Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии ИЕНиМ УрФУ, III семестр (II курс)

Лекторы: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В., к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 22
Дискретные случайные величины

Лекция 22

Дискретные случайные величины

1. Закон распределения дискретной случайной величины (ДСВ).
2. Операции над (ДСВ).
3. Числовые характеристики ДСВ.
4. Свойства ДСВ.
5. Функция распределения ДСВ.

Закон распределения дискретной случайной величины

Опр. Случайной величиной (СВ) называется величина X, принимающая числовые значения в зависимости от случая.

Опр. Если случайная величина X принимает конечное (или счетное) множество значений, т.е. это множество значений можно перенумеровать:

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots,$$

то она называется дискретной (ДСВ).

Закон распределения дискретной случайной величины

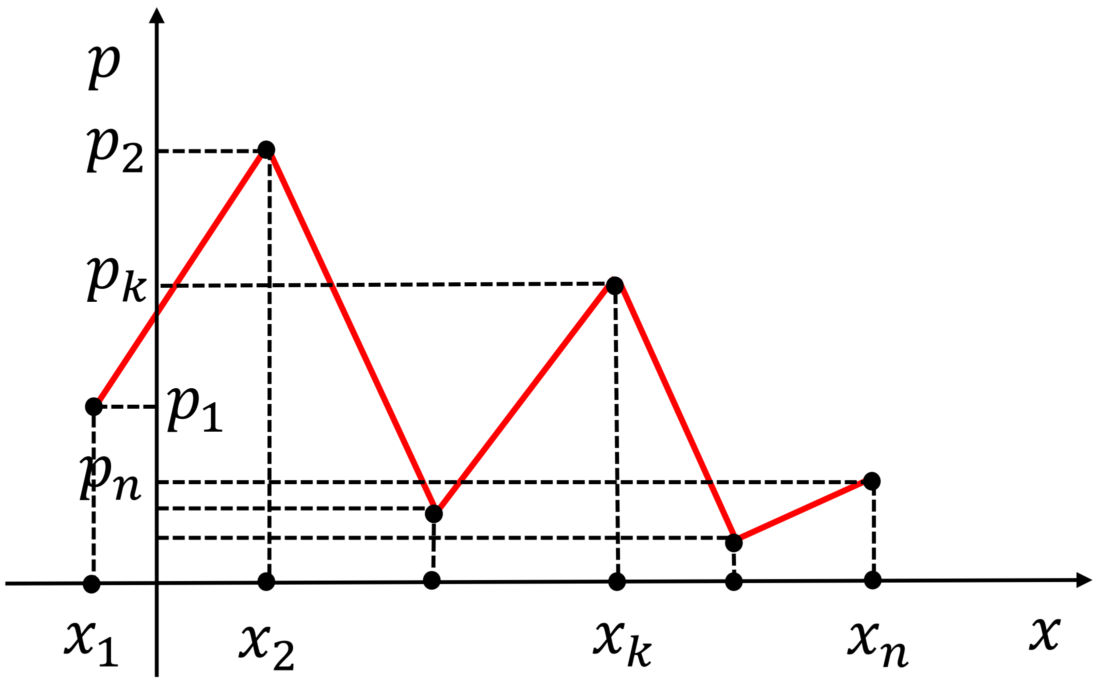
Обозначим через p_k вероятность $P(X = x_k)$ – вероятность того, что ДСВ X принимает значение x_k. Заметим, что $p_k > 0$.

Опр. Закон распределения ДСВ – это таблица

X	x_1	x_2	…	x_k	…
P	p_1	p_2	…	p_k	…

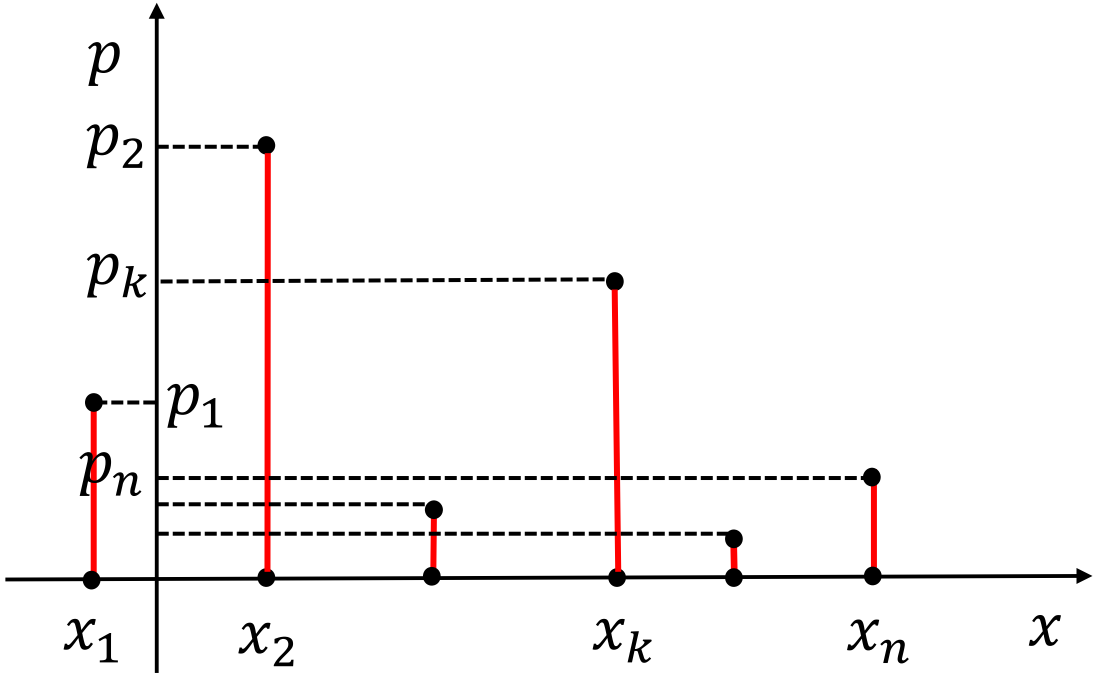
При этом должно выполняться условие $\sum_k p_k = 1$.

Закон распределения (геометрическая интерпретация)



Полигон распределения (I сп.)

Закон распределения (геометрическая интерпретация)

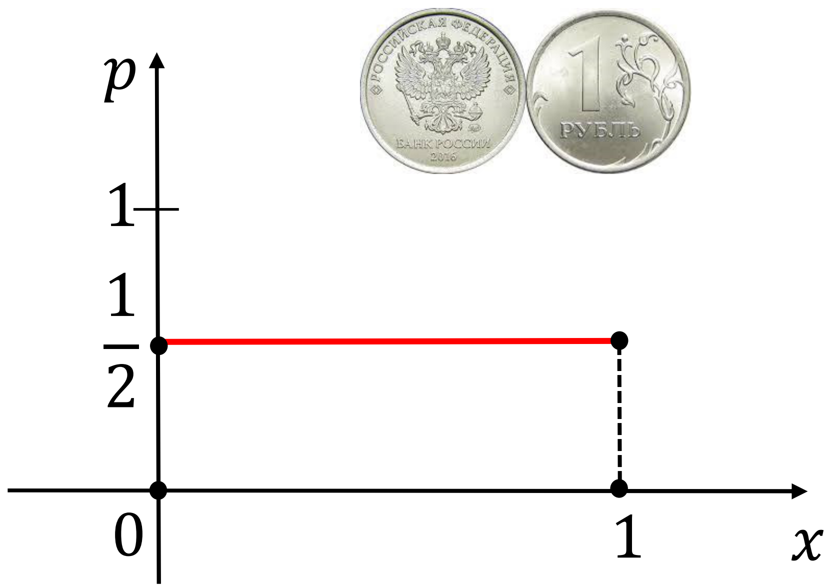


Полигон распределения (II сп.)

Закон распределения ДСВ Пример 1.

Пример 1. Бросается монета. Пусть X − случайная величина, равная 1, если выпала Р, и равная 0, если выпал Г. Тогда закон распределения СВ X:

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

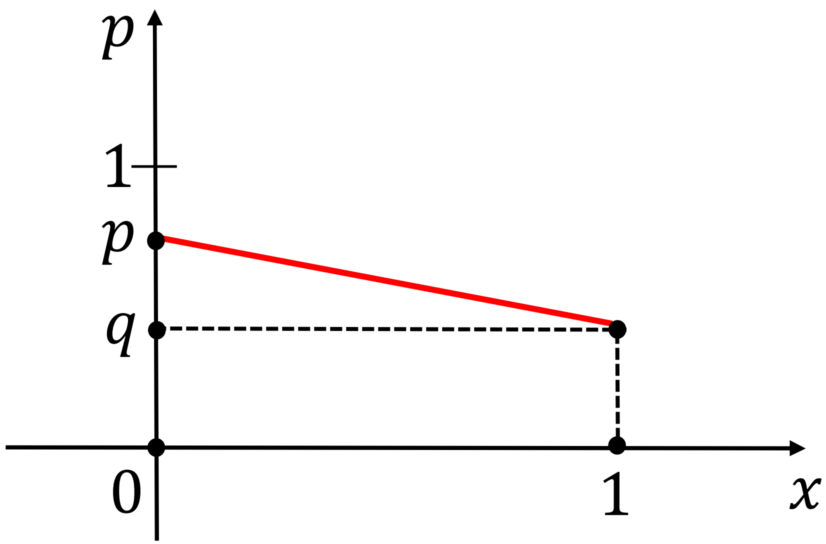


Закон распределения ДСВ
Распределение Бернулли

Пример 2. В общем случае: Пусть X − случайная величина, равная 1, если наступает событие A, и равная 0, если это событие не наступает. Такой закон называется распределением Бернулли.

X	0	1
P	q	p

$$p = p(A),$$
$$q = p(\bar{A}) = 1 - p$$



Закон распределения ДСВ. Пример 3

<u>Пример 3.</u> При игре в «Дартс» $X = 1$, если дротик попал в мишень (событие A), $X = 0$, если не попал (событие $\bar{A}$).

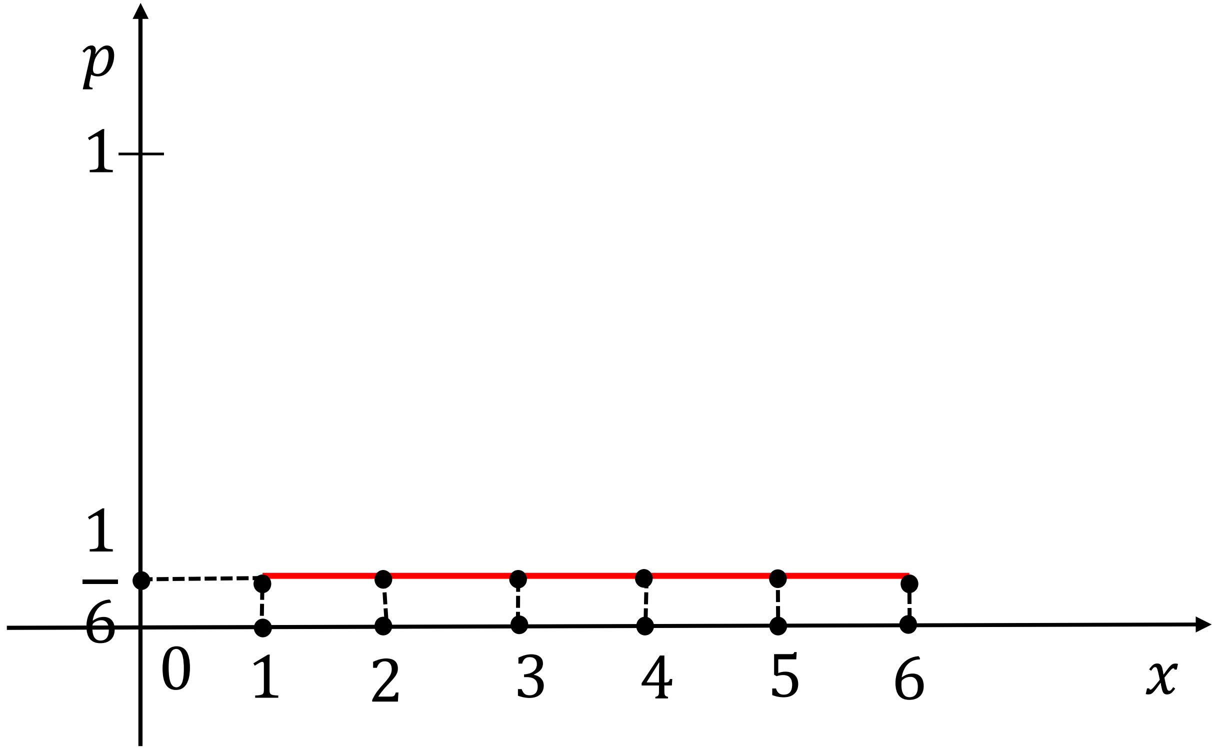
$$p = p(A),$$
$$q = p(\bar{A}) = 1 - p$$

Закон распределения ДСВ
Пример 4

Пример 4. Бросается кубик. Пусть X − случайная величина, равная числу выпавших очков. Тогда закон распределения:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Закон распределения (геометрическая интерпретация). Пример 4

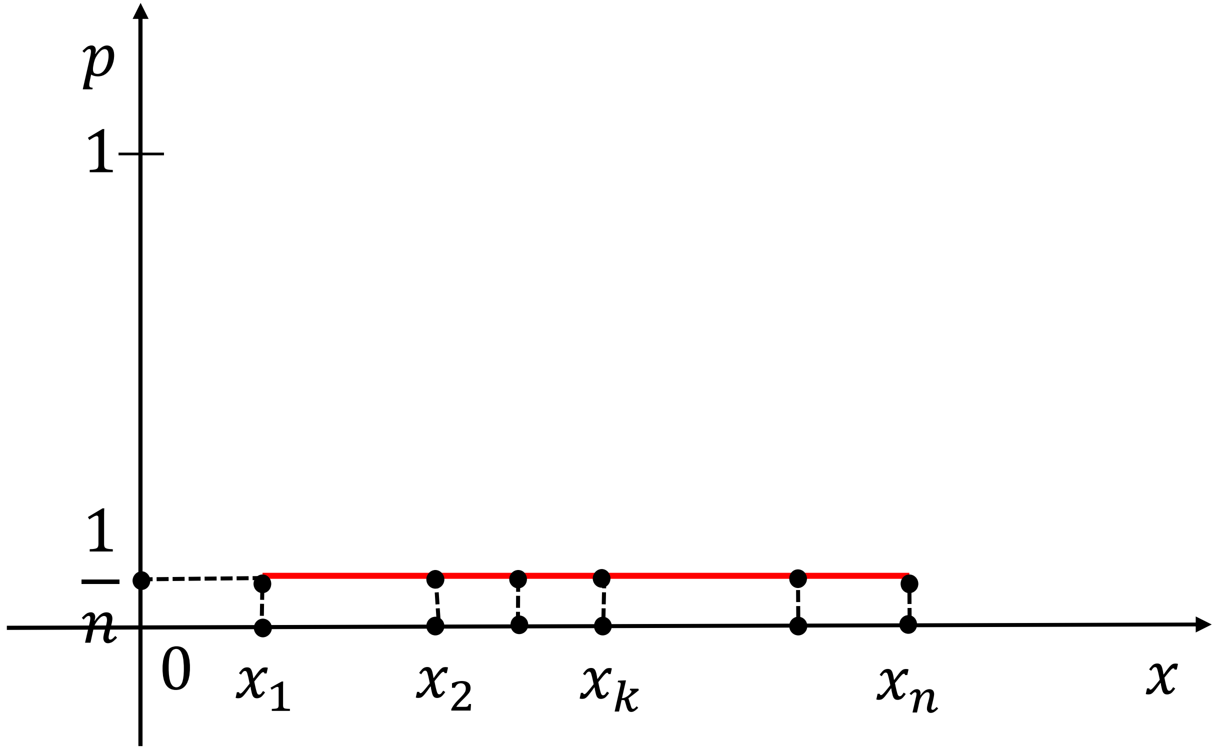


Закон распределения ДСВ. Равномерное дискр. распределение

Пример 5. В общем случае: Пусть X − случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, и $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ для любого $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Такое распределение называется равномерным дискретным распределением.

X	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Закон распределения (геометрическая интерпретация). Пример 5



Закон распределения ДСВ
Геометрическое распределение

Пример 6. Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания.
Вероятность попадания при каждом выстреле равна p (промаха: $q = 1 - p$).
Пусть X − количество сделанных выстрелов.

X	1	2	3	…	k	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{k-1}	…

Геометри-ческая прогрессия

Такое распределение случайной величины X называется геометрическим.

Закон распределения ДСВ
Пример 7

Пример 7. Стрелок производит 6 выстрелов по цели до первого попадания или пока не израсходуются патроны. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p $(q = 1 - p)$. Пусть $X -$ количество выстрелов.

X	1	2	3	4	5	6
P	p	pq	pq^2	pq^3	pq^4	$pq^5 + q^6$

$pq^5 -$ попал на 6 раз,
$q^6 -$ израсходовал все патроны

Операции над ДСВ. Сумма

<u>Опр</u>. Суммой случайных величин X и Y называется случайная величина $Z = X + Y$, которая принимает значения, равные всевозможным суммам значений X и Y:
$z_{ij} = x_i + y_j$, где $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$

X	z_{11}	z_{12}	…	z_{ij}	…
P	p_{11}	p_{12}	…	p_{ij}	…

Произведение ДСВ

Опр. Произведением случайных величин X и Y называется случайная величина $U = XY$, которая принимает значения, равные всевозможным произведениям значений X и Y:

$$u_{ij} = x_i y_j$$

X	u_{11}	u_{12}	...	u_{ij}	...
P	p_{11}	p_{12}	...	p_{ij}	...

Если $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot$
$\cdot P(Y = y_j)$, то X и Y называются независимыми

Числовые характеристики ДСВ
Математическое ожидание

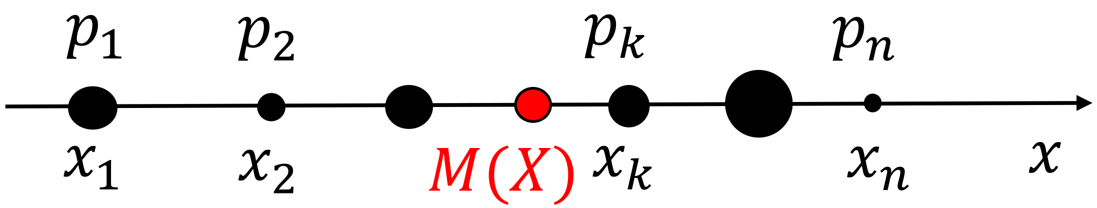
<u>Опр</u>. Математическим ожиданием ДСВ (м.о.) X, заданной законом распределения $P(X = x_k) = p_k$, называется число

$$\boxed{M(X) = \sum_k x_k p_k}$$

Математ. ожидание ДСВ X – это **среднее значение** этой величины с учетом вероятностей.

Матем. ожидание ДСВ
Механическая интепретация

Матем. ожидание ДСВ X есть центр масс системы материальных точек с массами p_k, находящихся на числовой прямой и имеющих координаты x_k, $k \in \{1,2,\dots,n\}$.



Числовые характеристики ДСВ Дисперсия. Среднее квадратичное отклонение

Опр. Дисперсией ДСВ X, называется число

$$\boxed{D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right)}$$

Опр. Среднем квадратичным отклонением ДСВ X называется число

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$$

Числовые характеристики ДСВ Дисперсия. Среднее квадратичное отклонение

Дисперсия и среднее квадратичное отклонение величины X – это мера **рассеяния** случайной величины X относительно математического ожидания этой величины.

Свойства математического ожидания

Теорема 1 (свойства матем. ожидания).

(1) Для любых ДСВ величин X, Y

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

(2) Для независимых ДСВ X, Y

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

(3) Для любой ДСВ X и константы $c \in \mathbb{R}$

$$M(cX) = cM(X), M(c) = c$$

Свойства математического ожидания

Доказательство.

(1) докажем для простоты в предположении, что $X, Y -$ независимы. Пусть $Z = X + Y$.

$$M(Z) = \sum_i \sum_j z_{ij} p_{ij} = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p_i q_j,$$

$$p_i = P(X = x_i), q_j = P(Y = y_i)$$

Тогда

$$M(Z) = \sum_i \sum_j x_i p_i q_j + \sum_i \sum_j y_j p_i q_j =$$

Этот слайд можно не конспектировать

Свойства математического ожидания

$$\sum_j \sum_i x_i p_i q_j + \sum_i \sum_j y_j p_i q_j =$$

$$\sum_j q_j \sum_i x_i p_i + \sum_i p_i \sum_j y_j q_j =$$

$$\sum_j q_j M(X) + \sum_i p_i M(Y) =$$

$$M(X) \sum_j q_j + M(Y) \sum_i p_i = M(X) \cdot 1 + M(Y) \cdot 1$$

■

Этот слайд можно не конспектировать

Свойства математического ожидания

$$(2)\ M(X)M(Y) = \left(\sum_i x_i p_i\right)\left(\sum_j y_j q_j\right) =$$

$$\sum_i \sum_j x_i y_j p_i q_j = \sum_i \sum_j u_{ij} p_{ij} = M(U)\ \blacksquare$$

$$(3)\ M(c) = c\ (\text{упр.})$$

По (2) $M(cX) = M(c)M(X) = cM(X)\ \blacksquare$

Этот слайд можно не конспектировать

Свойства дисперсии

<u>Теорема 2 (свойства дисперсии)</u>.

(1) Для любой ДСВ X

$$D(X) \geq 0 \text{ и } D(X) = 0 \Leftrightarrow X = c$$

(2) Для независимых ДСВ X, Y

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

(3) Для любой ДСВ X и константы $c \in \mathbb{R}$

$$D(cX) = c^2 D(X), D(c) = 0$$

(4) Для любой ДСВ X

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2}$$

Свойства дисперсии. Доказательство

Доказательство.

(1) $D(X) = M(W)$ для $W = \left(X - M(X)\right)^2 \Rightarrow$

$$D(X) = \sum_i w_i p_i, w_i = \left(x_i - M(X)\right)^2 \geq 0,$$

$$p_i = P(W = w_i) > 0 \Rightarrow D(X) \geq 0$$

$D(X) = 0 \Leftrightarrow w_i = 0 \Leftrightarrow x_i = M(X)$, для любого $i \Leftrightarrow X = M(X) = c$ ∎

(2) Без док-ва.

Этот слайд можно не конспектировать

Свойства дисперсии. Доказательство

$$(3)\ D(cX)=M\left(\left(cX-M(cX)\right)^2\right)=\text{по (3) м. о.}=$$

$$=M\left(\left(cX-cM(X)\right)^2\right)=M\left(c^2\left(X-M(X)\right)^2\right)=$$

$$=c^2M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right)=c^2D(X)$$

$$D(c)=M\left(\left(c-M(c)\right)^2\right)=\text{по (3) м. о.}=$$

$$=M\left((c-c)^2\right)=M(0)=0\ \blacksquare$$

Этот слайд можно не конспектировать

Свойства дисперсии. Доказательство

$$(4)\ D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) =$$

$$= M(X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X) + M(X)^2) = \text{по (1) м. о.}$$

$$= M(X^2) - 2M\left(X \cdot M(X)\right) + M(M(X)^2) =$$

$$= \text{по (3) м. о.} =$$

$$= M(X^2) - 2 \cdot M(X) \cdot M(X) + M(X)^2 =$$

$$= M(X^2) - M(X)^2\ \blacksquare$$

Этот слайд можно не конспектировать

Свойства средн. квадратич. отклонения

<u>Теорема 3 (свойства средн. квадр. отклон.)</u>.

(1) Для любой ДСВ X

$$\sigma(X) \geq 0 \text{ и } \sigma(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

(2) Для любой ДСВ X и константы $c \in \mathbb{R}$

$$\sigma(cX) = c\sigma(X), \sigma(c) = 0$$

<u>Док-во – упр</u>.

Числовые характеристики ДСВ Распределение Бернулли

Пример 8. Бросается монета.

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X^2	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$M(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(M(X)\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{2}$$

Числовые характеристики ДСВ
Распределение Бернулли

Пример 9. Пусть X имеет распределение Бернулли.

X	0	1
P	q	p

$$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$M(X^2) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

X^2	0	1
P	q	p

$$\left(M(X)\right)^2 = p^2$$

$$D(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{pq}$$

Числовые характеристики ДСВ
Равномерное дискретное распределение

Пример 10. Бросается кубик. Пусть X − число выпавших очков.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X^2	1	4	9	16	25	36
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Числовые характеристики ДСВ
Равномерное дискретное распределение

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{6} \cdot 17 = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$$

$$M(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{91}{6}$$

$$D(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{257}{36}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{257}}{6}$$

Числовые характеристики ДСВ

Равномерное дискретное распределение

Пример 11. Пусть X равномерн. дискр. величина.

X	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Тогда $M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

среднее арифметическое значений случайной величины X

Числовые характеристики ДСВ
Геометрическое распределение

Пример 12. Рассмотрим геометрич. распределение.

X	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
P	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{k-1}	$\ldots$

Тогда $M(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} =$

$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} =$

$= \left[\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\right] =$

$= p\frac{1}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$; $D(X) = \frac{q}{p^2}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$

Закон распределения и числовые характеристики ДСВ. Упр. 1

Упр 1. Случайная величина X задана законом распределения

X	1	4	6
P	0.4	0.5	0.1

Найти числовые характеристики этой случайной величины.

Ответ: $M(X) = 3$; $D(X) = 3$.

Этот слайд можно не конспектировать

Закон распределения и числовые характеристики ДСВ. Упр. 2

Упр 2. [Шапарь Ю.В. Сб задач по ТВ]. Стрелку выдано 4 патрона. Он производит выстрелы по мишени до первого попадания или пока не израсходует все патроны. Вероятности попадания в мишень при первом, втором, третьем и четвертом выстреле равны соответственно 0.4, 0.7, 0.6, 0.5. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины $X-$ числа израсходованных патронов.

Указание: рассмотреть пример 7.

Ответ: $M(X) = 1{,}872; D(X) = 0{,}77$

Этот слайд можно не конспектировать

Биноминальный закон распределения

<u>Пример 13.</u> Пусть $X_0 -$ случайная величина с распределением Бернулли, т.е. $X_0 = 1$, если наступает событие A, и равная 0, если не наступает.

Пусть $X = X_0 + X_0 + \cdots + X_0 - сумма\ n$ величин X_0. Тогда $X -$ число наступления события A при n независимых испытаниях (схема Бернулли).

Биноминальный закон распределения

Используя свойство (1) матем. ожидания и формулу для матем. ожидания Бернулл. случ. величины, имеем

$$M(X) = M(X_0 + X_0 + \cdots + X_0) = nM(X_0) = np$$

Так как в схеме Бернулли испытания независимы по свойству (2) дисперсии

$$D(X) = D(X_0 + X_0 + \cdots + X_0) = nD(X_0) = npq$$

Следовательно, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Биноминальный закон распределения

Если $p = p(A), q = 1 - p$, то закон распределения случайной величины X.

X	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^n p^n q^0$

Закон распределения случайной величины X называется биномиальным.

Биномиальные коэффициенты

Биноминальный закон распределения
Упр. 3

Упр 3. Монета подбрасывается 5 раз. Найти закон распределение случайной величины $X -$ числа выпадений Г при этих подбрасываниях, а также числовые характеристики этой случайной величины.

Ответ: $M(X) = \frac{5}{2}$; $D(X) = \frac{5}{4}$.

Этот слайд можно не конспектировать

Матем. ожидание суммы случайных величин. Упр. 4

Упр 4. [Шапарь Ю.В. Сб задач по ТВ]. Два спортсмена делают по одному броску в корзину. Вероятность попадания в нее первым спортсменом равно 0.5, а вторым – 0.4. Найдите среднее число попаданий в корзину.

Указание: рассмотреть случайную величину – число попаданий в корзину как сумму двух бернуллиевых случайных величин.

Ответ: 0.9.

Этот слайд можно не конспектировать

Распределение Пуассона

Пример 14. Распределение Пуассона для случ. величины X:

$$\boxed{P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k, k\in\mathbb{N}}$$

- это предельный случай распределения Бернулли при $n\to\infty$, где X − число наступления события в n испытаниях, $\lambda=pn, 0<\lambda<10, n\geq 10, p<0.1;$

Распределение Пуассона

- моделирует ДСВ $X -$ число событий, произошедших с фиксиров. средней интенсивностью λ за фиксиров. время;

- моделирует ДСВ $X -$ число частиц в данном объеме, если средняя плотность частиц в данном объеме равна λ.

Распределение Пуассона. Пример 15

<u>Пример 15</u>. В среднем в магазин заходят 3 человека в мин. Найти вероятность, того, что за 2 мин. в магазин зайдет хотя бы 1 человек.

<u>Решение</u>. Пусть X − число человек, зашедших в магазин за 2 мин.

Тогда в среднем $\lambda = 2 \cdot 3 = 6$ чел. заходят в магазин за 2 мин.

Распределение Пуассона. Пример 15

Требуется найти $P(X \geq 1)$.

Найдем $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) =$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{0!}\lambda^0 + \frac{e^{-\lambda}}{1!}\lambda^1 = e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}(1 + \lambda) =$$

$$= e^{-6}(1 + 6) = \frac{7}{\mathrm{e}^6} \approx 0.02$$

Следовательно,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) \approx 0.98$$

Распределение Пуассона. Пример 16

<u>Пример 16</u>. Оценить среднее количество изюминок, которое должно быть в одной булочке, чтобы в партии из 100 булочек без изюма было не более одной.

Распределение Пуассона. Пример 16

Решение.

Пусть X – число изюминок в одной булочке.

Тогда $P(X=0) \le \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{e^{-\lambda}}{0!}\lambda^0 \le \frac{1}{100}$

$$\frac{1}{e^{\lambda}} \le \frac{1}{100}$$

$$e^{\lambda} \ge 100$$

$$k \ge ln\,100$$

$$k \ge 4{,}6$$

Ответ. не меньше пяти.

Распределение Пуассона. Упр. 5

Упр 5. Средняя плотность болезнетворных микробов в 1 $м^3$ равна 100. Берется на пробу 2 $дм^3$ воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы 1 микроб.

Указание. Взять за X случайную величину – количество микробов в 2 $дм^3$ воздуха и найти среднее значение λ этой случайной величины из условия. Ответ – вероятность $P(X \geq 1)$.

Ответ. ≈ 0.18

Этот слайд можно не конспектировать

Функция распределения ДСВ

Опр. Функцией распределения (интегральной функцией распределения) ДСВ X называется функция, определяемая равенством

$$\boxed{F(X) = P(x < X)}$$

Свойства функции распределения

Теорема 3 (свойства функции распределения).

(1) $0 \le F(x) \le 1,\ F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

(2) $F(x) \uparrow$, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

(3) $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$

(4) $F(x_k - 0) = F(x_k)$ для любого k, т.е. функция $F(x)$ непрерывна слева в точке $x = x_k$,

(5) $F(x_k + 0) - F(x_k) = P(X = x_k)$

Свойства функции распределения

Доказательство. (1) $F(-\infty) = P(x < -\infty) = 0,$

$$F(+\infty) = P(x < +\infty) = 1$$

(2) Пусть $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$F(x_1) = P(x < x_1);$

$F(x_2) = P(x < x_1) + P(\underbrace{x_1 \leq x < x_2}_{\geq 0}) \geq F(x_1)$

(3) $F(b) = P(x < b) = P(X < a \; or \; a \leq X < b) =$

$P(X < a) + P(a \leq X < b) = F(a) + P(a \leq X < b)$

(4)-(5) без док-ва.

Функция распределения ДСВ
Пример 17

<u>Пример 17.</u> Пусть монета брошена 3 раза и X − количество выпавших гербов. Найти функцию распределения этой случайной величины.

<u>Решение.</u> Случайная величина X имеет биномиальное распределение, где $p = q = \frac{1}{2}$

X	0	1	2	3
P	$C_3^0 p^0 q^3$	$C_3^1 p^1 q^2$	$C_3^2 p^2 q^1$	$C_3^3 p^3 q^0$

Функция распределения ДСВ
Пример 17

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2^3}$	$3 \cdot \frac{1}{2^3}$	$3 \cdot \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

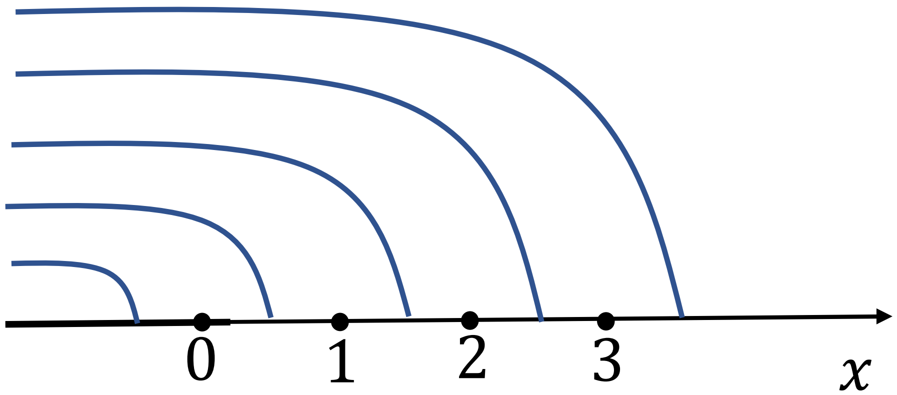
Функция распределения ДСВ
Пример 17

(1) Пусть $-\infty < x \leq 0,$ тогда $F(X) = 0,$ т.к. на $(-\infty; x\ )$ при $-\infty < x \leq 0$ ДСВ X не принимает ни одного значения.

(2) Пусть $0 < x \leq 1,$ тогда $F(X) = \frac{1}{8},$ т.к. на $(-\infty; x\ )$ при $0 < x \leq 1$ ДСВ X принимает только одно значение, равное 0:

$$F(X) = P(X < x) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

Функция распределения ДСВ Пример 17



Функция распределения ДСВ
Пример 17

(3) Пусть $1 < x \leq 2$, тогда $F(X) = \frac{1}{2}$, т.к. на $(-\infty; x\ )$ при $1 < x \leq 2$ ДСВ X принимает ровно два значения, равные 0 и 1:

$$F(X) = P(X < x) = P(X = 0\ or\ X = 1) =$$

$$= P(X = 0\ ) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

Функция распределения ДСВ
Пример 17

(4) Пусть $2 < x \leq 3,$ тогда $F(X) = \frac{7}{8}$, т.к. на $(-\infty; x\ )$ при $2 < x \leq 3$ ДСВ X принимает ровно три значения, равные 0, 1 и 2:

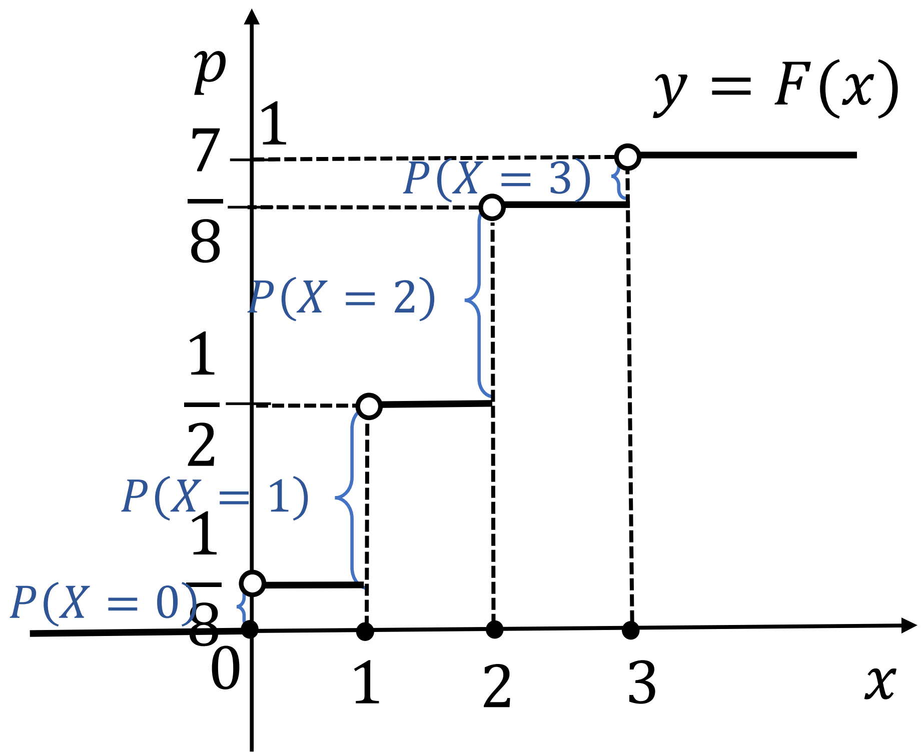
$$F(X) = P(X < x)$$
$$= P(X = 0\ ) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{2}$$

Функция распределения ДСВ
Пример 17

(5) Наконец, пусть $x > 3$, тогда $F(X) = 1$, т.к. на $(-\infty; x\ )$ при $x > 3$ ДСВ X принимает все четыре значения, равные 0, 1, 2 и 3:

$$F(X) = P(X < x)$$
$$= P(X = 0\ ) + P(X = 1) + P(X = 2) +$$
$$+P(X = 3) =$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Функция распределения ДСВ
Пример 17



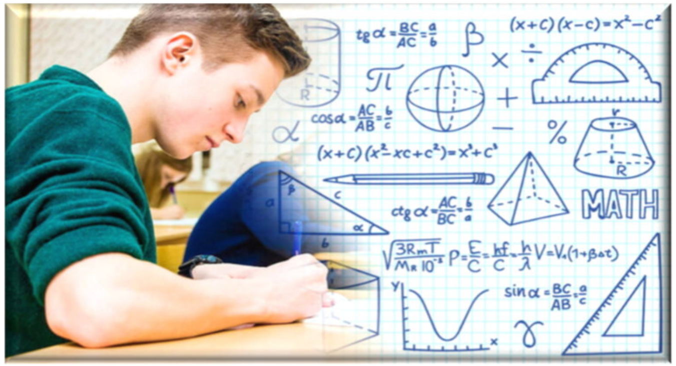
Видно, что $x = x_k$ − точки разрыва I-го рода

Функция распределения ДСВ
Пример 17

<u>Упр 6.</u> Дано распределение случайной величины X – оценки на экзамене по математике:

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Найти функцию распределения этой случайной величины и изобразить ее график.



Этот слайд можно не конспектировать