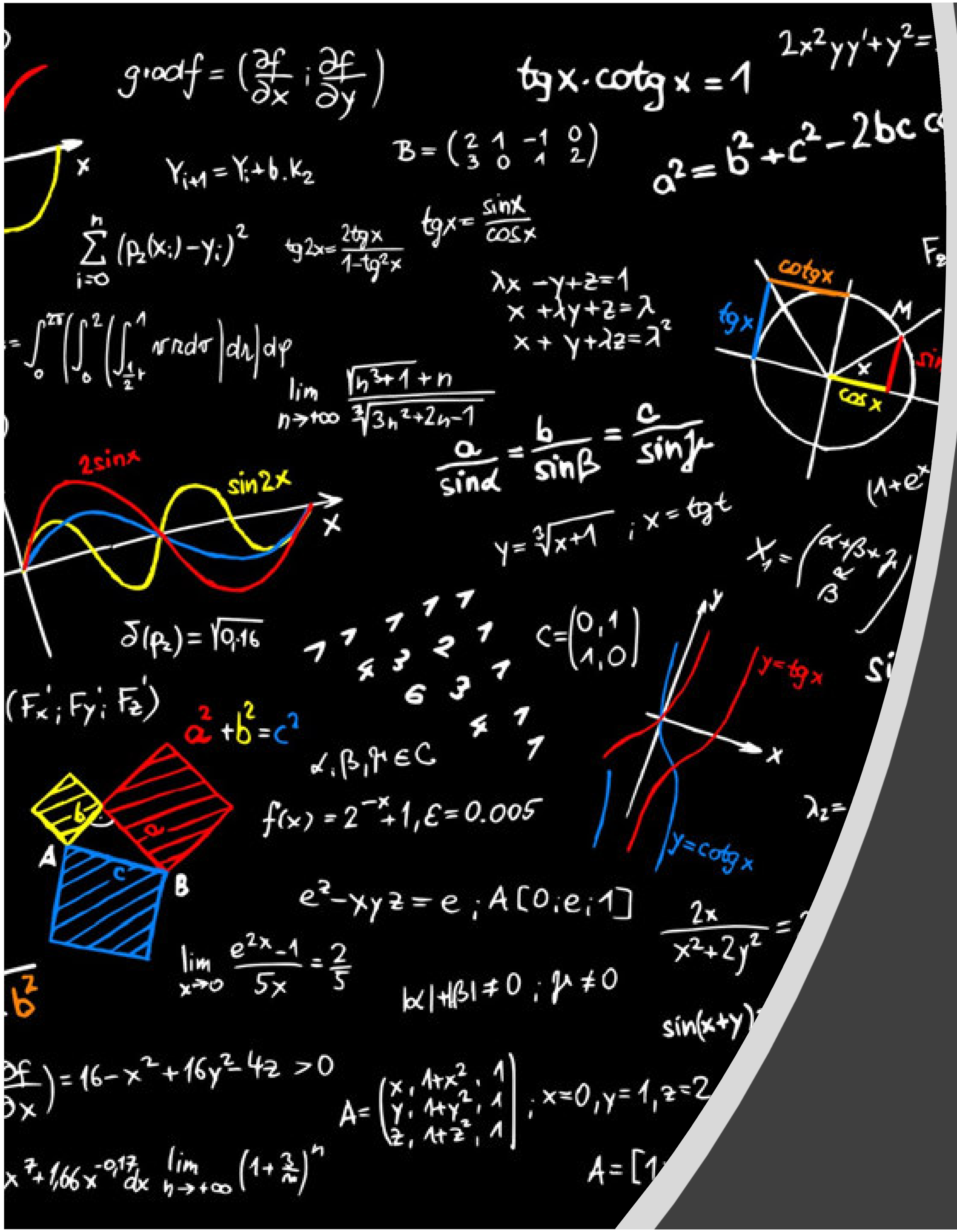


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 2, часть 1

Наибольшее, наименьшее значение непрерывной ФНП

Лекция 2, часть 1

Наибольшее, наименьшее значение непрерывной ФНП

1. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной Ф1П на отрезке (повторение).
2. Понятие ограниченного и замкнутого множества (повторение), т.е. компакта.
3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений ФНП на компакте.
4. Условные экстремумы ФНП (необходимые и достаточные условия).

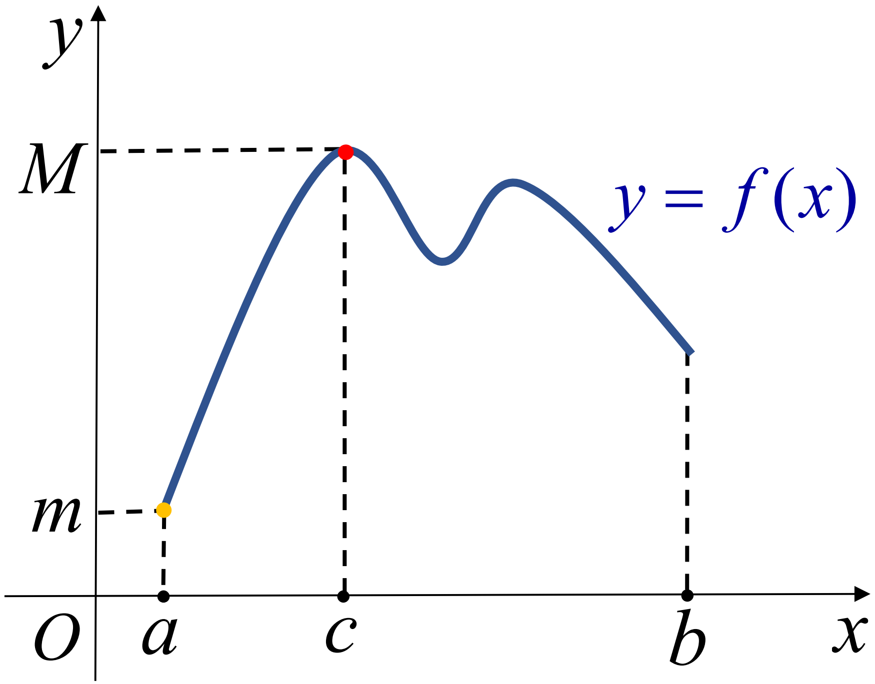
Наибольшее и наименьшее значение непрерывной Ф1П на отрезке (повторение)

Теорема 1 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений.

Причем она достигает эти значения либо в критической точке интервала (a, b), либо на концах отрезка $[a, b]$.

Этот слайд можно не конспектировать

Наибольшее и наименьшее значение непрерывной Ф1П на отрезке. Геометрическая иллюстрация (повторение)



$$M = \text{наиб.}\, f(x) = f(c)$$

$$m = \text{наим.}\, f(x) = f(a)$$

Этот слайд можно не конспектировать

Определение ε-окрестности на плоскости $\mathbb{R}^2$ (повторение)

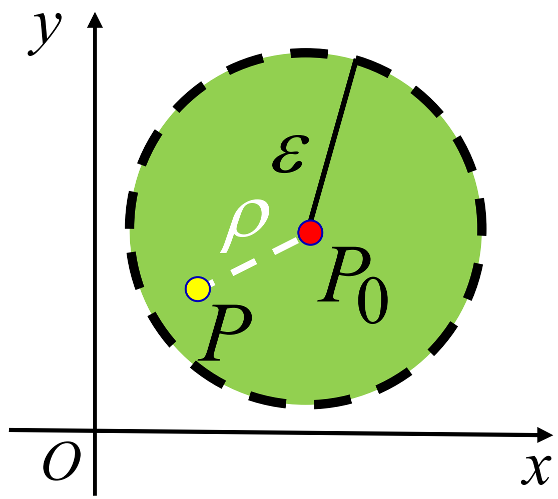
Опр. ε-окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$ на плоскости называется множество

$$O_\varepsilon(P_0) = \left\{ P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho(P, P_0) < \varepsilon \right\},$$

Этот слайд можно не конспектировать

где $\rho(P, P_0)$ – расстояние от точки P до точки P_0, равное

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



Определение замкнутого множества (повторение)

Опр. Точка P_0 называется граничной точкой множества D, если для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $O_\varepsilon(P_0)$ содержит и точки из множества D, и точки не из множества D.

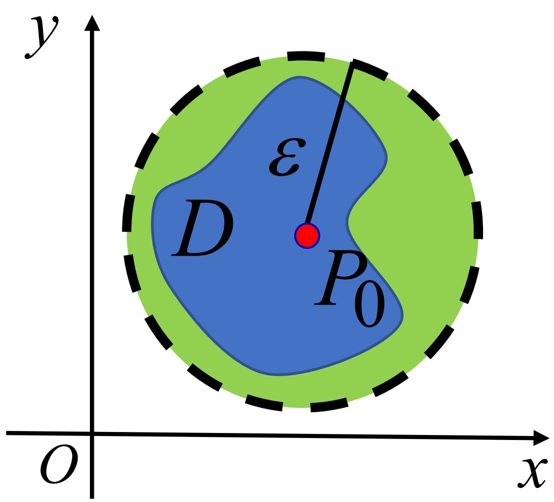
Опр. Множество всех граничных точек множества D называется границей этого множества.

Опр. Множество D называется замкнутым, если граница множества D принадлежит этому множеству.

Этот слайд можно не конспектировать

Определение ограниченного множества (повторение)

Опр. Множество D называется **ограниченным,** если это множество можно поместить в некоторую окрестность некоторой точки.



Этот слайд можно не конспектировать

Определение компакта

Опр. Множество D называется компактом, если оно ограничено и замкнуто.

Примеры. (1) отрезок на прямой, (2) круг, квадрат, треугольник на плоскости; (3) куб, шар, цилиндр в пространстве – компакты.

Теорема Вейерштрасса для непрерывной Ф2П на компакте

Теорема 2 (Вейерштрасса). Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна на компакте, то она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Без док-ва.

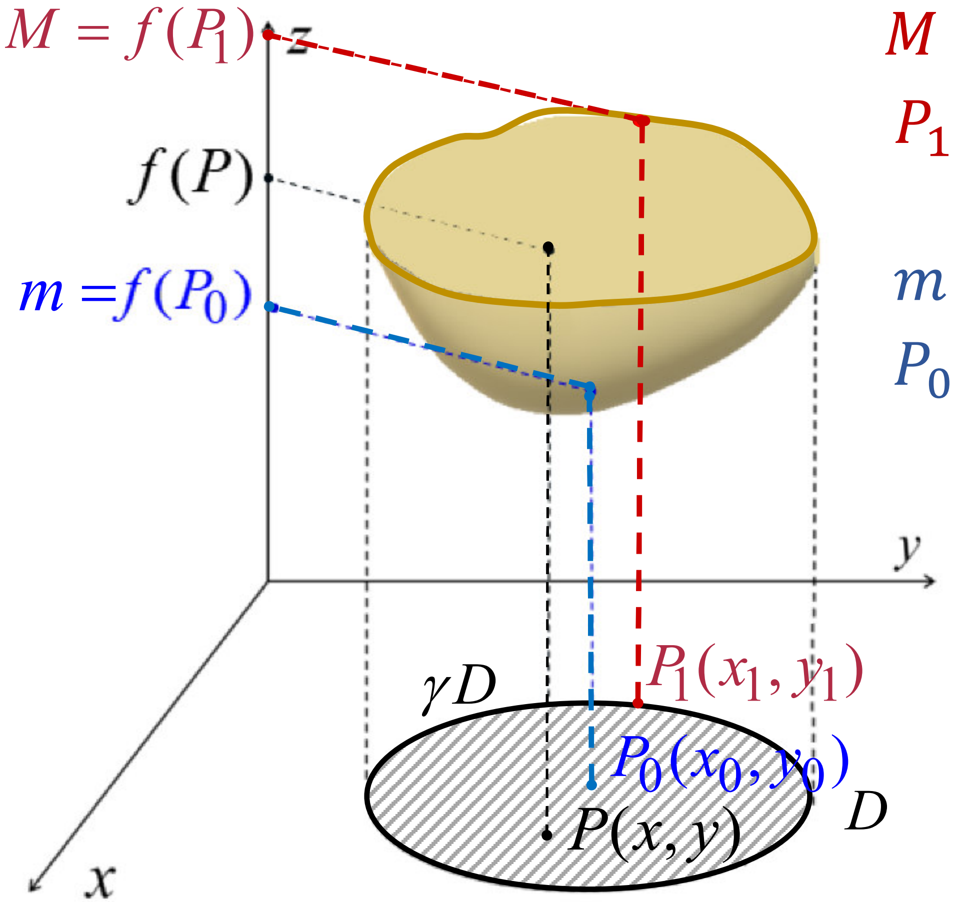
Наибольшее и наименьшее значение дифференцируемой Ф2П на компакте

Теорема 3. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема на компакте D, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений

- либо в стационарной точке внутри множества D,
- либо на границе γD множества D.

Без док-ва.

Наиб. и наим. значение дифференцируемой Ф2П на компакте (иллюстрация)



$M =$ наиб. $f(x, y) = f(P_1)$

$P_1 \in \gamma D$

$m =$ наим. $f(x, y) = f(P_0)$

P_0 – стационарная точка внутри D

Схема поиска наиб. (наим.) значения дифференцируемой ФНП на компакте

1. Найти стационарные точки P_0 функции $z = f(x, y)$, лежащие внутри компакта D и вычислить значения $f(P_0)$ функции в них.

2. Найти m_γ и M_γ наименьшее и наибольшее значения $z = f(x, y)$ на границе γD области.

3. Выбрать $m = \min\left\{m_\gamma, f\left(P_0\right)\right\}$

$$M = \max\left\{M_\gamma, f\left(P_0\right)\right\}$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

Пример 1. Найти размеры прямоугольного параллелепипеда данного периметра, имеющего наибольший объем.

Решение.

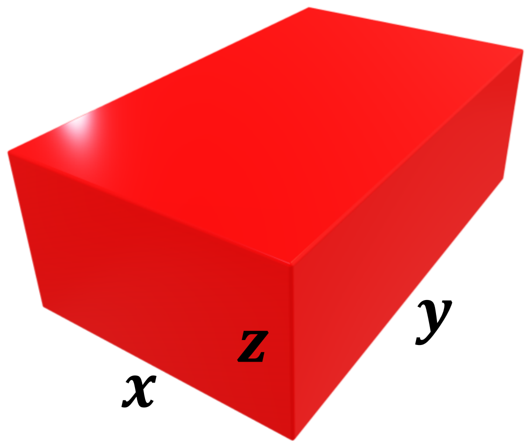
$$V = xyz \to \max,\ P = 4(x+y+z) = const,\ a = \frac{P}{4} \Rightarrow$$

$$x + y + z = a \Rightarrow z = a - x - y,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \Rightarrow$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

$$f(x,y) = xy(a-x-y) \to \max$$

$$D:\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ a-x-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq a-x \end{cases}$$



Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\big(xy(a-x-y)\big)=[y=\text{const}]=$$

$$=y\frac{\partial}{\partial x}\big(x(a-x-y)\big)=$$

$$=y\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(x\big)(a-x-y)+x\frac{\partial}{\partial x}\big(a-x-y\big)\right)=$$

$$=y\big(a-x-y+x\big(-1\big)\big)=y\big(a-2x-y\big)=0$$

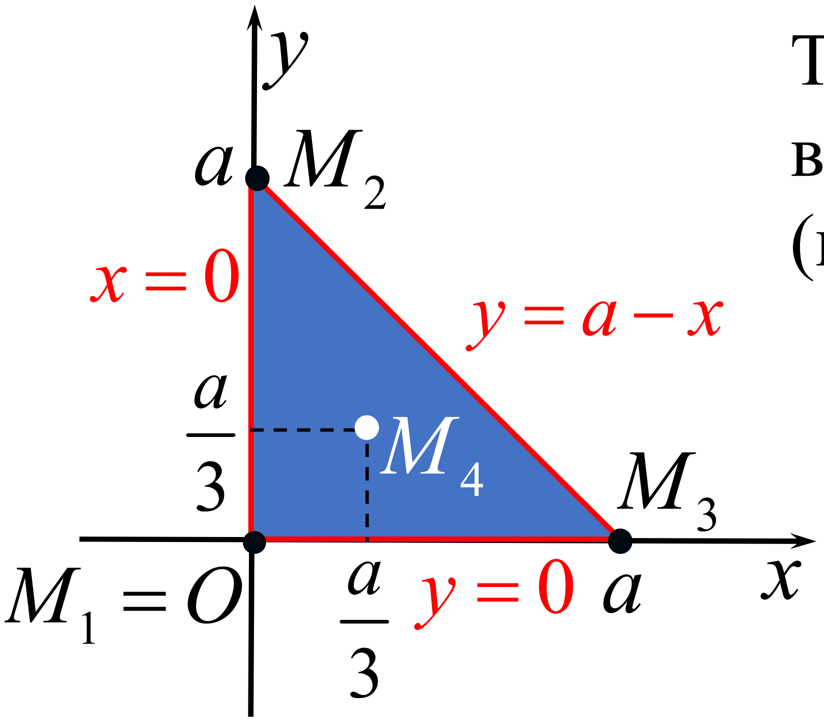
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\big(a-2y-x\big)=0 \quad \text{(аналогично)}$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

Получаем систему: $\begin{cases} y(a-2x-y)=0 \\ x(a-2y-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_1(0,0) \\ \begin{cases} a-2x-y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_2(0,a) \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ a-2y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_3(a,0) \\ \begin{cases} a-2x-y=0 \\ a-2y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_4\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right) \end{array}\right.$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1



Т-ки M_1, M_2 M_3 не лежат внутри компакта D (принадлежат границе γD).

Т. $M_4\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ лежит внутри компакта D.

$$f(M_4)=f\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

2). $\gamma D: x = 0,\ y = 0,\ y = a - x$

$$x = 0 \Rightarrow f = xy(a - x - y) = 0$$

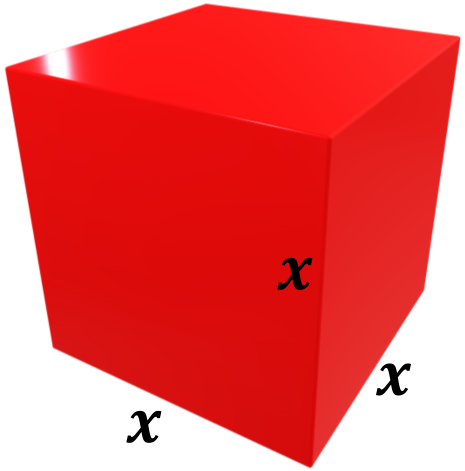
$$y = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$y = a - x \Rightarrow f = 0$$

3). наиб. $f(x, y) = \dfrac{a^3}{27}$ достигается

в точке $M_4\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1



$$x = y = z = \frac{a}{3} \Rightarrow$$ параллелепипед - КУБ