

Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества

Говорим о подмножествах натуральных чисел.

Мн-во A наз. **рекурсивным**, если его характеристическая ф-ия:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

вычислима.

Пример: \emptyset, \mathbb{N} ; мн-во нечётных чисел

Свойства

1. Дополнение рекурсив. мн-ва рекурсивно

$$\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$$

2. Если A и B - рекурсивны, то $A \cap B$ и $A \cup B$

рекурсивны

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

3. \emptyset - рекурсивно

Мн-во A наз. **рекурсивно-перечислимым**, если существует вычислимая ф-ия $f(x)$ такая, что

A совпадает с областью значений этой ф-ии.

Предположение

Мн-во A рекурсивно $\Leftrightarrow A$ и \bar{A} - оба рекурсивно перечислим.

Док-во

\Rightarrow Пусть A - рекурсивно

Если $A = \emptyset$ или $A = \mathbb{N}$, то тривиально, т.к. \emptyset и \mathbb{N} - р.-н.

Будем считать, что $A \neq \emptyset$ и $A \neq \mathbb{N}$ ($\bar{A} \neq \emptyset$).

Возьмём элемент $a \in A$ и $b \in \bar{A}$ и рассмотрим такие ф-ии:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x \chi_A(x) + (1 - \chi_A(x))a \\ g(x) &= x \chi_{\bar{A}}(x) + (1 - \chi_{\bar{A}}(x))b \end{aligned} \right\} \text{ симм. вогнанным.}$$

Если $x \in A$, то $f(x) = x$, а если $x \notin A$, то

$f(x) = a$, т.е. в любом случае получаем элемент из A .

Значит любой эл-т из A - значение, т.е. A - есть мн-во значений $f(x)$, а \bar{A} - мн-во значений $g(x)$.

\Leftarrow Надо доказать, что если A и \bar{A} - р.-н., то A - рекурсивно.

Попеременно запускаем МТ ф-ий, порождающих A и \bar{A} .

МТ пишет на ленту \perp и делает 100 тактов первой МТ, выходящей $f(x)$, если устевает, то оно где-то записало и если $f(x) = x$, то где \bar{A}

(также 100 тактов) и также вычисляется $f(1)$.
Если и она не отработает, то запускается
1ая МТ.

Предположение

ММ-во A р.-н. $\Leftrightarrow A$ является областью определе-
ния некоторой частично вычислимой ф-ии, т.е.

\exists ф-ия f такая, что :

$$f(x) = \begin{cases} \text{определена, если } x \in A \\ \text{не определена, если } x \notin A \end{cases}$$

Доказательство

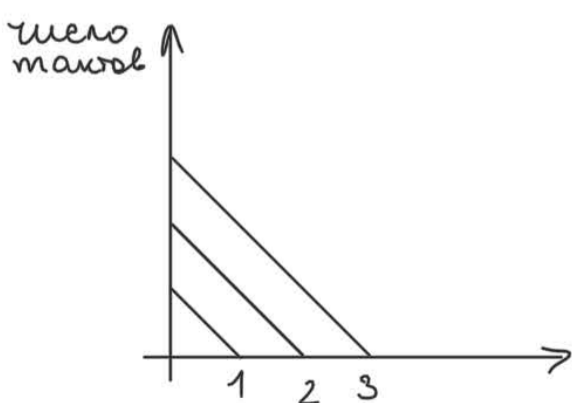
$$A \text{ р. н.} \Rightarrow \exists f(x)$$

Дано, что $\exists g(x)$ такая, что A - это мм-во
значений для $g(x)$.

Построим f так :

Для любого x итерируем $t = 1, 2, \dots$, вычисляем
 $g(t)$ и сравниваем с x . Если совпало, то
печатаем 1.

\Leftarrow Пусть A - область определения некоторой вычис-
лимой ф-ии $f(x)$.



Ф-ия f останавливается, когда
число $\in A$.

Работает по 100 тактов на
каждом числе.

Пример р.-н., но не рекурсивного мм-ва

$F(x, x)$ - вычислима, т.е. область определения - это мн-во номеров самоприменимых МТ (т.е. машине с номером x запустить на входе с x она даст какой-то результат).

Это р.-п. мн-во A .

Докажем, что A не рекурсивно.

оп. Если A рекурсивно, то \bar{A} тоже рекурсивно и в частности р.-п. Значит, это дополнение - область определения некоторой вычислимой ф-ии $f(x)$. Воспользуемся её универсальностью.

За такое, что $F(a, x) = f(x)$.

Имеем $x \in A \Leftrightarrow F(x, x)$ не опр., в частности $F(a, a)$ не определена при таком $a \in \bar{A}$.

$F(a, a) = f(a)$, то $f(a)$ должно быть опр. для $a \in \bar{A}$ (по предположению) противоречие.

! Доказали неразрешимость проблемы остановки МТ.