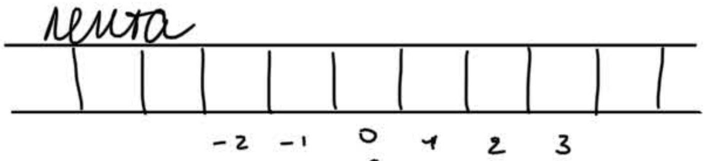
Машина Тьюринга

Опр: Машина Тьюринга $M = (Q, \Gamma, \delta)$, где

Q – мн-во состояний
Γ – входной алфавит
δ – программа

} конечные

лента



на ленту подаются символы (кон. число)

$\boxed{q_0, q_1, \dots, q_n}$ – конечная память

нач. сост.

нельзя обращаться к ячейке по адресу.

В каждый момент времени читающая головка осматривает одну ячейку, в нач. момент времени читают 0ую ячейку.

δ (программа) – конечный список инструкций вида

заголовок команды → $q_i S_j \to q_k S_l \begin{Bmatrix} R \\ L \\ N \end{Bmatrix}$ вправо, влево, не двигать

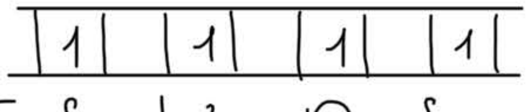
состояние, символ

печатает символ S_l в q_i и переходит в состояние q_k и двигает в R, L или N

Если команды нет, то машина прекращает работу, если есть, то она выполнит её.

Пока считаем, что для каждой пары $(q, S) \in Q \times \Gamma$ есть не более 1 команды с этим заголовком.

Пример: МТ, которая начинает с пустой ленты и печатает последовательность единиц через пробел.



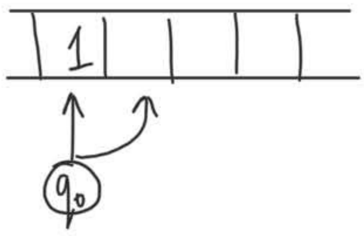
в чётных – 1
в нечётных – 0

$\Gamma = \{1, b\}$ $Q = \{q_0, q_1\}$

символ пустоты

Команды: $q_0 b \to q_1 1 R$

$q_1 b \to q_0 b R$



Пример: МТ, которая начинает с пустой ленты и печатает последовательность натуральных чисел в унарной записи ($3 = 111$) через пробел.

Пример: МТ, которая прибавляет 1 к тому двоичному числу, которое записано на ленте (старший разряд в 0ой ячейке).

$\Gamma = \{1, 0, b\}$

$$\left.\begin{array}{l} q_0 0 \to q_0 0 R \\ q_0 1 \to q_0 1 R \end{array}\right\} \text{просто сдвигаемся вправо}$$

$q_0 b \to q_1 b L$ — если дошли до конца числа, то возвращаемся к младшему разряду.

$q_1 0 \to q_2 1 N$ — если в младшем разряде 0, то просто меняем на 1.

$q_1 1 \to q_3 0 L$

перенос в сл. разряд.

$q_3 0 \to q_2 1 N$

$q_3 1 \to q_3 0 L$

$q_3 b \to q_2 1 N$

двигаемся влево, пока не достигнем 0 или вылетим за пределы числа ($1111 \to 10000$)

Тезис Тьюринга:

Алгоритм = Машина Тьюринга

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ наз. частично вычислимой, если существует МТ $\mathcal{F}$ такая, что начав работу в конфигурации $|0|1|1|\dots|1|b|1|1|\dots|1|b|\dots|b|1|1|\dots|1|b$ ($\underbrace{}_{x_1}$, $\underbrace{}_{x_2}$, ..., $\underbrace{}_{x_n}$) заканчивает её в конфигурации $|b|\underbrace{1|1|\dots|1}_{f(x_1,\dots,x_n)}|b|$, если $f(x_1, \dots, x_n)$ определено и работает вечно, если значение $f(x_1, \dots, x_n)$ не определено.

Вычислимая ф-ия – частично вычислимая ф-ия + всюду определенная.

Скажем, что ф-ия $F(y, x_1, \dots, x_n)$ является универсальной для класса Φ, если выполняется:

- $\forall a \in \mathbb{N} : F(a, x_1, \dots, x_n) \in \Phi$
- $\forall$ ф-ия из Φ так получается, т.е. $\forall f(x_1, \dots, x_n) \in \Phi \ \exists a \in \mathbb{N}$: $F(a, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$

Наблюдение 1 ($\nabla 1$)

Для класса ф-ий Φ существует универсальная $\Leftrightarrow$ Φ – счетен.

Доказательство:

Необходимость ($\Rightarrow$) очевидно

Достаточность ($\Leftarrow$): т.к. Φ – счётен, перенумеруем все ф-ии из Φ: $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$

Положим F так: $F(m, x_1, \dots, x_n) := f_m(x_1, \dots, x_n)$.

Она удовлетворяет определению универсальной ф-ии.

Пример:

Пусть $\Phi = \mathbb{Z}[x]$ (многочлены от одной переменной)

Существует ли $F(y,x) \in \mathbb{Z}[y,x]$ такой, который

универсален для Φ.

Ответ: нет!

Аргумент со степенями: если степени по x

($\deg_x F(y,x) = k$), то все многочлены вида

$F(m,x)$ имеют степень $\leq k$. А мн-ны имеют

любую степень $\Rightarrow$ не получается.

Пример

Пусть Φ - класс всех вычислимых ф-ий одной

переменной. Существует ли для Φ универсальная

вычислимая ф-ия? (просто универсальная сущ.!)

Ответ: нет!

Диагональный аргумент

д/п. Пусть $F(y,x)$ - это универсальная вычислимая ф-ия. Тогда ф-ия $F(x,x)$ - вычислимая. Но тогда и $F(x,x)+1$ вычислима. (т.к. $x+1$ вычислима). Раз $F(y,x)$ - универсальна, то $\exists a \in \mathbb{N}$:

$$F(a,x) = F(x,x)+1$$

Это невозможно, т.к. при $x=a$ противоречие.