Полиномиальная сводимость

❗ Рассматриваем только задачу распознавания

Пусть A и B – две задачи. Скажем, что $A \leq_p B$ (A полиномиально сводится к B), если существует алгоритм f, который для любого экземпляра $a \in A$ строит за время (не зависит от a), ограниченное некоторым наперёд заданным полиномом от размера a, экземпляр $f(a) \in B$ так, что ответ на a „Да" тогда и только тогда, когда ответ на $f(a)$ „Да".

Пример

Задача „Гамильтонов путь" (ГП)

Дан граф $G=(V,E)$ без петель и кратных рёбер $|V|=n$

Вопрос: существует ли путь $e_1, \dots, e_{n-1}$, который посещает все вершины по одному разу?

B – задача SAT (выполнимость)

Клоз – дизъюнкция литералов (переменная, либо её отрицание) $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}$.

Дан некоторый набор клозов C от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Вопрос: можно ли придать переменным значения

0 и 1 так, чтобы все клозы из C были истинны (1)?

Продемонстрируем, что ГП $\leq_p$ SAT

Дан $G=(V,E)$, $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ — пронумерованы

Надо построить набор клозов:

x_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$

Хотим набор клозов составить так, чтобы

их выполнимость отвечала тому, что:

$x_{ij}=1 \Leftrightarrow$ i-ая вершина появится в ГП на j-ом месте.

Клозы:

1. $x_{i1} \vee x_{i2} \vee \dots \vee x_{in}$ $(i=\overline{1,n})$ — i-ая вершина появится в ГП.

2. $\neg x_{ij} \vee \neg x_{ik}$ $(i=\overline{1,n};\ 1\leq j<k\leq n)$ — i-ая вершина не встречается дважды.

3. $x_{1j} \vee x_{2j} \vee \dots \vee x_{nj}$ $(j=\overline{1,n})$ — на j-ом месте стоит некоторая вершина.

4. $\neg x_{ij} \vee \neg x_{lj}$ $(j=\overline{1,n};\ 1\leq i<l\leq n)$ — на j-ом месте стоит что-то одно.

5. $\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj+1}$, если $(v_i,v_k)\notin E$ $(j=\overline{1,n-1})$ — между вершинами должно быть ребро из E.

Надо проверить полиномиальность

Всего в нашей системе клозов будет n^3 клозов примерно с некоторым коэффициентом.

⇒ Пусть в G есть ГП. Тогда придадим переменным x_{ij} значение 1, если i-ая вершина встречается на j-ом месте, у остальных 0. Тогда наша система клозов выполняется по свойству. Всё!

⇐ Пусть нам удалось выполнить означивание переменных x_{ij} 0 и 1 так, что все клозы выполнены 1). Почему в G есть ГП?

Для 1): для $\forall i\ \exists j$ хотя бы одно, чтобы 1) = 1.

Для 3): для $\forall j\ \exists i$ хотя бы одно, чтобы 3) = 1

Для 2) и 4): выполнены, не повторяются и на каждом месте что-то есть.

Для 5): смежные вершины соединены рёбрами

Значит, в графе есть ГП.

Недетерминированная МТ (НМТ) — МТ, где в системе команд есть несколько команд с одинаковым заголовком.

$$q_k a_l \to q_i a_j D \qquad D \in \{L, N, R\}$$
$$q_k a_l \to q_i' a_j' D'$$
$$\ldots$$

При выполнении НМТ выбирает **одну** из таких команд.

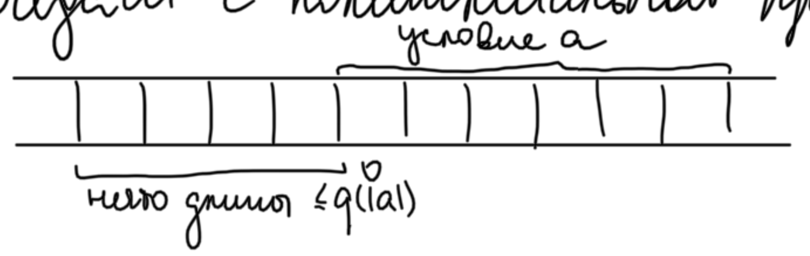
Скажем, что **НМТ M решает задачу A за по-**

полиномиальное время, если существует полином $p(x)$ такой, что $\forall a \in A$ машина M может закончить вычисления в состоянии q_{yes} за время $\leq p(|a|)$ тогда и только тогда, когда ответ на a „Да". (! Опр. не симметрично)

NP — класс задач, которые НМТ решают за полиномиальное время.

Теорема

Задачи с полиномиальной проверкой лежат в NP.



Сначала печатается что-то длины $\leq q(|a|)$ перед условием задачи a, а потом проверяется, не является ли это решением задачи.

Класс NP очень большой!

Замечание: $NP \supseteq P$ — класс задач на детерм. МТ

$P \neq NP$ (но не доказано)

Задача называется **NP-трудной**, если к ней полиномиально сводится любая задача из класса NP.

Задача называется NP-полной, если она NP-трудна и лежит в NP.

Теорема (Кука-Левина)

SAT NP-полна.