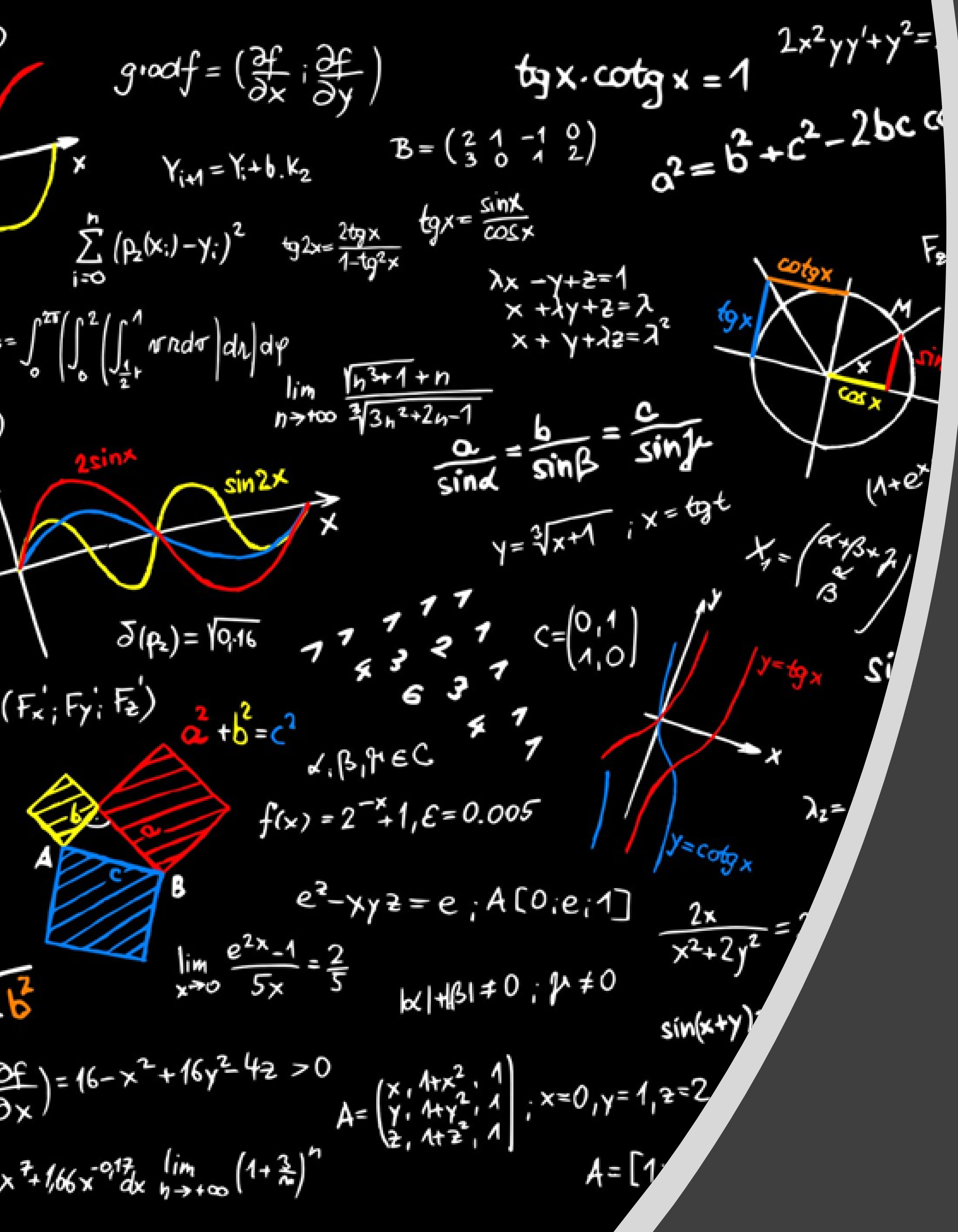


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 4

Двойной интеграл (приложения, замена)

Лекция 4
Двойной интеграл (приложения, замена)

1. Приложение двойного интеграла.
2. Замена переменных в двойном интеграле.
3. Полярные координаты.
4. Двойной интеграл в полярных координатах.
5. Примеры.

Приложение двойного интеграла

- Площадь плоской фигуры:

$$\boxed{S = \iint\limits_D dxdy}$$

- Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и построенного на основании D:

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy}$$

Приложение двойного интеграла

- Масса неоднородной пластины D с поверхностной плотностью $z = f(x,y)$:

$$\boxed{m = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy}$$

- Координаты центра тяжести пластины D:

$$\boxed{x_0 = \frac{\iint\limits_D x f(x,y)\,dxdy}{m},} \quad \boxed{y_0 = \frac{\iint\limits_D y f(x,y)\,dxdy}{m}}$$

Замена переменных в двойном интеграле

Теорема 1. Пусть

- функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D;
- непрерывно дифференцируемые функции

$$\boldsymbol{x = x(u, v), y = y(u, v)}$$

отображают область D' на область D;

- якобиан

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

для любой точки $N(u, v) \in D'$.

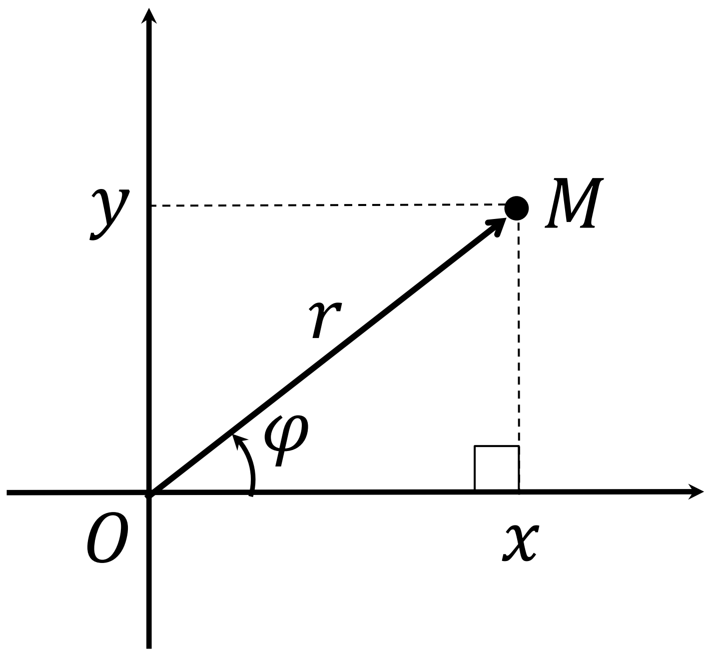
Замена переменных в двойном интеграле

Тогда

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \\ &= \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |J(u,v)|\, dudv\end{aligned}}$$

Без док-ва.

Полярные координаты



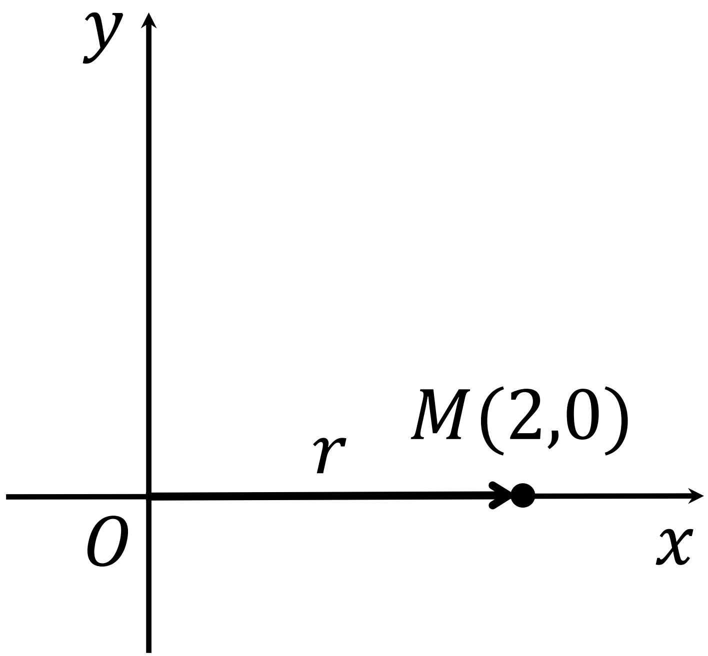
$r = |OM|$ – полярный радиус

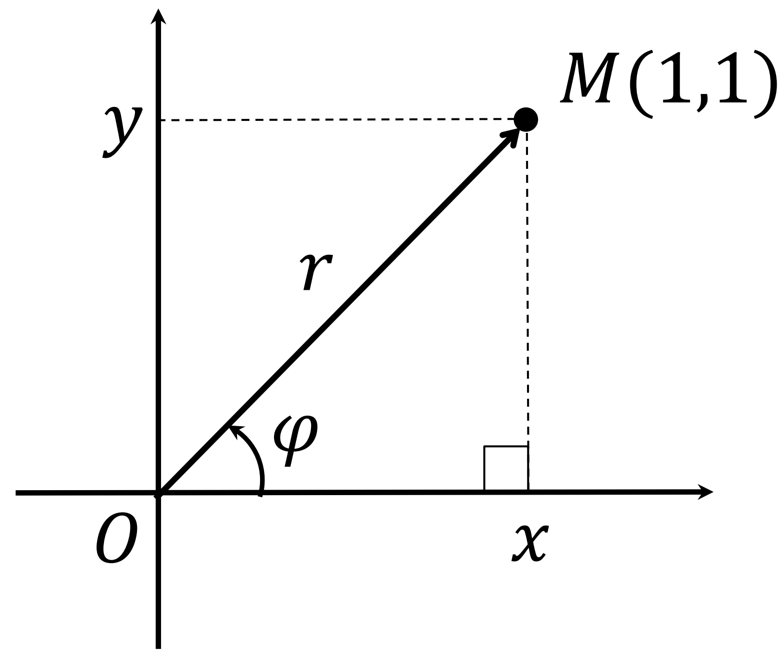
φ – наименьший угол от оси Ox до вектора $\overrightarrow{OM}$ – полярный угол

(x, y) – декартовы координаты точки M

(r, φ) – полярные координаты точки M

Полярные координаты. Примеры

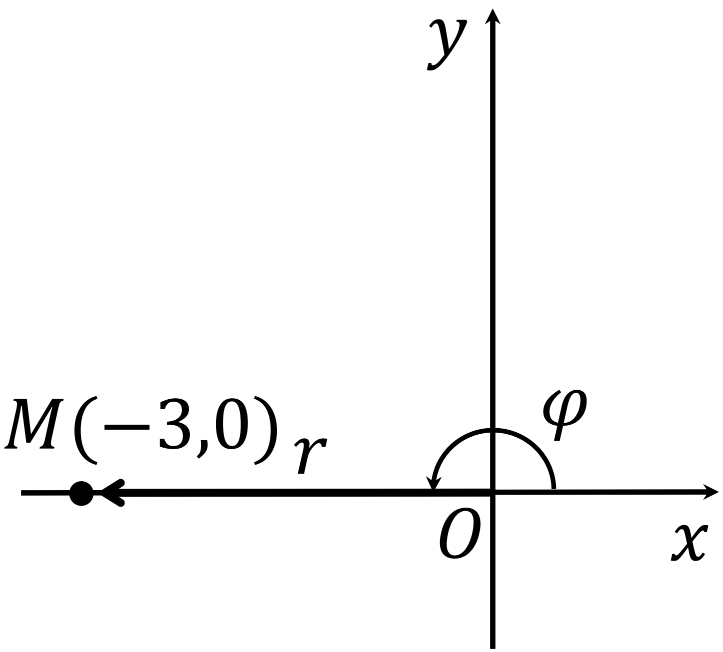


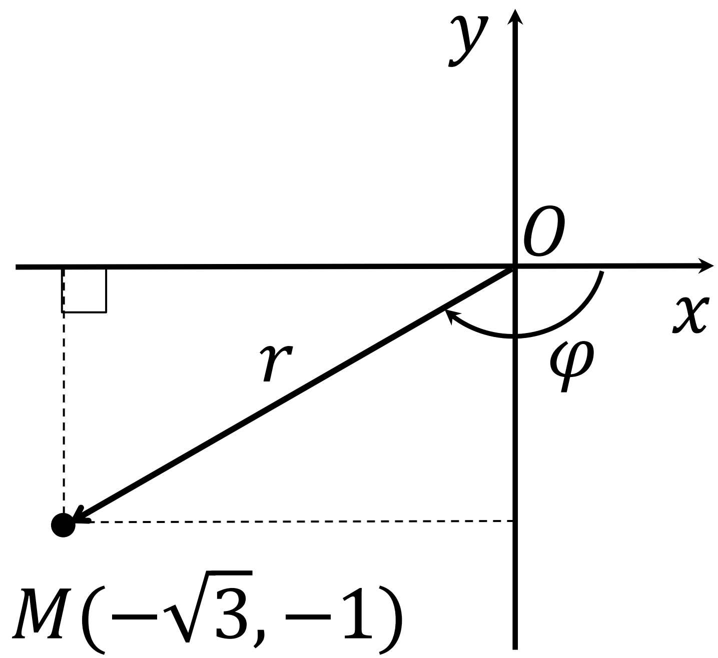


$r = 2 \qquad \varphi = 0$

$r = \sqrt{2} \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$

Полярные координаты. Примеры





$r = 3 \qquad \varphi = \pi$

$r = ? \qquad \varphi = ?$

Двойной интеграл в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$ - выражение декартовых координат через полярные

Якобиан $J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Применим теорему 1:

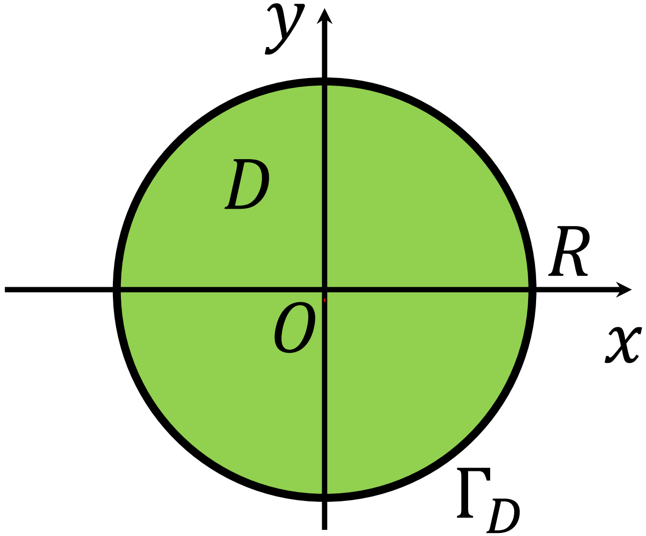
Двойной интеграл в полярных координатах

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi}$$

формула перехода от декартовых координат к полярным в двойном интеграле

Двойной интеграл в полярных координатах. Пример 1

<u>Пример 1</u>. Найти площадь *круга* D радиуса R.



D: $x^2 + y^2 \le R^2$ − круг

$\Downarrow$

Γ_D: $x^2 + y^2 = R^2$ − окружность

Пример 1

<u>Решение</u>. Перейдем к полярным координатам:

в уравнении окружности Γ_D :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

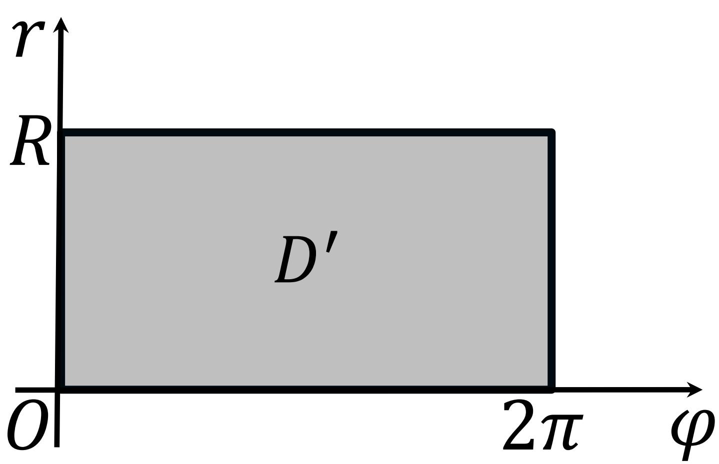
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = R^2$$

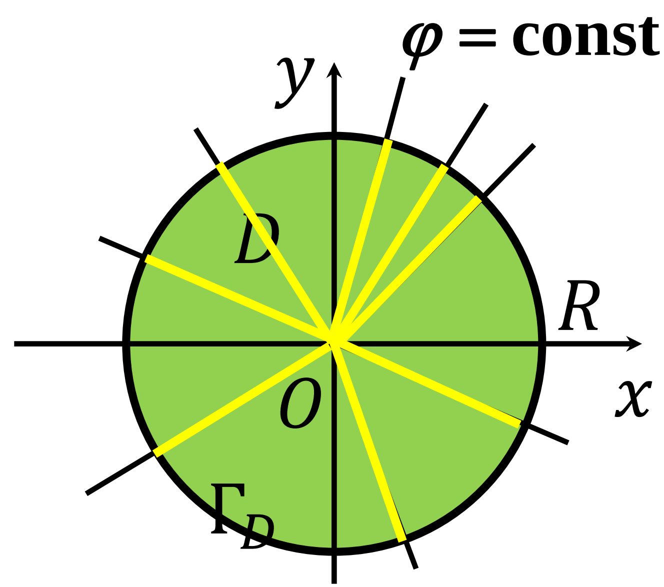
$$r^2 = R^2$$

$r = R$ – уравнение окружности Γ_D в полярных координатах $(0 \le \varphi \le 2\pi)$

Пример 1

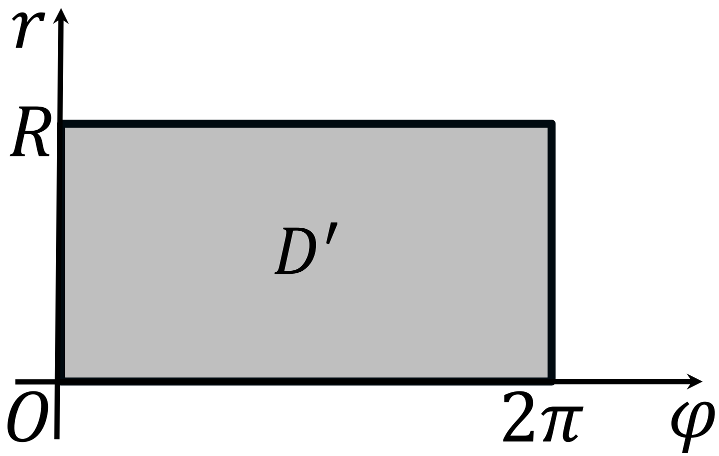
$$D':\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$ – уравнение круга D в полярных координатах

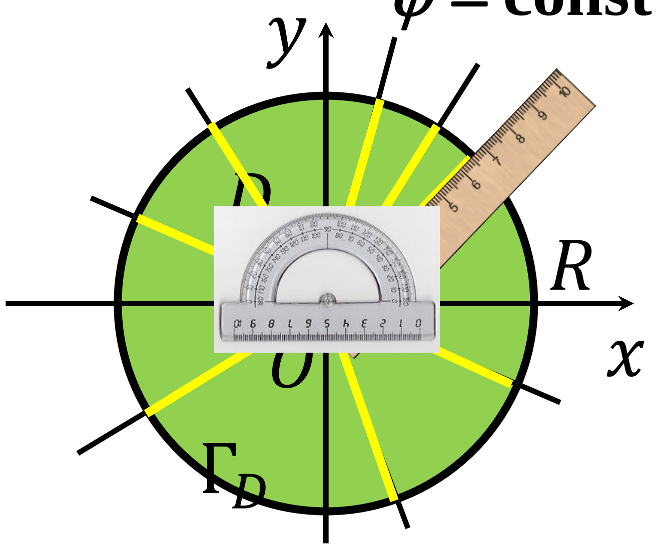




Пример 1

$$D':\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$ – уравнение круга D в полярных координатах





Пример 1

$$S = \iint_D dxdy = \iint_{D'} rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rdr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^R = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^2}{2} =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi R^2$$

Полярная замена в двойном интеграле

Замечание. Интегрирование в полярной системе координат удобно использовать, когда область D ограничена дугами окружностей.

Тогда границы D' имеют более простую форму по сравнению с границами области D.

Замена переменных в двойном интеграле

<u>Теорема 2</u>. Пусть

- функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D;
- область D' в полярной системе координат задана неравенствами

$$\boldsymbol{\alpha \le \varphi \le \beta,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)}$$

для непрерывно дифференцируемых функций $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$.

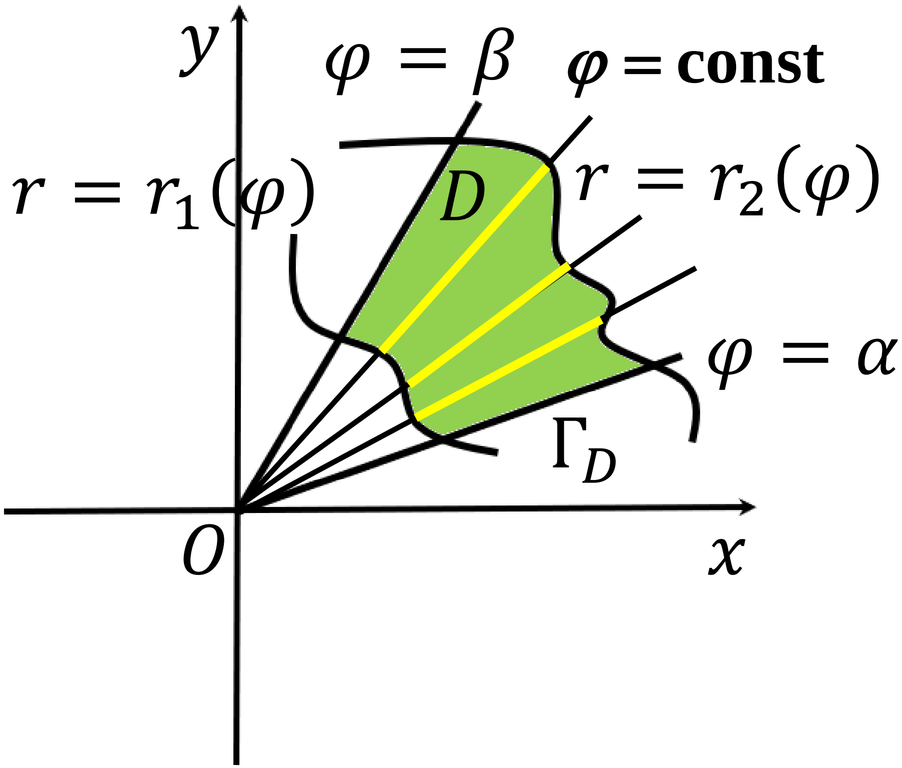
Замена переменных в двойном интеграле

Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi) r dr d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi)\, r dr$$

Замена переменных в двойном интеграле (иллюстрация)



D': $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

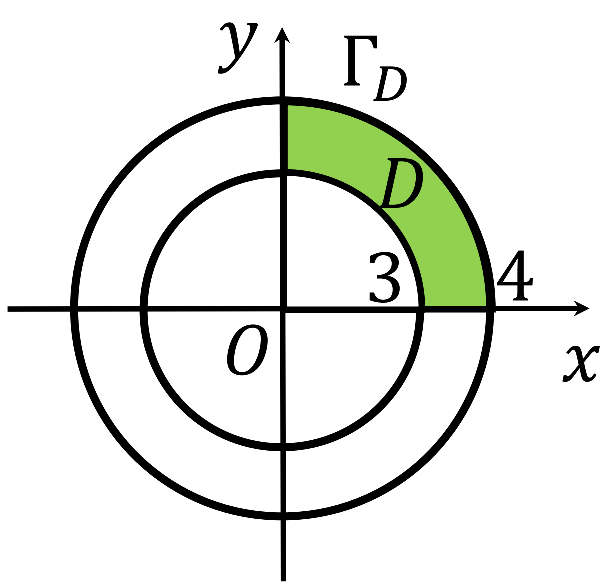
$r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$

$\Gamma_{D'}$: $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$

$r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)$

Пример 2

<u>Пример 2</u>. Записать в полярных координатах двойной интеграл по области D, где



$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

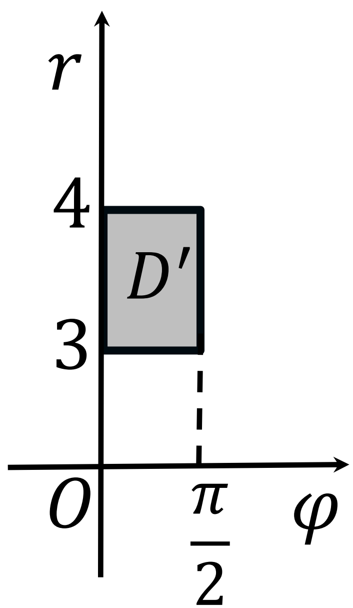
$$x^2 + y^2 = 9$$

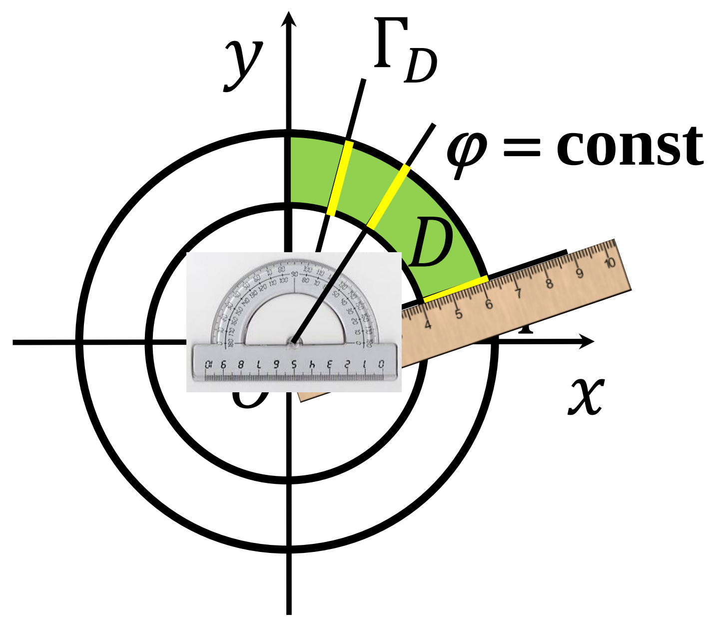
$$\Gamma_D: \; x^2 + y^2 = 16$$

$$x = 0, y = 0$$

Пример 2

$$D': \begin{cases} 3 \le r \le 4 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$ – уравнение сектора кольца D в полярных координатах





Пример 2

По теореме 1

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi)rdrd\varphi =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{3}^{4} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi)\, rdr$$