§10. Частные языка. Критерий регулярности в терминах левых частных, теорема Майхилла-Нероуда.

Опр. Пусть $w = xyz$.
Префиксом слова w называется слово x.
Суффиксом слова w называется слово z.
Подсловом слова w называется слово y.

Префикс (суффикс, подслово) называется собственным, если он не равен всему слову w.

Опр. Пусть L и K – языки над общим алфавитом Σ. Будем называть правое частное – язык $LK^{-1} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in K : wu \in L\}$.
«префиксы слов языка L, относительно K»

Опр. Пусть L и K – языки над общим алфавитом Σ. Будем называть левое частное – язык $K^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in K : uw \in L\}$.
«суффиксы слов языка L, относительно K»

Пример.

Пусть L = {*abba*, *baab*}, K = {*a*, *b*},

$K^{-1}L = \{bba, aab\}$.

$a^{-1}abba = bba, \; b^{-1}baab = aab$.

Обозначение: $u^{-1}L = \{u\}^{-1}L$

Определим на Σ^* бинарное отношение $\sim_L$:

$u \sim_L v \iff u^{-1}L = v^{-1}L$.

Отношение $\sim_L$ рефлексивно, симметрично, транзитивно $\Rightarrow$

$\sim_L$ – отношение эквивалентности.

Опр. Будем говорить, что отношение эквивалентности имеет конечный индекс, если разбиение содержит конечное количество классов эквивалентности.

Теорема. Язык L регулярный $\Leftrightarrow$ отношение $\sim_L$ имеет конечный индекс.

Доказательство:

$\Rightarrow$) Пусть язык L допускается ДКА А. Определим на Σ^* бинарное отношение $\sim_A$: $u \sim_A v \Leftrightarrow$ автомат по слову *u* переходит из начального состояния в состояние q', такое же, как и по слову *v*.

Лемма. $\forall u, v \in \Sigma^*: u \sim_A v \Rightarrow u \sim_L v$.

Лемма. $\forall u, v \in \Sigma^* : \ u \sim_A v \ \Rightarrow u \sim_L v$.

Доказательство:

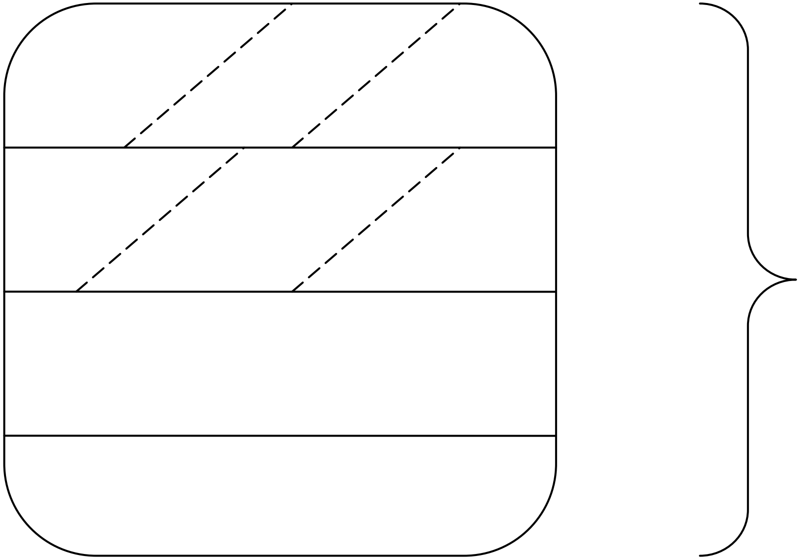
Пусть $u \sim_A v$.

$u^{-1}L = \{w \mid uw \in L\} =$ {слова, по которым автомат переходит из q' в заключительное состояние}

$v^{-1}L = \{w \mid vw \in L\} =$ {слова, по которым автомат переходит из q' в заключительное состояние}, где q' одно и тоже.

$\Rightarrow \ u^{-1}L = v^{-1}L$. Лемма доказана.

Замечание: каждый класс разбиения по $\sim_A$ целиком лежит в каком-нибудь классе разбиения по $\sim_L$.



Классы
по $\sim_L$

(продолжение доказательства теоремы)

По отношению $\sim_A$ количество классов эквивалентности не превышает количества состояний автомата. Следовательно, количество классов конечно.

По отношению $\sim_L$ количество классов эквивалентности меньше либо равно количеству классов по $\sim_A$. Следовательно, количество также конечно.

$\Leftarrow$) Дано: количество классов эквивалентности по отношению $\sim_L$ конечно.

Обозначим Q = {классы эквивалентности по $\sim_L$ }.
Для обозначения класса, соответствующего u, будем использовать $u^{-1}L$.

Построим ДКА A=(Q, Σ, φ, q_0, Q_F):

$$q_0 = \varepsilon^{-1}L = L;$$

$$Q_F = \{u^{-1}L \mid u \in L\};$$

$$\varphi(u^{-1}L, a) = a^{-1}(u^{-1}L) = (ua)^{-1}L.$$

Будем называть его «автомат левых частных»

Покажем, что автомат левых частных допускает язык L.

$$w \in L(A) \Leftrightarrow w^{-1}L \in Q_F \ ,$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in L: \ w^{-1}L = u^{-1}L \ \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \in u^{-1}L \Leftrightarrow \varepsilon \in w^{-1}L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w \in L$$

Теорема доказана.

Теорема (Майхилла-Нероуда, без док-ва).
Для регулярного языка L минимальный приведенный автомат, допускающий L, имеет количество состояний равное количеству классов в разбиении по отношению $\sim_L$.

Пример доказательства нерегулярности языка:

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathrm{N}\}$.

Укажем бесконечный набор слов, попарно не эквивалентных по отношению $\sim_L$:

$a, a^2, a^3, \ldots, a^m, \ldots$

$\forall m, k \in N : m \neq k \rightarrow (a^m)^{-1} L \neq (a^k)^{-1} L$, т.к.

$(a^m)^{-1} L = \{a^t b^{t+m}\}$, $(a^k)^{-1} L = \{a^t b^{t+k}\}$ для всех $t \in N \cup \{0\}$.

Следовательно, разбиение по $\sim_L$ содержит бесконечное количество классов. Язык L не регулярный.

Замечание: отношение $\sim_L$ на свободном моноиде $(\Sigma^*,\cdot)$ является правой конгруэнцией, т.е. отношением эквивалентности, сохраняющимся при операции справа –

$$\forall u, v, w \in \Sigma^* : \ u \sim_L v \ \Rightarrow \ u \cdot w \sim_L v \cdot w.$$