Видеоурок по вычислению неопределенных интегралов можно найти ЗДЕСЬ

Лекция 5. Неопределенный интеграл

Курс **«Математика», II сем., I курс**

ИЕНиМ. ДФиПХ

Лектор к.ф.-н., доцент Нагребецкая Ю.В.

План

- 1. Первообразная. Понятие неопределенного интеграла.
- 2. Метод замены переменных в неопределенном интеграле.
- 3. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Определение первообразной. Пример

Опр. **Первообразной** функцией для $f(x)$ на (a, b) называется функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a, b)$.

Пример 1

$$\left(e^x\right)' = e^x \Rightarrow F(x) = e^x \text{ – первообразная для } f(x) = e^x \text{ на } \mathbb{R}$$

Примеры

Пример 2

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x - \text{первообразная для}$$

$$f(x) = \cos x \text{ на } \mathbb{R}$$

Примеры

Пример 3

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$F(x) = \sqrt{x} - \text{первообразная для } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ на } (0;+\infty)$$

Теорема о существовании первообразной

<u>Теорема 1 (теорема Коши о существовании первообразной).</u>
Для любой непрерывной функции $f(x)$ на интервале (a, b) существует первообразная $F(x)$ на этом интервале (без доказательства).

Первообразная. Понятие неопределенного интеграла

<u>Теорема 2.</u> Пусть $F(x) -$ первообразная для функции $f(x)$ на (a, b), тогда $G(x) = F(x) + C -$ тоже первообразная для функции $f(x)$ на (a, b).

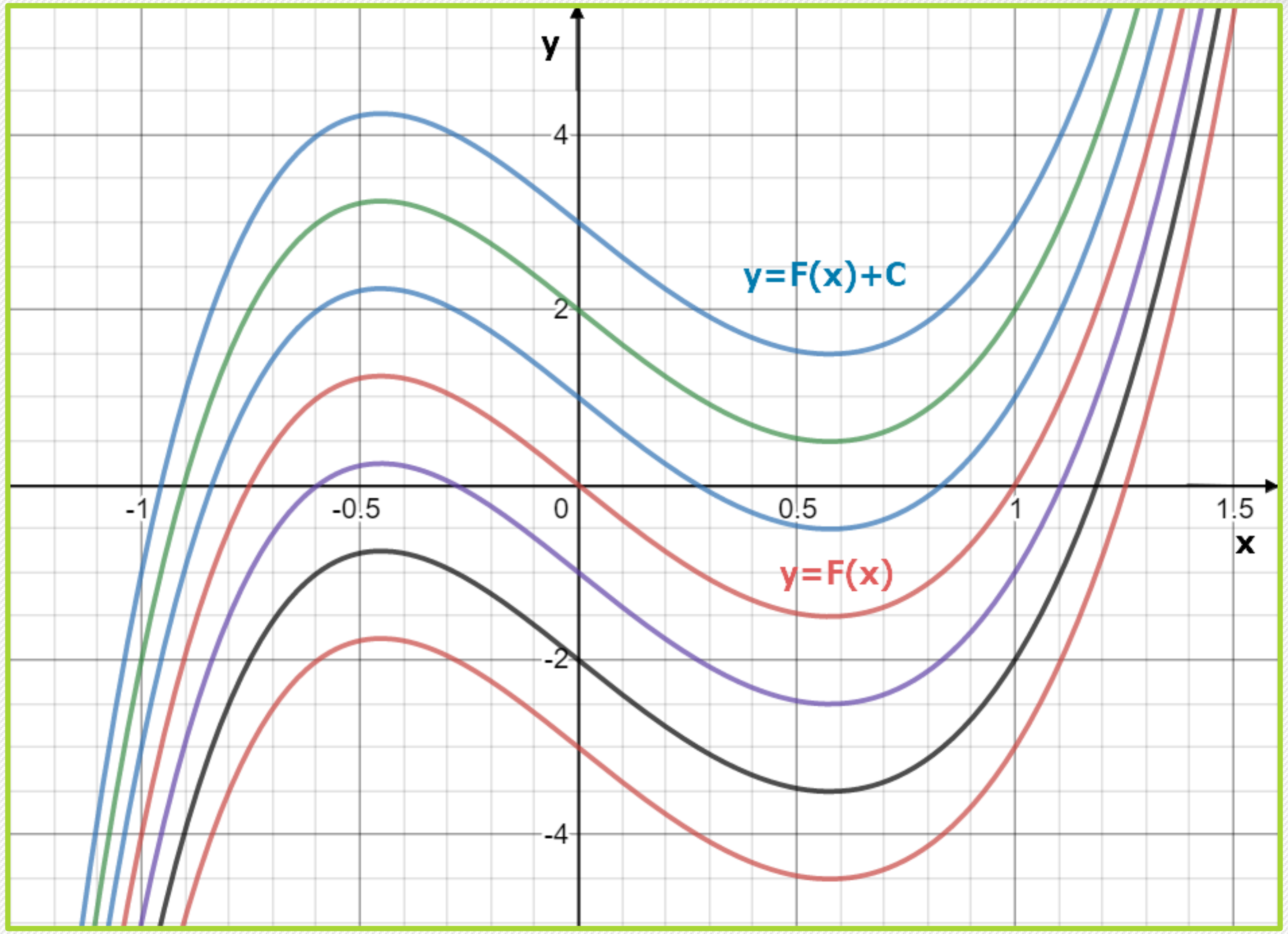
<u>Доказательство.</u> $F'(x) = f(x)$ по определению первообразной. Тогда $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$. Следовательно, функция $G(x)$ тоже первообразная для функции $f(x)$ на (a, b).

Первообразная. Понятие неопределенного интеграла

Теорема 3. Если $F_1(x), F_2(x)$ – первообразные для непрерывной функции $f(x)$ на (a, b), то $F_1(x) - F_2(x) = C = const$ для любого $x \in (a, b)$.

Вывод. Если известна первообразная функция $F(x)$ для непрерывной функции $f(x)$, то прибавляя всевозможные числа C, получаем ВСЕ первообразные для $f(x)$.

Первообразная. Понятие неопределенного интеграла



Первообразная. Понятие неопределенного интеграла

<u>Опр.</u> Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ называется множество всех первообразных для этой функции.

<u>Обозначение:</u> $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$.

Первообразная. Неопределенный интеграл. Пример 4

Пример 4

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2x = x \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \text{первообразная для } f(x) = x \Rightarrow$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Первообразная. Неопределенный интеграл. Примеры 5

Пример 5

$$\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' = \frac{1}{2}(\sin 2x)' = \frac{1}{2}\cdot\cos 2x\cdot 2 = \cos 2x \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{\sin 2x}{2} - \text{первообразная для } f(x) = \cos 2x \Rightarrow$$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$$

Первообразная. Неопределенный интеграл. Пример 6

Пример 6

$$\left(-e^{-x}\right)' = -\left(e^{-x}\cdot(-1)\right) = e^{-x} \Rightarrow$$

$F(x) = -e^{-x}$ – первообразная для $f(x) = e^{-x} \Rightarrow$

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

Свойства неопределенного интеграла

Теорема 4 (свойства неопределенного интеграла). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ – непрерывны на (a,b). Тогда

1) $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

3) $\int f'(x)dx = f(x) + C$ 3’) $\int df(x) = f(x) + C$

4) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ 4’) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Интегрирование и дифференцирование –две взаимно обратные операции

Свойства неопределенного интеграла

<u>Доказательство.</u>

(1) Пусть функции $F(x), G(x)$ – первообразные для функций $f(x)$, $g(x)$. Тогда $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$.

$$\Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C_1, \qquad \int g(x)dx = G(x) + C_2$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx + \int g(x)dx = (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2)$$

C

$$\Rightarrow \int f(x)dx + \int g(x)dx = \big(F(x) + G(x)\big) + (C_1 + C_2)$$

Свойства неопределенного интеграла

$$\big(F(x) + G(x)\big)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

$\Rightarrow$ функция $F(x) + G(x)$ – первообразная для функции $f(x) + g(x)$.

$$\Rightarrow \int \big(f(x) + g(x)\big)dx = F(x) + G(x) + C$$

$$\Rightarrow \int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла

(2) аналогично (упр.)

(3) следует из того, что функция $f(x)$ является первообразной для функции $f'(x)$.

(3') $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$

(4), (4') аналогично (упр).

Таблица интегралов

Таблица интегралов

1. $\int 0\,dx = C.$
2. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
на промежутке, не содержащем 0.
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ для $a > 0,\ a \neq 1.$
В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C,$
где $a > 0,\ |x| < a.$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$
где $a > 0,\ |x| > a$ для знака "$-$" в формуле.
12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, где $x \neq \pm a.$

Интегрирование при помощи таблицы интегралов и свойств интегралов. Пример 7

Пример 7. Найти интеграл $\int \sqrt{x}dx.$

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

Интегрирование при помощи таблицы интегралов и свойств интегралов. Примеры 7,8,9

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{1}{t^2}dt$.

$$\int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C$$

Интегрирование при помощи таблицы интегралов и свойств интегралов. Примеры 7,8,9

Пример 9. Найти интеграл $\int (1-2u)du$.

$$\int (1-2u)du = \int 1du - \int 2udu = \int du - 2\int udu =$$

$$= u - 2\cdot\frac{u^2}{2} + C = u - u^2 + C$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле

- <u>Теорема</u>. Пусть 1) функция $y = f(x)$ непрерывна, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема.

Тогда

$$\boxed{\int f(x)dx = \left[x = \varphi(t)\right] = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 10

Найти $\int \frac{dx}{x+4}$

$$\int \frac{dx}{x+4} = \begin{bmatrix} u = x+4 \\ du = u'dx = (x+4)'dx = 1\cdot dx = dx \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|u| + C = \begin{bmatrix} \text{Возвращаемся к исходной} \\ \text{переменной} \end{bmatrix} = \ln|x+4| + C$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 11

Найти $\int e^{3x}dx$

$$\int e^{3x}dx = \left[\begin{array}{c} u = 3x \\ du = u'dx = (3x)'dx = 3\cdot dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{array}\right] = \int e^{u}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int e^{u}du =$$

$$= \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 12

Найти $\int (2x+5)^2 dx$

$$\int (2x+5)^2 dx = \left[\begin{array}{c} u = 2x+5 \\ du = u'dx = (2x+5)'dx = 2 \cdot dx \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right] = \int u^2 \cdot \frac{1}{2} du =$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 12 (продолжение)

Найти $\int (2x+5)^2 dx$

$$= \frac{1}{2}\int u^2 du + \cancel{C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{2+1}}{2+1} + C = \frac{u^3}{6} + C = \frac{(2x+5)^3}{6} + C$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 13

Найти $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}du \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}u\sqrt{u} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

Формула интегрирования по частям

Теорема. Пусть функции $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы.

Тогда $$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Рекомендации по выбору u, v

Рекомендация I:

Пусть $P(x)$ – многочлен.

В интегралах $\int P(x)\cos x dx, \int P(x)\sin x dx, \int P(x)e^x dx.$

в роли u берём многочлен $P(x)$,

а в роли dv - всё остальное, включая dx.

$$v = \int dv$$

Константу C не прибавляем, поскольку нам нужна только одна функция v

Формула интегрирования по частям
Пример 14

Найти $\int xe^{2x}\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv} = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\underbrace{dx}_{du} =$$

$v = \int dv = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ (константу C не прибавляем!)

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

Формула интегрирования по частям
Пример 15

Найти $\int x\cos x\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} = \left[\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array}\right] = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(\sin x)}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v}\underbrace{dx}_{du} =$$

$v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x$ (константу C не прибавляем!)

$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

Рекомендации по выбору u, v

Рекомендация II:

В роли u берём "плохие" функции $\ln x,\ \ln f(x),$ $\arcsin f(x), \arccos f(x), \operatorname{arc\,tg} f(x)$ и др.

В роли dv – все остальное, включая dx.

$$v = \int dv$$

Формула интегрирования по частям
Пример 16

Найти $\int \ln x\, dx$

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right] = \underbrace{(\ln x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\left(\frac{1}{x} dx \right)}_{du} =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$