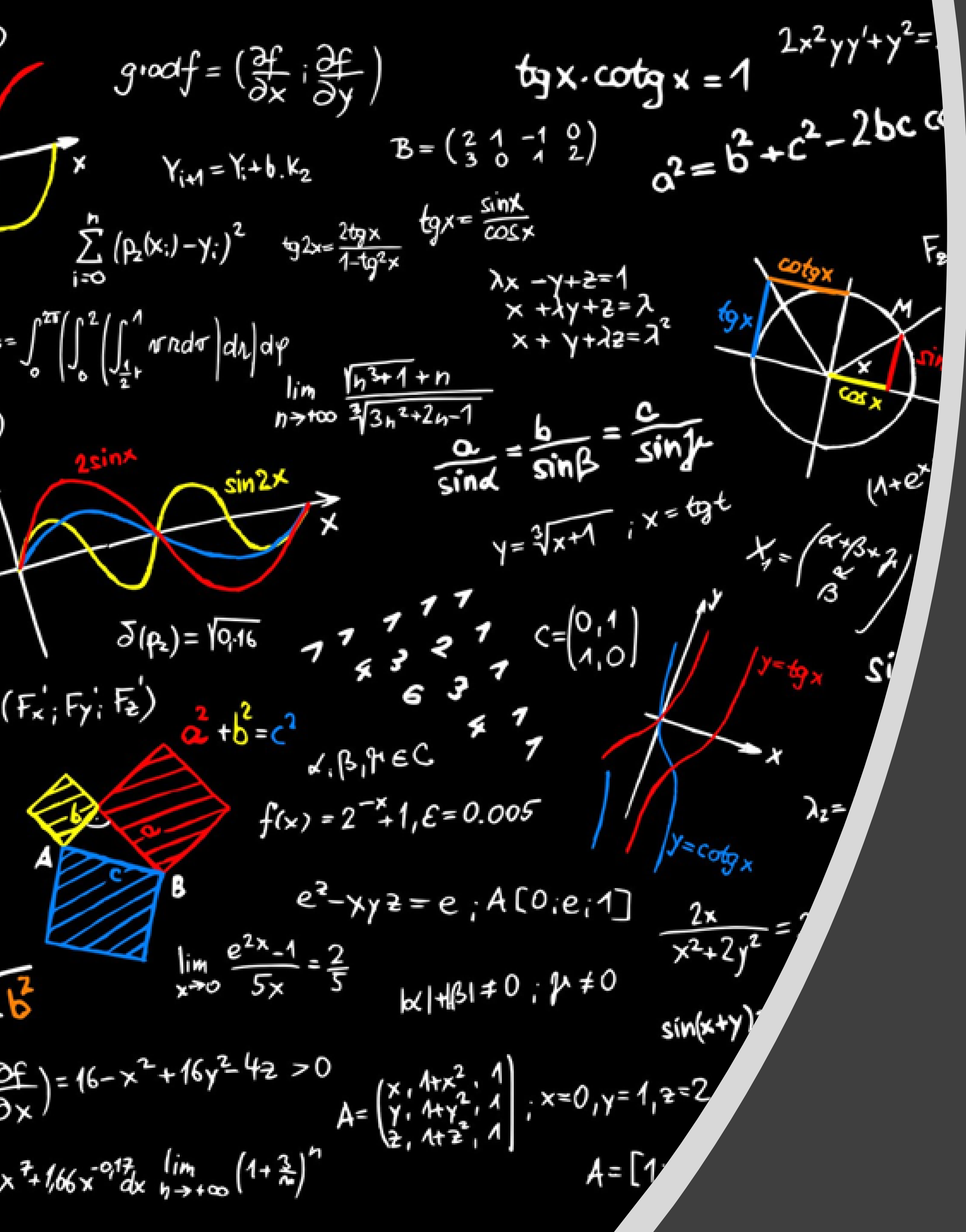


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 8

Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Лекция 8

Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла *II* рода от пути интегрирования

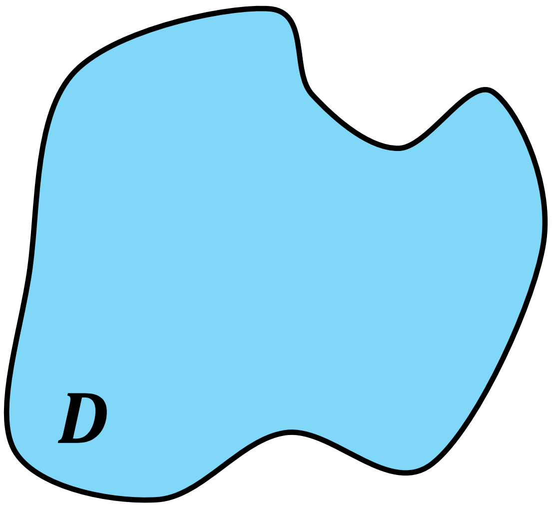
1. Формула Грина.
2. Примеры вычисления циркуляции.
3. Понятие потенциала и потенциального поля.
4. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования
5. Примеры нахождения потенциала.

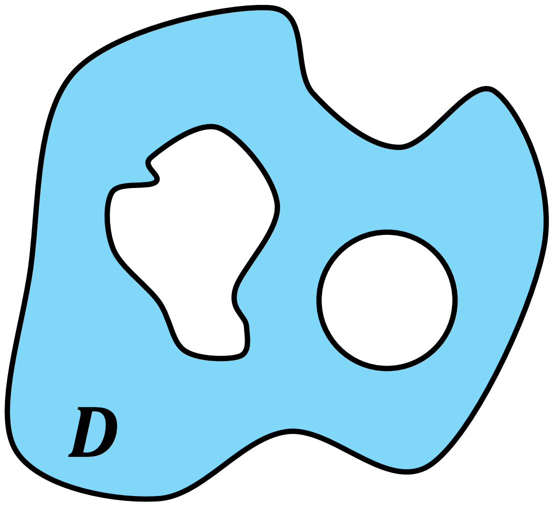
Вспомогательные определения

1) Какое множество D плоскости Oxy называется *областью*?
2) Какая область называется *правильной* вдоль оси Ox или Oy?
3) Какая кривая называется *кусочно-гладкой*?

<u>Опр</u>. Область называется односвязной, если она без «дырок».

Вспомогательные определения.





<u>Пример 1</u>
односвязной
области *D*

<u>Пример 2</u>
не односвязной
области *D*

Формула Грина

Теорема 1. Пусть

- $D -$ **правильная, односвязная область** на ПЛОСКОСТИ,
- ограниченная **кусочно-гладкой замкнутой кривой** Г **(контуром)**, ориентированной **против часовой стрелки,**
- $\vec{a} -$ **непрерывно-дифференцируемое** в D **векторное поле**.

Формула Грина

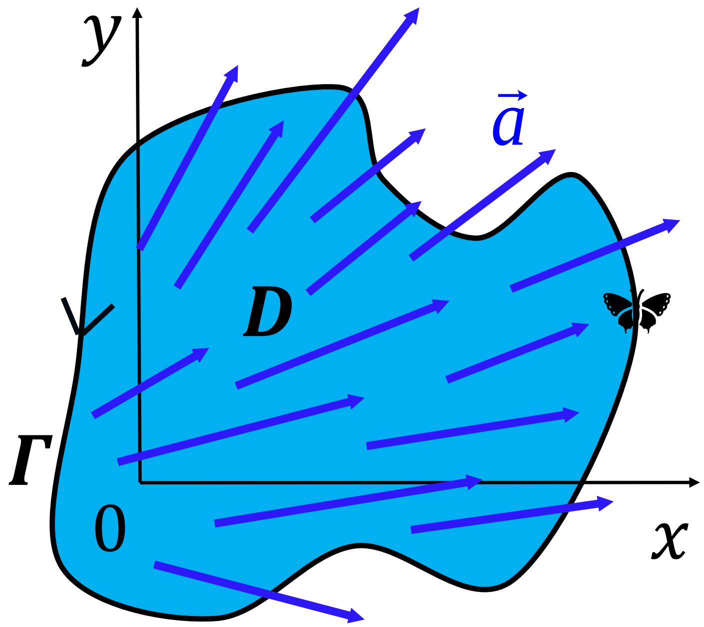
Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a}, d\vec{r}) = \oint\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy$$

Криволинейный интеграл по контуру вычисляется сведением к двойному по области внутри контура!

Формула Грина. Иллюстрация



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

<u>Задача 1</u>. (*II* способ: по формуле Грина).
Найти работу гравитационного поля у поверхности земли по произвольному замкнутому контуру Г, действующего на груз единичной массы (циркуляцию) против часовой стрелки.

<u>Решение</u>. Дано векторное поле:

$$\vec{a} = -\vec{g} = (0, -g) = \left(a_x, a_y\right)$$

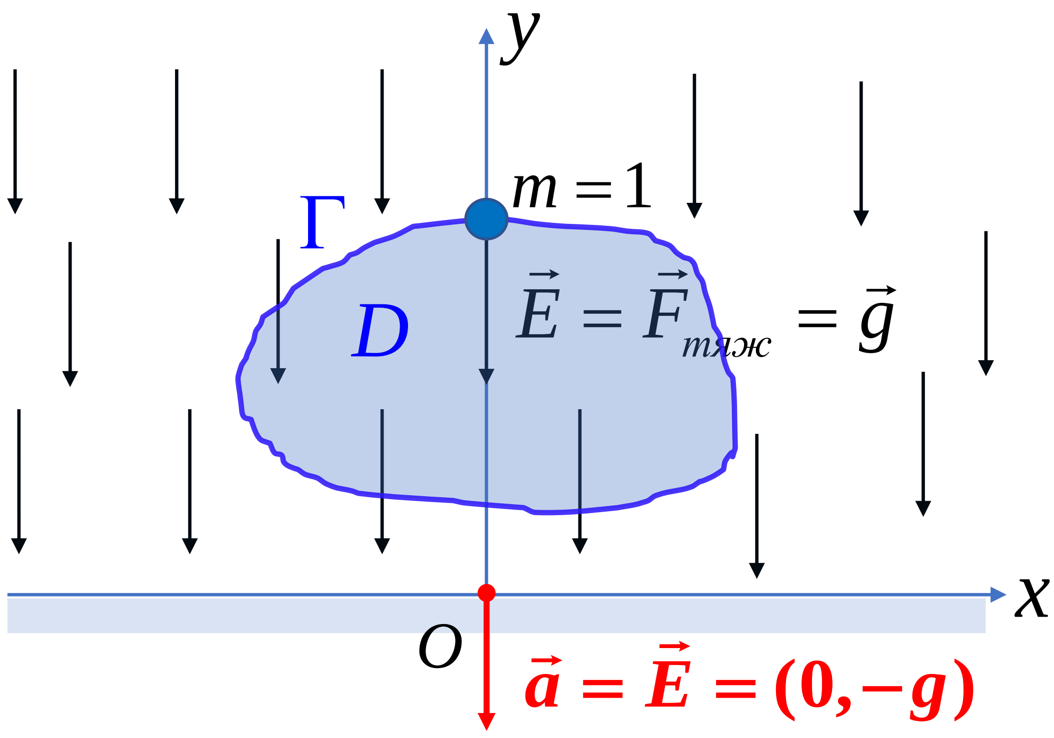
Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

$$A=\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a},d\vec{r})=\oint\limits_{\Gamma}a_x dx+a_y dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial a_y}{\partial x}&=(-g)'\Big|_x=0,\\ \frac{\partial a_x}{\partial y}&=(0)'\Big|_y=0\end{aligned}\right|\Rightarrow A=\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a},\overrightarrow{dr})=0$$

Получили
тот же ответ, что и I способом!

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1. Иллюстрация



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

Задача 2. (*II* способ: по формуле Грина). Найти работу электростатических сил точечного заряда q по перемещению единичного заряда вдоль единичной окружности (циркуляцию) против часовой стрелки.

Решение (см. задачу 2 лекции 7):

$$\vec{a} = k \cdot q\left(\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}, \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \right) = (a_x, a_y)$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

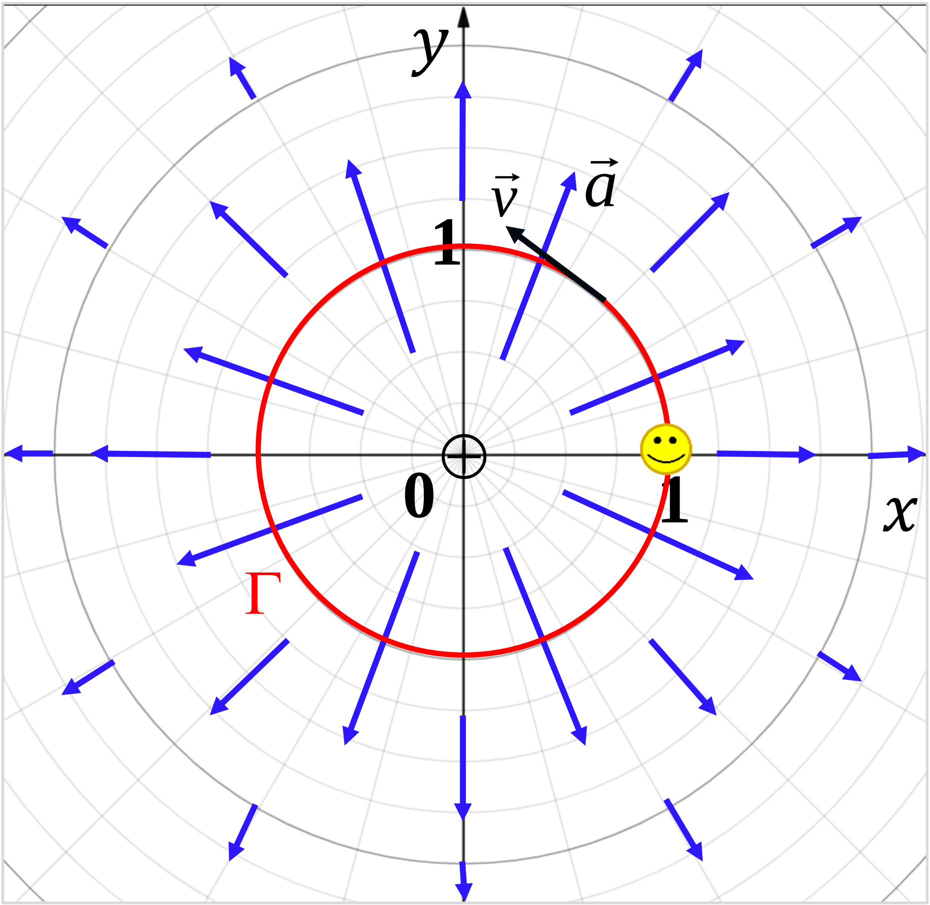
По формуле Грина

$$A=\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{a},d\vec{r}\,\right)=\oint\limits_{\Gamma}a_x dx+a_y dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy$$

Упр.:

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y}=-\frac{3kq\,xy}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

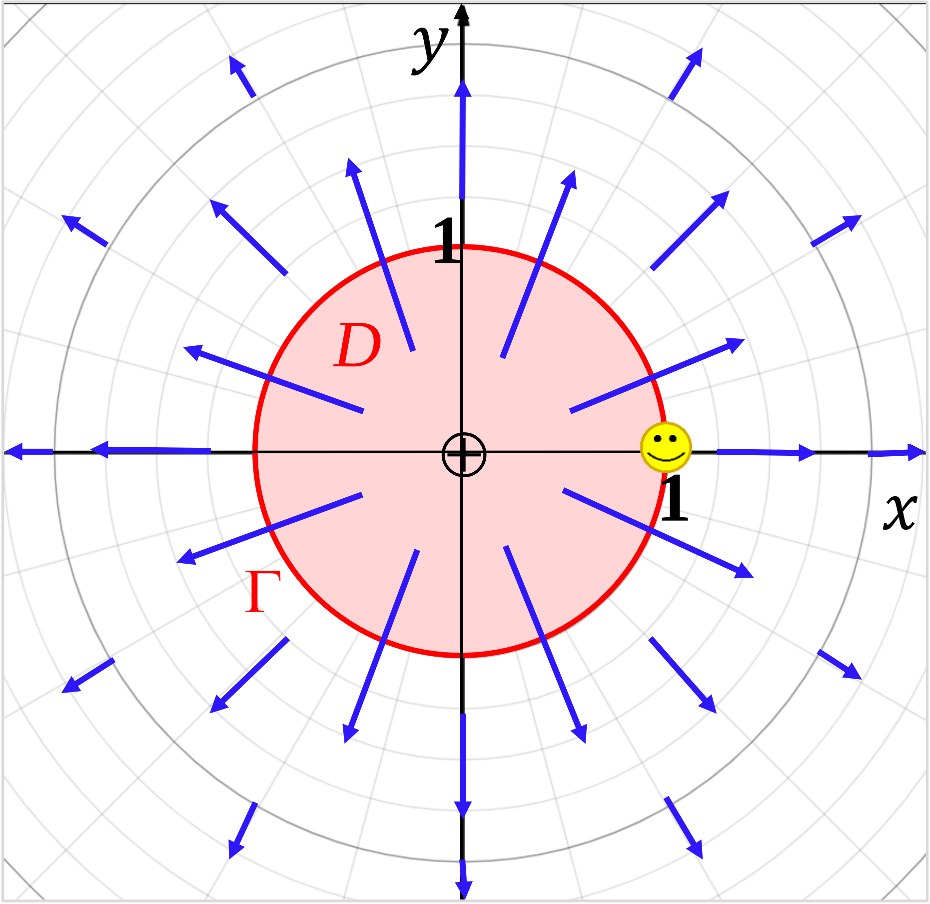


$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2



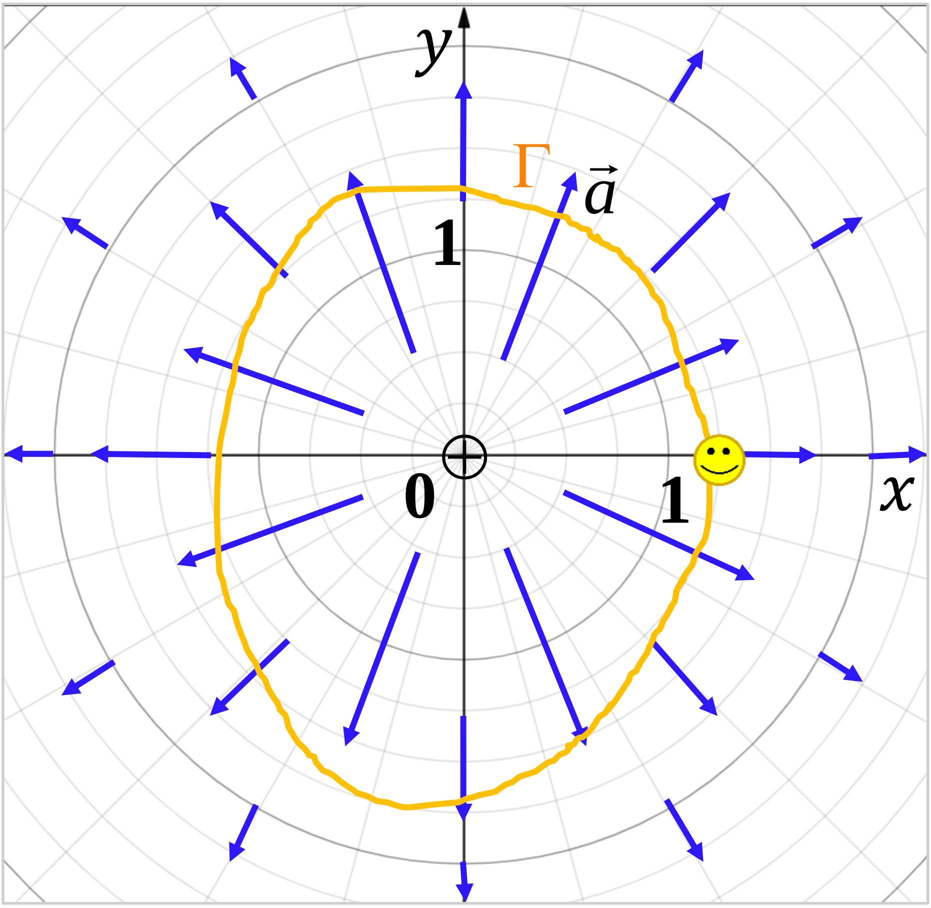
$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Получили тот же результат, что и I способом!

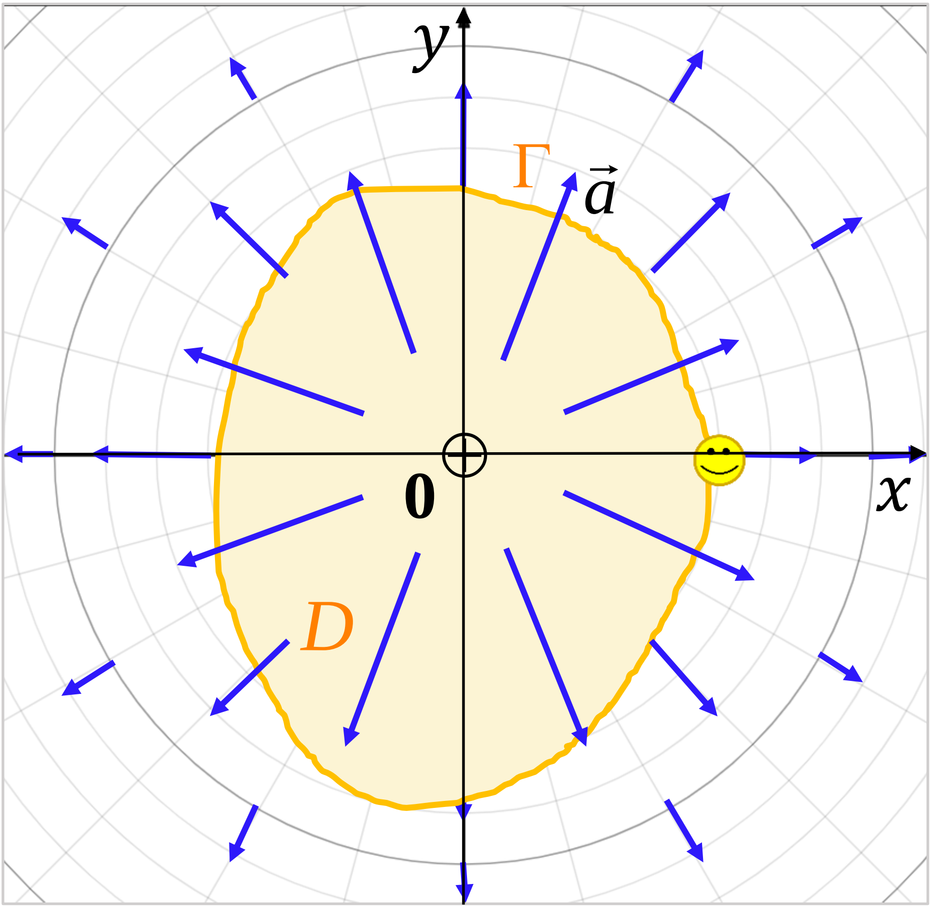
Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2



Заметим, что контур Г может быть произвольным:

$$A = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2



Заметим, что контур Γ может быть произвольным:

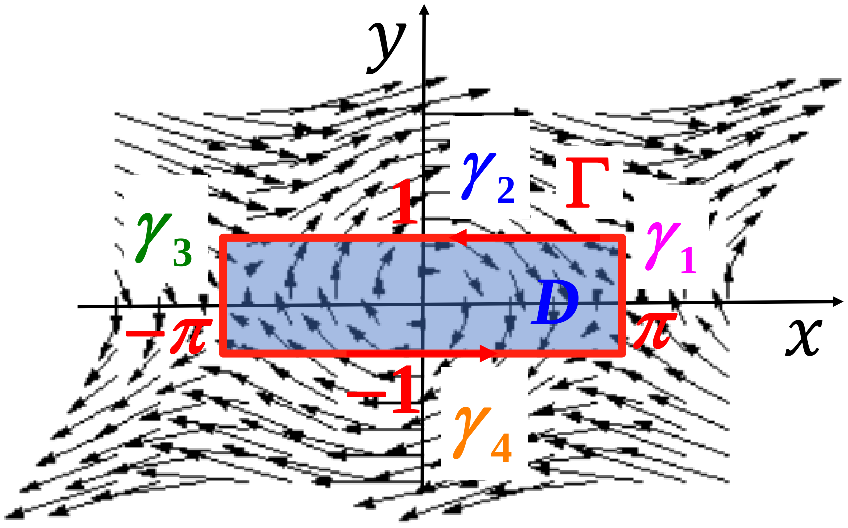
$$A = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3

Задача 3. Найти двумя способами криволинейный интеграл II рода данного поля по замкнутому контуру Г (циркуляцию), являющегося границей прямоугольника, изображенного на рисунке если движение идет против часовой стрелки.

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *I*-м способом

<u>Решение:</u> <u>*I* способ</u>: непосредственное вычисление.



$$\vec{a} = (y, -\sin x) = \left(a_x, a_y\right)$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *I*-м способом

$$\gamma_1:\begin{cases} x=\pi \\ y=t \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} dx=0 \\ dy=dt \end{cases}$$

$$-1\to t\to 1$$

$$\gamma_2:\begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} dx=dt \\ dy=0 \end{cases}$$

$$\pi\to t\to -\pi$$

$$\gamma_3:\begin{cases} x=-\pi \\ y=t \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} dx=0 \\ dy=dt \end{cases}$$

$$1\to t\to -1$$

$$\gamma_4:\begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} dx=dt \\ dy=0 \end{cases}$$

$$-\pi\to t\to \pi$$

$$\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a},\overrightarrow{dr})=\int\limits_{\gamma_1}(\vec{a},\overrightarrow{dr})+\int\limits_{\gamma_2}(\vec{a},\overrightarrow{dr})+\int\limits_{\gamma_3}(\vec{a},\overrightarrow{dr})+\int\limits_{\gamma_4}(\vec{a},\overrightarrow{dr})$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *I*-м способом

$$\int\limits_{\gamma_1} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = \int\limits_{\gamma_1} a_x dx + a_y dy = \int\limits_{\gamma_1} y dx - \sin x dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (t \cdot 0 + \sin \pi dt) = \int\limits_{-1}^{1} 0\, dt = 0$$

$$\int\limits_{\gamma_2} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = \int\limits_{\gamma_2} a_x dx + a_y dy = \int\limits_{\gamma_2} y dx - \sin x dy =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{-\pi} (1 \cdot dt - \sin t \cdot 0) = t\Big|_{\pi}^{-\pi} = (-\pi) - \pi = -2\pi$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *I*-м способом

Аналогично, $\int\limits_{\gamma_3} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0,$

$\int\limits_{\gamma_4} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = -2\pi$ (упражнение, 1б)

$$\oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0 - 2\pi + 0 - 2\pi = -4\pi$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *II*-м способом

<u>*II* способ</u>: вычисление по формуле Грина.

$$I = \oint\limits_{\Gamma} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \oint\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_y}{\partial x} &= \left(-\sin x\right)'_x = -\cos x, \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} &= \left(y\right)'_y = 1 \end{aligned} \right| \Rightarrow$$

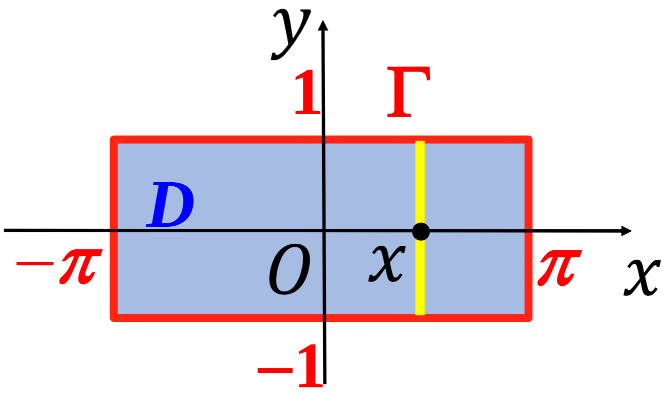
Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *II*-м способом

$$I=\iint\limits_{D}\left(-\cos x-1\right)dxdy=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}dx\int_{-1}^{1}\left(-\cos x-1\right)dy=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}dx\left(-\cos x-1\right)\int_{-1}^{1}dy=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}dx\left(-\cos x-1\right)\left(y\right)\Big|_{-1}^{1}=$$



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *II*-м способом

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx\left(-\cos x - 1\right)\cdot 2 =$$

$$= 2\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} dx\right) = 2\left(-\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} - x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= 2\left((-\sin\pi) - (-\sin(-\pi)) - (\pi - (-\pi))\right) = -4\pi$$

Тот же ответ!

Понятие потенциала и потенциального векторного поля

Опр. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P), P \in D,$ где D – область на плоскости (в пространстве), называется потенциальным, если существует такая дифференцируемая функция $u = u(P)$, что справедливо равенство

$$\boxed{\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = (u'_x, u'_y)}$$

Функция $u = u(P)$ называется потенциалом поля $\vec{a} = \vec{a}(P)$.

Понятие потенциала и потенциального векторного поля

<u>Замечание 1</u>. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$, $P \in D$, где D – область на плоскости (в пространстве) является **потенциальным**, если существует такая дифференцируемая функция (потенциал) $u = u(P)$, что справедливо равенство

$$\boxed{du = (\vec{a}, \overrightarrow{dr})}$$

т.е.

$$\boxed{du = a_x dx + a_y dy} \quad \boxed{(du = a_x dx + a_y dy + a_z dz)}$$

Понятие потенциала и потенциального векторного поля

Доказательство проведем для плоскости.

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u \Leftrightarrow (a_x, a_y) = (u'_x, u'_y) \Leftrightarrow$$

$$a_x = u'_x,\ a_y = u'_y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ a_x dx + a_y dy = u'_x dx + u'_y dy = du \ \blacksquare$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (для плоскости)

Теорема 2. Пусть $\vec{a} = \vec{a}(P), P \in D, -$ гладкое векторное поле, D – односвязная область. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) поле $\vec{a} = \vec{a}(P) -$ *потенциально*;

(2) *интеграл* $\int_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{a}(P), d\vec{r})$ *не зависит от пути интегрирования*;

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования)

(3) *циркуляция* $\oint_{\Gamma}(\vec{a}, d\vec{r})$ по любому замкнутому контуру Γ, лежащему в области D, *равна нулю*;

(4) *поле* $\vec{a} = \vec{a}(P)$ *безвихревое* ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{0}$), т.е. выполняется условие

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Доказательство.

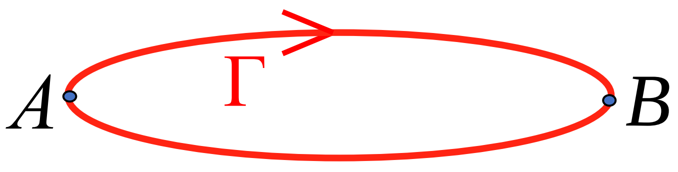
$$(1) \Rightarrow (2): \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \overbrace{a_x dx + a_y dy}^{du} = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} du =$$

$= u(B) - u(A)$ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и заключительной точки

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

$$(2)\Rightarrow(3):\ \oint\limits_{\Gamma}(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}(\vec{a},d\vec{r})+\int\limits_{\overset{\cup}{BA}}(\vec{a},d\vec{r})=$$

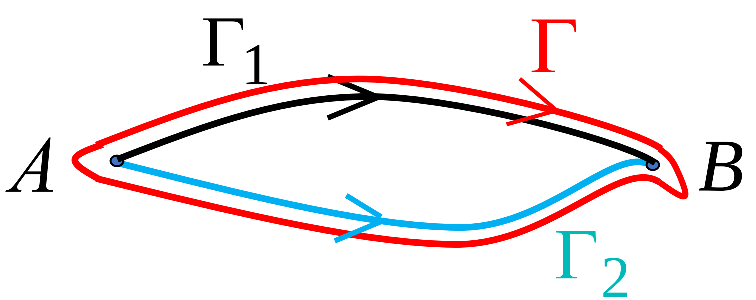
$$=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}(\vec{a},d\vec{r})-\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}(\vec{a},d\vec{r})=0$$



Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

$$(3)\Rightarrow(2):\ 0=\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}(\vec{a},d\vec{r})+\int\limits_{\overset{\cup}{BA}}(\vec{a},d\vec{r})=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{a},d\vec{r})-\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{a},d\vec{r})\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{a},d\vec{r})$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

(2) ⇒(1): Положим для любой точки $P \in D$

$$\boxed{u(P) = \int\limits_{\overset{\smile}{AP}} a_x dx + a_y dy}$$

$$\Rightarrow du = d\left(\int\limits_{\overset{\smile}{AP}} a_x dx + a_y dy \right) = a_x dx + a_y dy$$

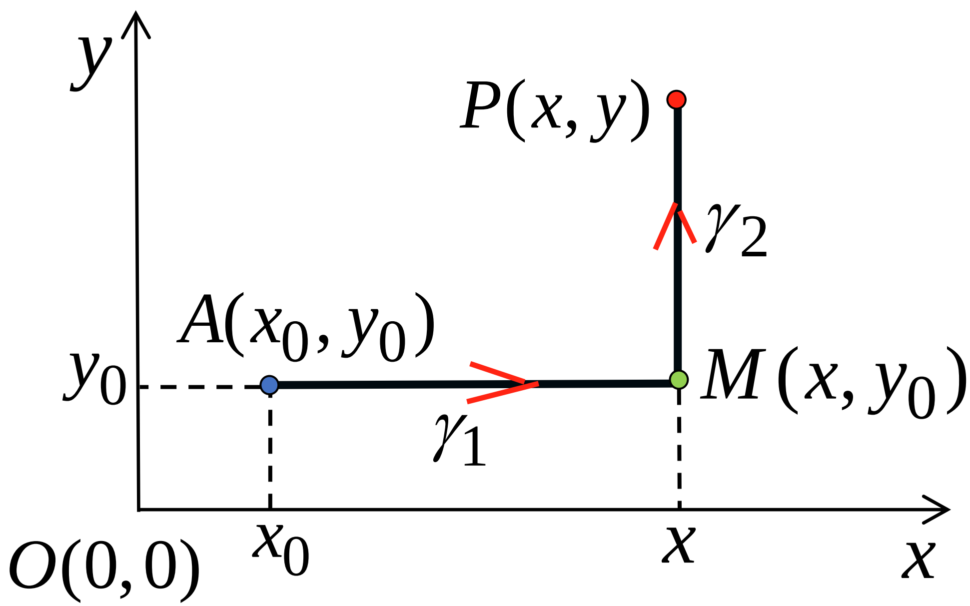
По <u>Замечанию 1</u> поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$ потенциально.

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Кривую $\overset{\smile}{AP}$ можно выбирать произвольной, так как *интеграл не зависит от пути интегрирования*.

Обычно выбирают такую, как показано на рисунке.

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (для плоскости)



Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (для плоскости)

Таким образом, имеем $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$

$$(4) \Rightarrow (3): \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

$(1) \Rightarrow (4)$ без док-ва

Следовательно, $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ ■

Вычисление потенциала. Задача 4

Задача 4. Доказать, что поле $\vec{a} = (2xy, x^2)$ потенциально и вычислить его потенциал, т.е. такую функцию $u = u(x, y)$ такую, что

$$du = a_x dx + a_y dy = 2xydx + x^2 dy$$

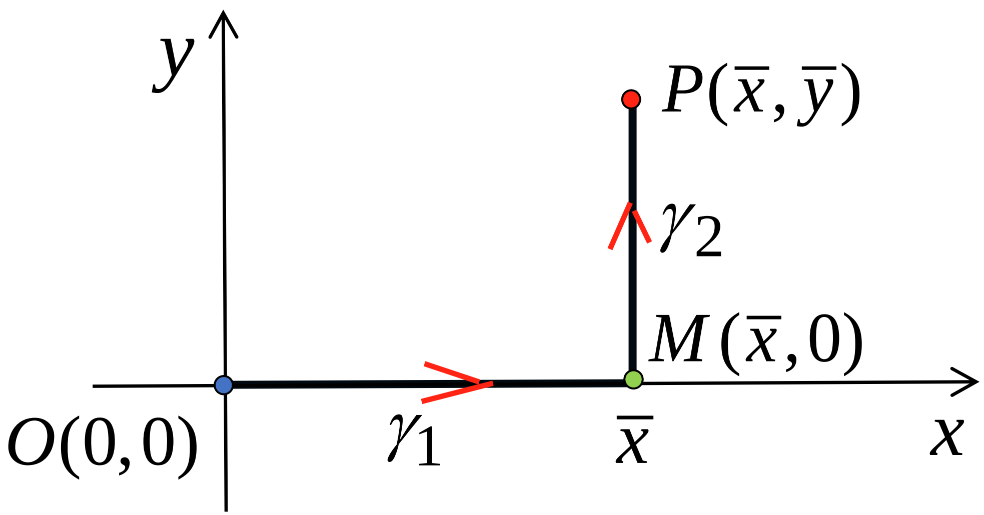
Вычисление потенциала. Задача 4

Решение.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial a_y}{\partial x} &= \left(x^2\right)'_x = 2x\\ \frac{\partial a_x}{\partial y} &= \left(2xy\right)'_y = 2x\end{aligned}\right| \Rightarrow$$ поле $\vec{a} = (a_x, a_y)$ потенциально

Зафиксируем точку $P(\bar{x}, \bar{y})$. «Проложим» наиболее простой путь от точки $O(0,0)$ до точки $P(\bar{x}, \bar{y})$.

Вычисление потенциала. Задача 4



$$OM:\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases} \qquad MP:\begin{cases} x = \overline{x} \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases}$$

$$0 \to t \to \overline{x} \qquad\qquad 0 \to t \to \overline{y}$$

Вычисление потенциала. Задача 4

$$u(\overline{x},\overline{y}) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} 2xydx + x^2dy =$$

$$= \int\limits_{\overset{\cup}{OM}} 2xydx + x^2dy + \int\limits_{\overset{\cup}{MP}} 2xydx + x^2dy =$$

$$= \int\limits_0^{\overline{x}} (2\cdot t\cdot 0dt + t^2\cdot 0) + \int\limits_0^{\overline{y}} \left(2\overline{x}t\cdot 0 + \overline{x}^2dt\right) =$$

Вычисление потенциала. Задача 4

$$= 0 + \int_0^{\overline{y}} \overline{x}^2 dt = \overline{x}^2 \int_0^{\overline{y}} dt = \overline{x}^2 t \Big|_0^{\overline{y}} = \overline{x}^2 \overline{y}$$

$$u(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}^2 \overline{y} \;\Rightarrow\; u(x, y) = x^2 y$$

<u>Проверка:</u> $u'_x(x, y) = 2xy = a_x;$

$$u'_y(x, y) = x^2 = a_y.$$

<u>Ответ:</u> $u(x, y) = x^2 y.$

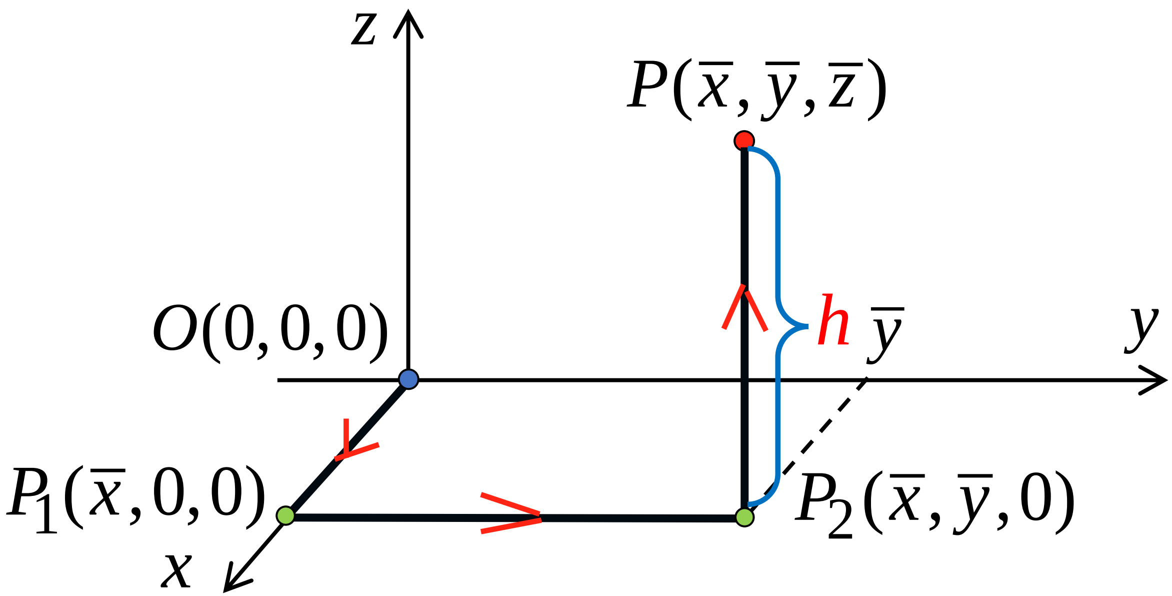
Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5

Задача 5. (*III* способ: при помощи потенциала). Найти работу силу тяжести поднятия груза массы $m = 1$ по винтовой лестнице радиуса R шага 1 на высоту h.

Решение: $\vec{a} = m\vec{g} = (0, 0, -g)$

Сначала найдем потенциал гравитационного поля $\vec{a}$. Для этого «проложим путь» от т. $O(0,0,0)$ до произвольной т. $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5

$$OP_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \\ dz = 0 \end{cases} \qquad P_1P_2: \begin{cases} x = \overline{x} \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$0 \to t \to \overline{x} \qquad\qquad 0 \to t \to \overline{y}$$

$$P_2P: \begin{cases} x = \overline{x} \\ y = \overline{y} \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = 0 \\ dz = dt \end{cases}$$

$$0 \to t \to \overline{z}$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5

$$u(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} 0 \cdot dx + 0 \cdot dy - g dz =$$

$$= -\int\limits_{\overset{\cup}{OP}} g dz = -\left(\int\limits_{\overset{\cup}{OP_1}} g dz + \int\limits_{\overset{\cup}{P_1 P_2}} g dz + \int\limits_{\overset{\cup}{P_1 P}} g dz \right) =$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5

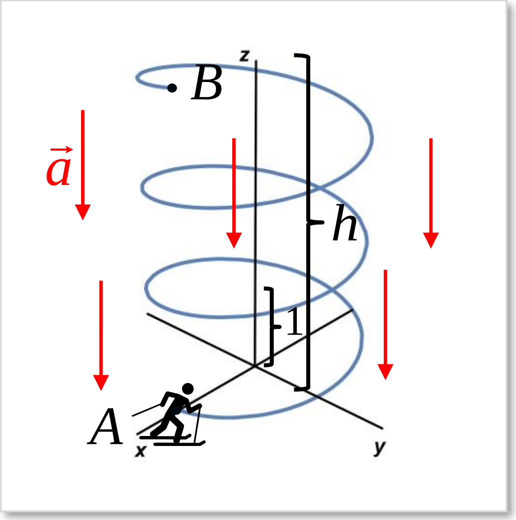
$$= -\left(\int_0^{\bar{x}} g \cdot 0 + \int_0^{\bar{y}} g \cdot 0 + \int_0^{\bar{z}} g \cdot dt \right) = -\int_0^{\bar{z}} g \cdot dt = -g\bar{z}$$

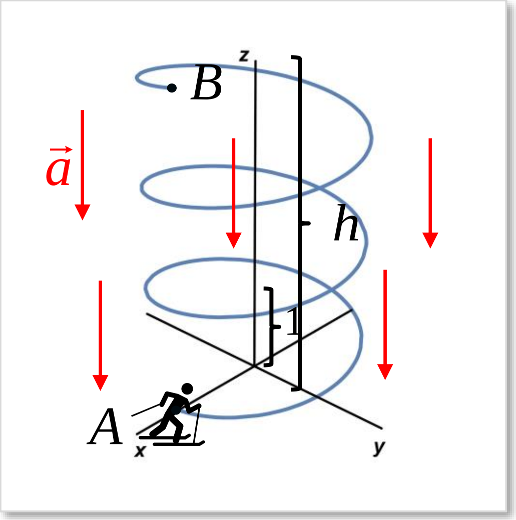
$$\text{потенциал}: \; u(x, y, z) = -gz$$

Работа силы тяжести поднятия груза массы $m = 1$ на высоту h:

$$A = \int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A) = -gz\Big|_0^h = -gh = -mgh$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5





Работа получилась одна и та же!

Этот слайд можно не конспектировать

Понятие потенциала и потенциального векторного поля

Из теоремы 2 и задач 1-2 следует

Замечание 2. Следующие векторные (силовые) поля являются *потенциальными*

- напряженность гравитационного поля у поверхности Земли (потенциал $u = -gh$);
- напряженность электростатического поля точечного заряда (потенциал? $-$упр.);

Упр: привести пример не потенциального поля.