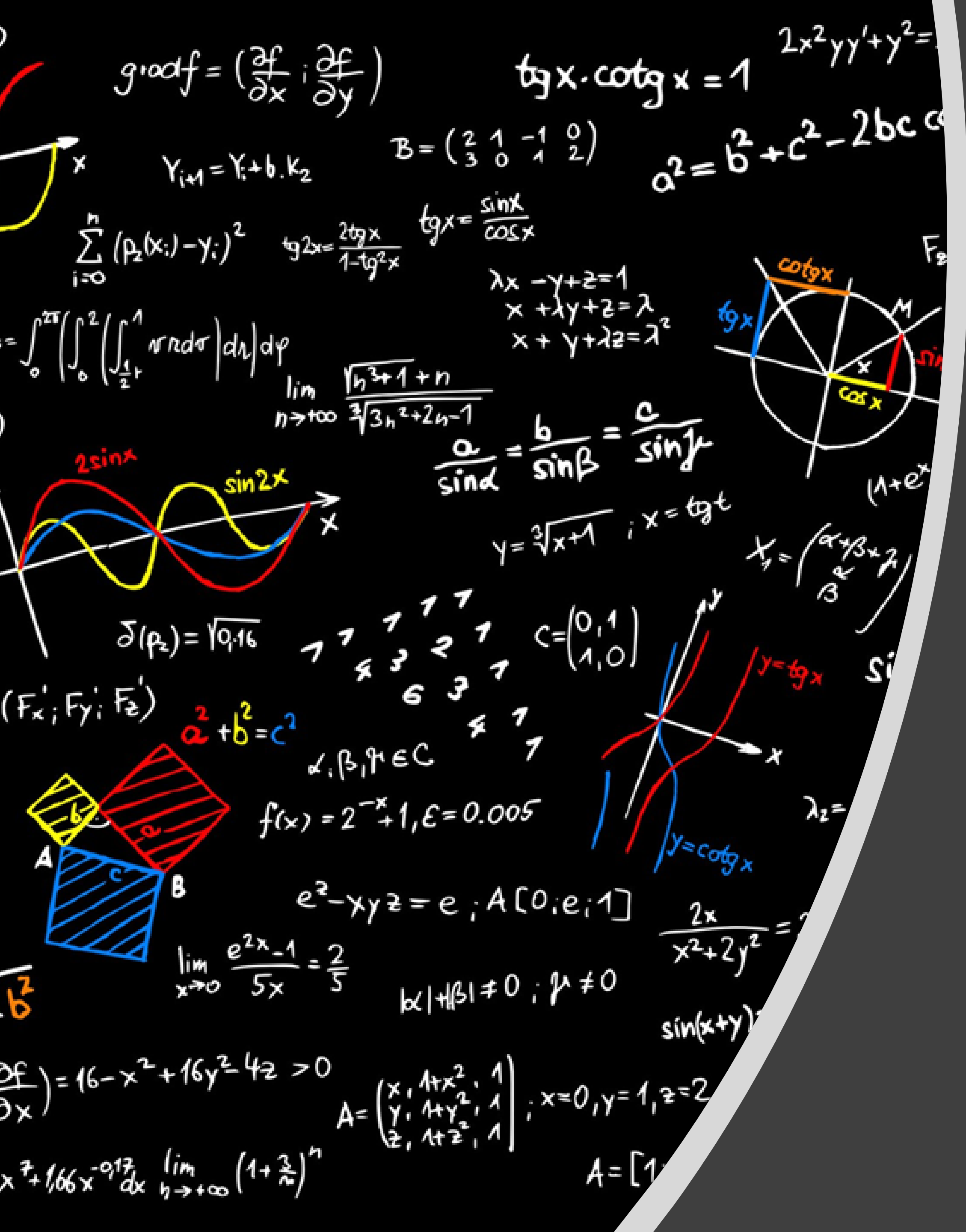


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 2, часть 2

Условный экстремум ФНП

Лекция 2, часть 2

Условный экстремум ФНП

1. Понятие условного экстремума ФНП.
2. Постановка задачи нахождения условного экстремума.
3. Необходимое геометрическое условие условного экстремума Ф2П и следствие из него.
4. Поиск условного экстремума при помощи функции Лагранжа (необходимое и достаточное условия).

Определение условного экстремума

На практике часто встречаются задачи об отыскании экстремумов функции, аргументы которой не являются независимыми переменными, а удовлетворяют определенным **условиям связи** (уравнениям).

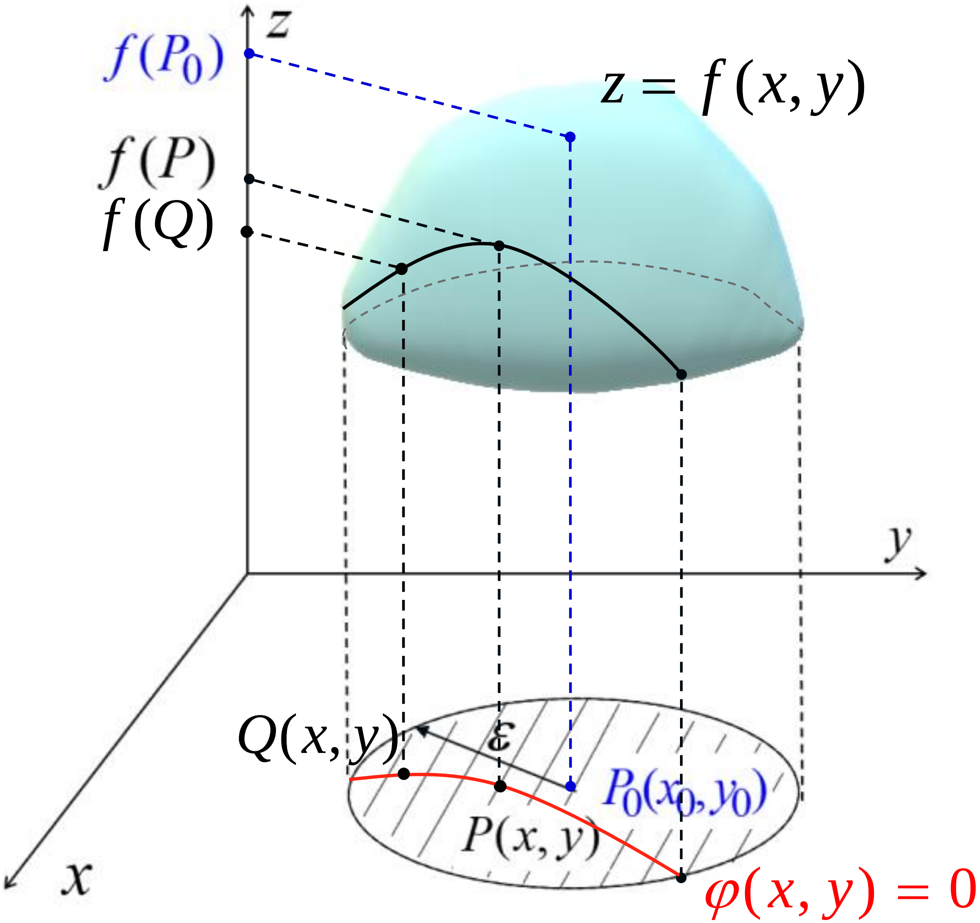
Такие экстремумы называются условными.

Понятие условного экстремума

Опр. (условного экстремума). Пусть функции $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $O(P)$ точки $P \in D$.

Точка P называется точкой условного локального max (min) функции $z = f(x,y)$ при условии $\varphi(x,y) = 0$, если существует такая окрестность $O_\varepsilon(P)$, что функция $z = f(x,y)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в точке P среди всех точек $Q(x,y) \in O_\varepsilon(P)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $\varphi(x,y) = 0$.

Условный экстремум. Иллюстрация



P_0 – т. $loc \max$ функции $z = f(P)$

P – т. условн. $loc \max$ функции $z = f(P)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$

Постановка задачи нахождения условного экстремума

Пусть $f(x,y), \varphi(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Найти (условные) локальные экстремумы функции $z = f(x,y)$ при условии $\varphi(x,y) = 0$.

Поставленная задача сводится к задаче отыскания локального экстремума функции Лагранжа.

$\varphi(x,y) = 0$ – условие связи

Необходимое геометрическое условие условного экстремума

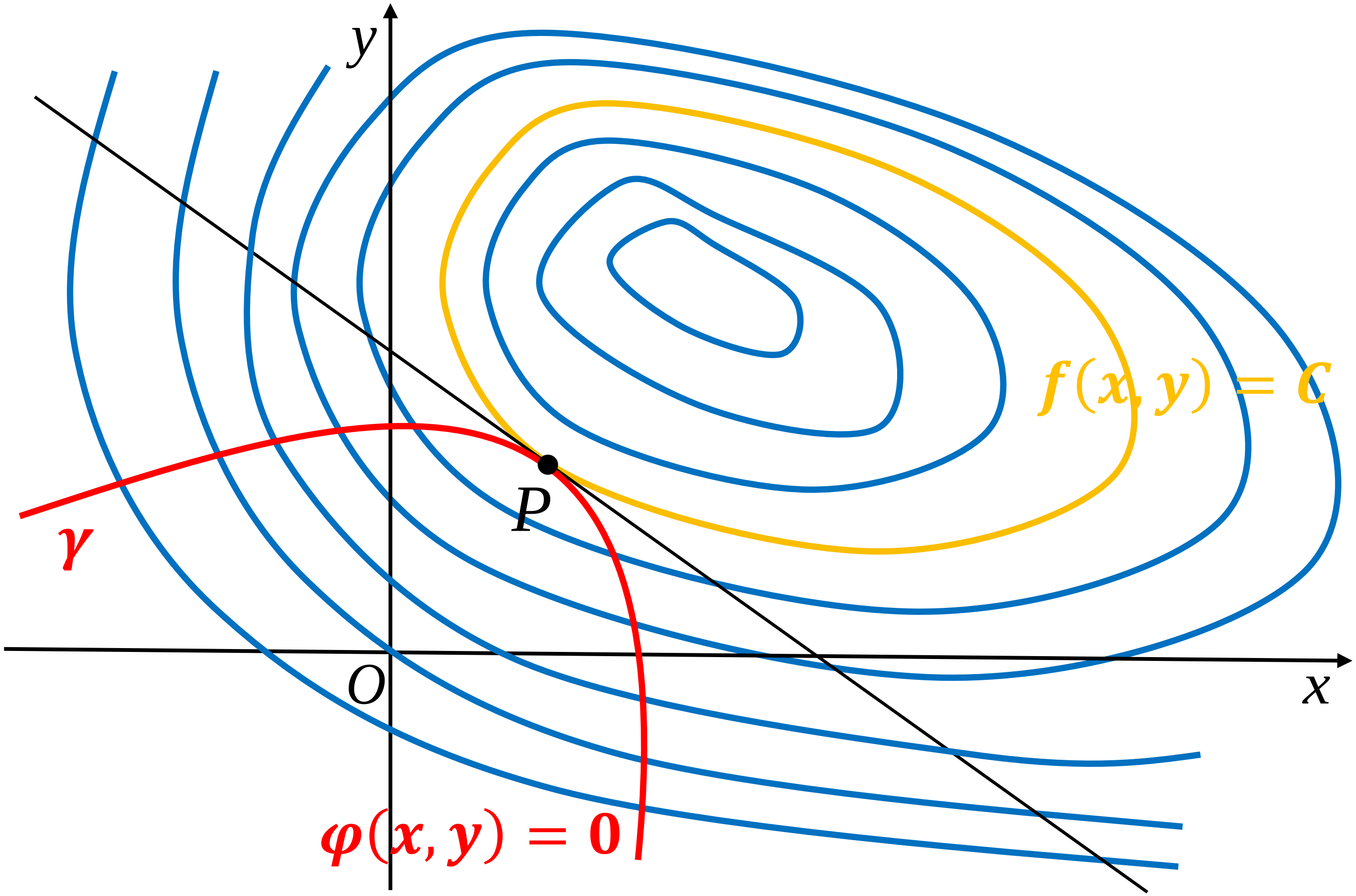
Теорема 4 (необходимое геометрическое условие условного экстремума). Пусть функции $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $O_\varepsilon(P)$ точки $P \in D$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f|_\gamma \neq \vec{0}$ для линии γ, задаваемая уравнением $\varphi(x, y) = 0$.

Необходимое геометрическое условие условного экстремума

И пусть $P -$ точка условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$.

Тогда линия уровня $f(x, y) = C$, проходящая через точку P, и линия γ *касаются* друг друга в точке P.

Необходимое геометрическое условие условного экстремума (иллюстрация)



Необходимого геометрическое условие условного экстремума. Доказательство

Доказательство (от противного). Пусть $P -$ точка условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$.

Точка P лежит на линии уровня $f(x, y) = C$, где $C = f(P)$.

Предположим противное: линии уровня $f(x, y) = C$ и линия γ пересекаются, не касаясь.

Необходимого геометрическое условие условного экстремума. Доказательство

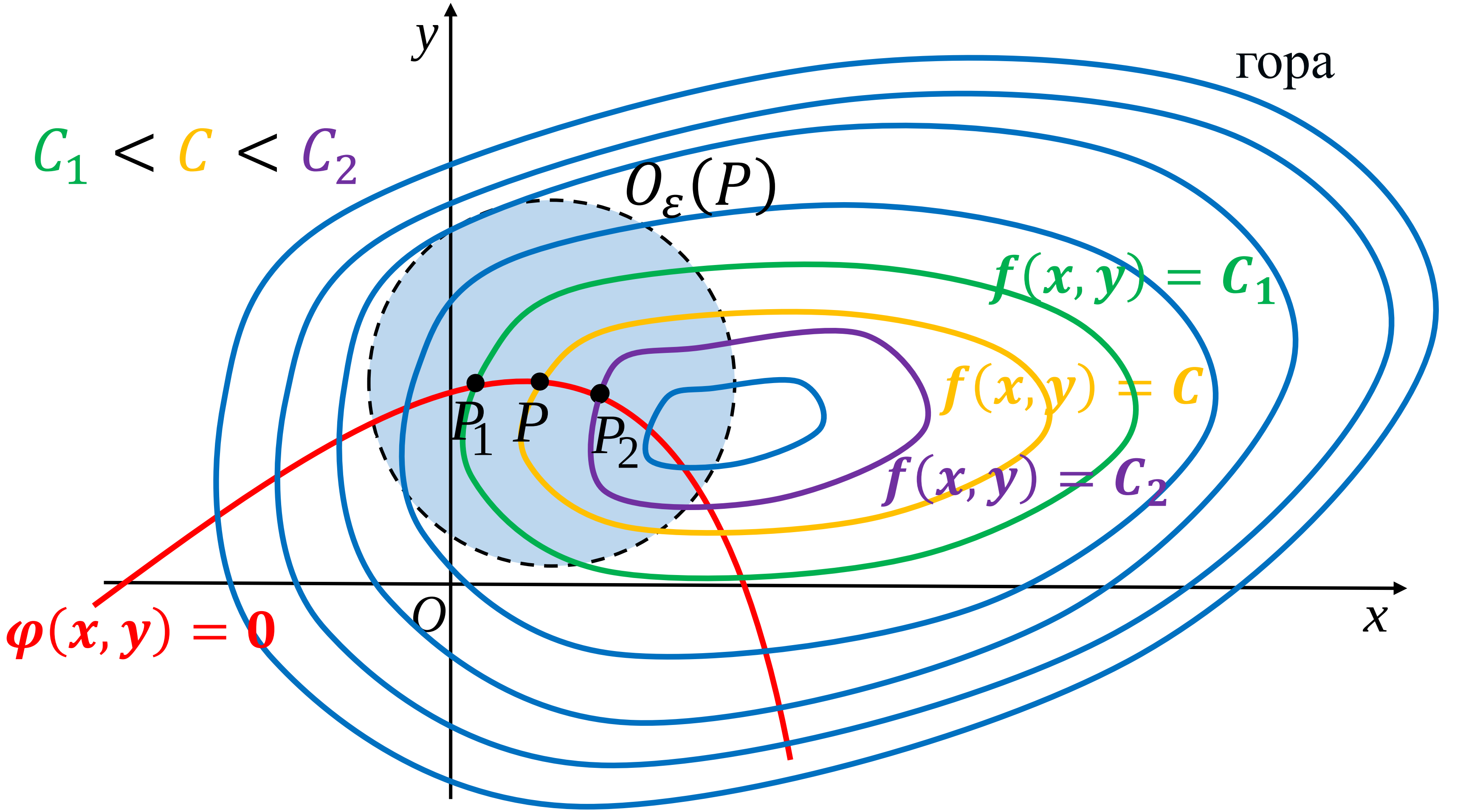
Тогда для любой окрестности $O_\varepsilon(P)$ есть точки $P_1,\ P_2$ такие, что $P_1, P_2 \in O_\varepsilon\ (P),\ P_1, P_2 \in \gamma$ и

$f(P_1) = C_1, f(P_2) = C_2$, где $C_1 < C < C_2$, т.е.

$f(P_1) < f(P) < f(P_2)$.

А это противоречит тому, что $P -$ точка условного экстремума (max или min) функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$.

Док-во необходимого геометрич. условия локального условного экстремума (иллюстрация)

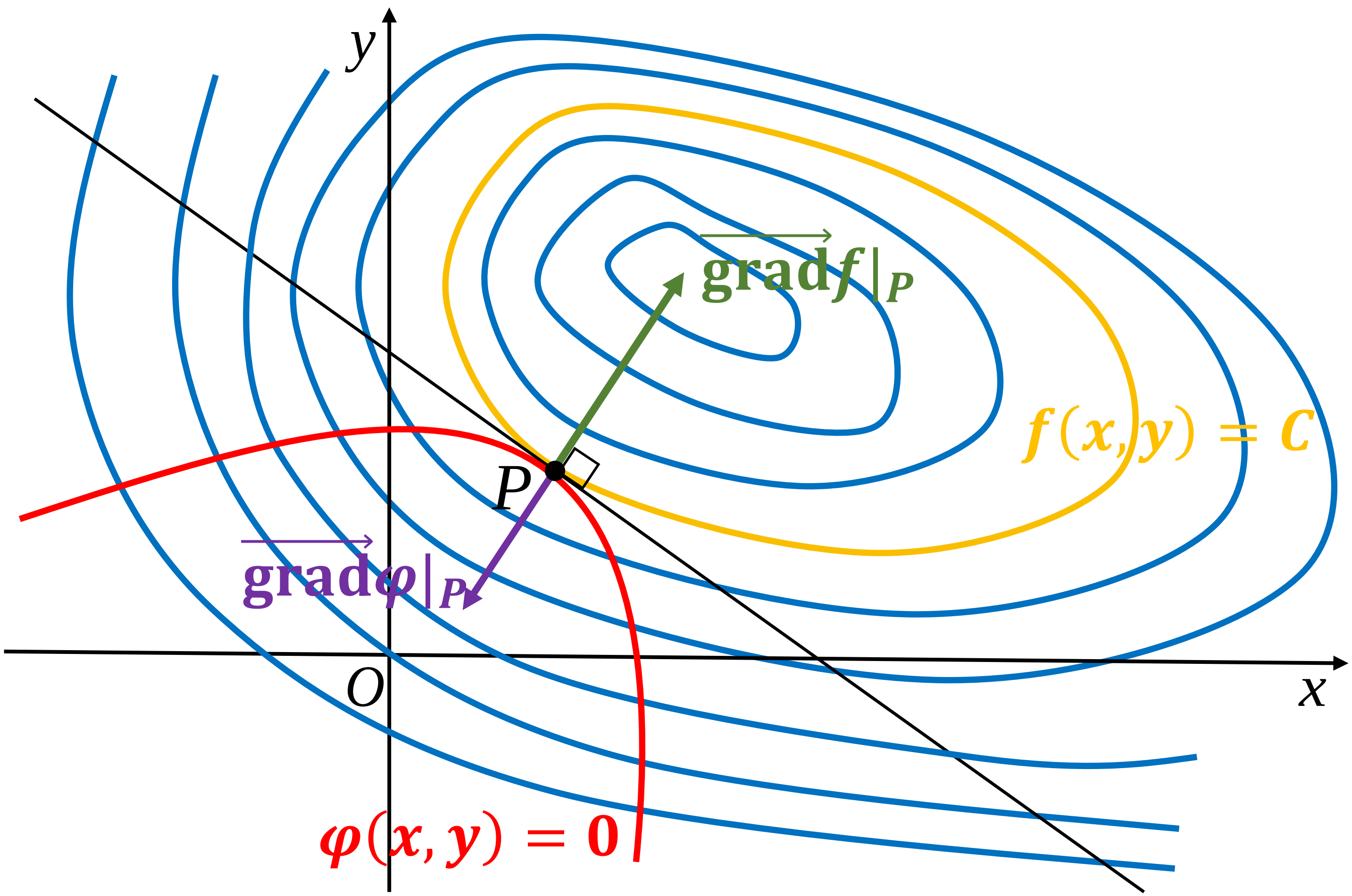


Следствие из необходимого геометричского условия условного экстремума

Теорема 5 (следствие из необходимого условия условного экстремума). Пусть выполняются условия теоремы 4.

Тогда векторы $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f|_P$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi|_P$ *параллельны.*

Следствие из необходимого геометрического условия условного экстремума (иллюстрация)



Следствие из необходимого геометрического условия локального условного экстремума. Доказательство

Доказательство следует из того, что векторы $\overrightarrow{\text{grad}} f|_P, \overrightarrow{\text{grad}} \varphi|_P$ функций $z = f(x,y)$ $z = \varphi(x,y)$ перпендикулярны общей касательной к линиям уровня $f(x,y) = C,\ \varphi(x,y) = 0$ этих функций в точке P.

Функция Лагранжа

Опр. Функцией Лагранжа, соответствующей данной функции $z = f(x, y)$ и условию связи $\varphi(x, y) = 0$, называется функция

$$\boxed{L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)}$$

Теорема о стационарных точках функции Лагранжа

Теорема 6 (о стационарных точках функции Лагранжа)

Если $P(x, y)$ – точка **условного экстремума** функции $z = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$,

то $N(x, y; \lambda)$ – *стационарная* точка **локального экстремума** функции Лагранжа $L = L(x, y, \lambda)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема о стационарных точках функции Лагранжа

Теорема 6 (о стационарных точках функции Лагранжа)

Если $P(x, y)$ − точка **условного локального экстремума** функции $z = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$,

то $N(x, y; \lambda)$ − *стационарная* точка **(безусловного) локального экстремума** функции Лагранжа $L = L(x, y, \lambda)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема о стационарных точках функции Лагранжа (доказательство)

Доказательство

Пусть $P(x, y) -$ точка **условного локального экстремума** функции $z = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$.

Тогда по теореме 5 векторы $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f|_P$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi|_P$ *параллельны*,

т.е. $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f|_P = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi|_P$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема о стационарных точках функции Лагранжа (доказательство)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}|_P,\ \frac{\partial f}{\partial y}|_P\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi|_P = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_P,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_P\right)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_P = \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_P \qquad \frac{\partial f}{\partial y}|_P = \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_P$$

Теорема локальном экстремуме функции Лагранжа (доказательство)

Тогда

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial x}\right|_N = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P - \lambda \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_P = 0, \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial y}\right|_N = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P - \lambda \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_P = 0, \\ \quad \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_N = -\varphi(x, y)\,|_P = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Схема отыскания условного экстремума

1. Поиск стационарных точек функции Лагранжа (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

- система уравнений для отыскания стационарных точек $N(x, y; \lambda)$ функции Лагранжа $L = L(x, y, \lambda)$

Схема отыскания условного экстремума

2. Определение типа экстремума (достаточное условие экстремума):

- для установления факта **наличия** экстремума и определения **типа** экстремума нужно исследовать знак $d^2L|_N$ при $\lambda = const$;

- при этом нужно учитывать, что $d\text{x}, dy$ зависят друг от друга из-за условий связи.

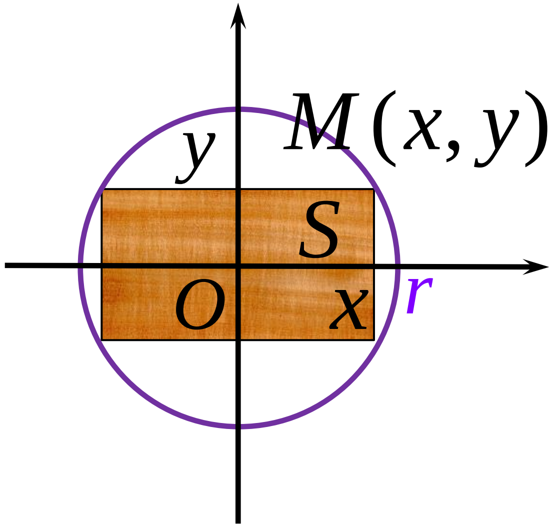
Условный экстремум для Ф2П
Пример 2

<u>Пример 2.</u> Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на сжатие.

Сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения.

Задача взята из [УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ]

Условный экстремум. Пример 2



Площадь прямоугольника:

$$f(x,y) = S = 4xy,$$

$$f_{наиб.}(P) \Rightarrow P = ?$$

При этом выполняется условие связи:

$$x^2 + y^2 = r^2, r = \frac{d}{2}$$

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Условный экстремум. Пример 2

Функция Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=4xy-\lambda\left(x^2+y^2-r^2\right)$$

1. <u>Найдем стационарные точки функции Лагранжа.</u>

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=4y-2\lambda x=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial y}=4x-2\lambda y=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-\left(x^2+y^2-r^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}\lambda x\\[2ex]4x-\lambda^2x=0\\[2ex]x^2+y^2-r^2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

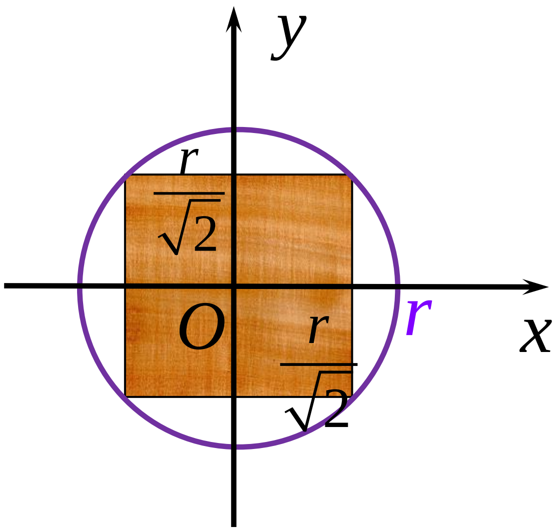
Условный экстремум. Пример 2

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}\lambda x \\ 4x - \lambda^2 x = 0 \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}\lambda x \\ x(4 - \lambda^2) = 0 \; (: x > 0) \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}\lambda x \\ \lambda^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,2} = \pm x \\ \lambda_{1,2} = \pm 2 \\ 2x^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ \lambda = 2 \\ x^2 = \frac{r^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \frac{r}{\sqrt{2}} \; (\text{так как } x > 0, y > 0) \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Условный экстремум. Пример 2

$\Rightarrow$ прямоугольник является КВАДРАТОМ



$$N\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}},2\right)-\textit{стационарная}$$

точка функции $L(x,y,\lambda)$

Условный экстремум. Пример 2

2. <u>Установим тип экстремума</u>

Вычислим вторые частные производные функции Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 4, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$d^2 L\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, 2\right) = -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2$$

Условный экстремум. Пример 2

Из условия связи $x^2+y^2-r^2=0$

следует связь дифференциалов

$$d\left(x^2+y^2-r^2\right)=0$$

$$\left(x^2+y^2-r^2\right)'_x dx+\left(x^2+y^2-r^2\right)'_y dy=0$$

$$2xdx+2ydy=0$$

$$x=y=\frac{r}{\sqrt{2}},\ \lambda=2\Rightarrow 2\frac{r}{\sqrt{2}}dx+2\frac{r}{\sqrt{2}}dy=0\Rightarrow$$

Условный экстремум. Пример 2

$$dy = -dx \Rightarrow$$

$$d^2L\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, 2\right) = -4dx^2 - 8dx^2 - 4dx^2 = -16dx^2 \Rightarrow$$

$$d^2L\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, 2\right) < 0 \text{ для любого } dx \neq 0 \Rightarrow$$

$P\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ – точка условного max функции $f(x, y)$

при условии $x^2 + y^2 = r^2$; *условный* max функции $f(x, y)$

равен $S = 4xy = 4\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}} = 2r^2$

Условный экстремум для ФЗП. Пример 4

В **примере 1** функция

$V = f(x, y, z) = xyz \to max$ при условии связи

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z - a = 0.$$

Решение

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\varphi(x, y, z) =$$

$$= xyz - \lambda(x + y + z - a)$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = yz \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = xz \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = xy \\ \quad \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{cases} \right| \Rightarrow \lambda = xy = yz = xz$$

$\Rightarrow x = y = z \Rightarrow$ параллелепипед является кубом

Решение при помощи функции Лагранжа оказалось проще!