообразом некоторого элемента $m \in M$.

Пусть $|M| > 1$. Обозначим K – пересечение всех не менее чем двухэлементных идеалов M.

Предположим сначала, что $m \notin K$. В этом случае существует не менее чем двухэлементный идеал I, который не содержит m. Рассмотрим фактор ψ по этому идеалу. Все элементы идеала M склеятся в один элемент O. Таким образом $|M\psi| = |\{O\} \cup M \setminus I| = 1 + |M \setminus I| < |M|$, и $m\psi^{-1}\phi^{-1} = L$. ψ – это гомоморфизм, не меняющий свойства $\mathscr{H}$-тривиальности. Пользуясь предположением индукции, получаем, что L – это беззвёздный язык.

Второй случай, когда $m \in K$, будет рассмотрен на следующей лекции. $\square$