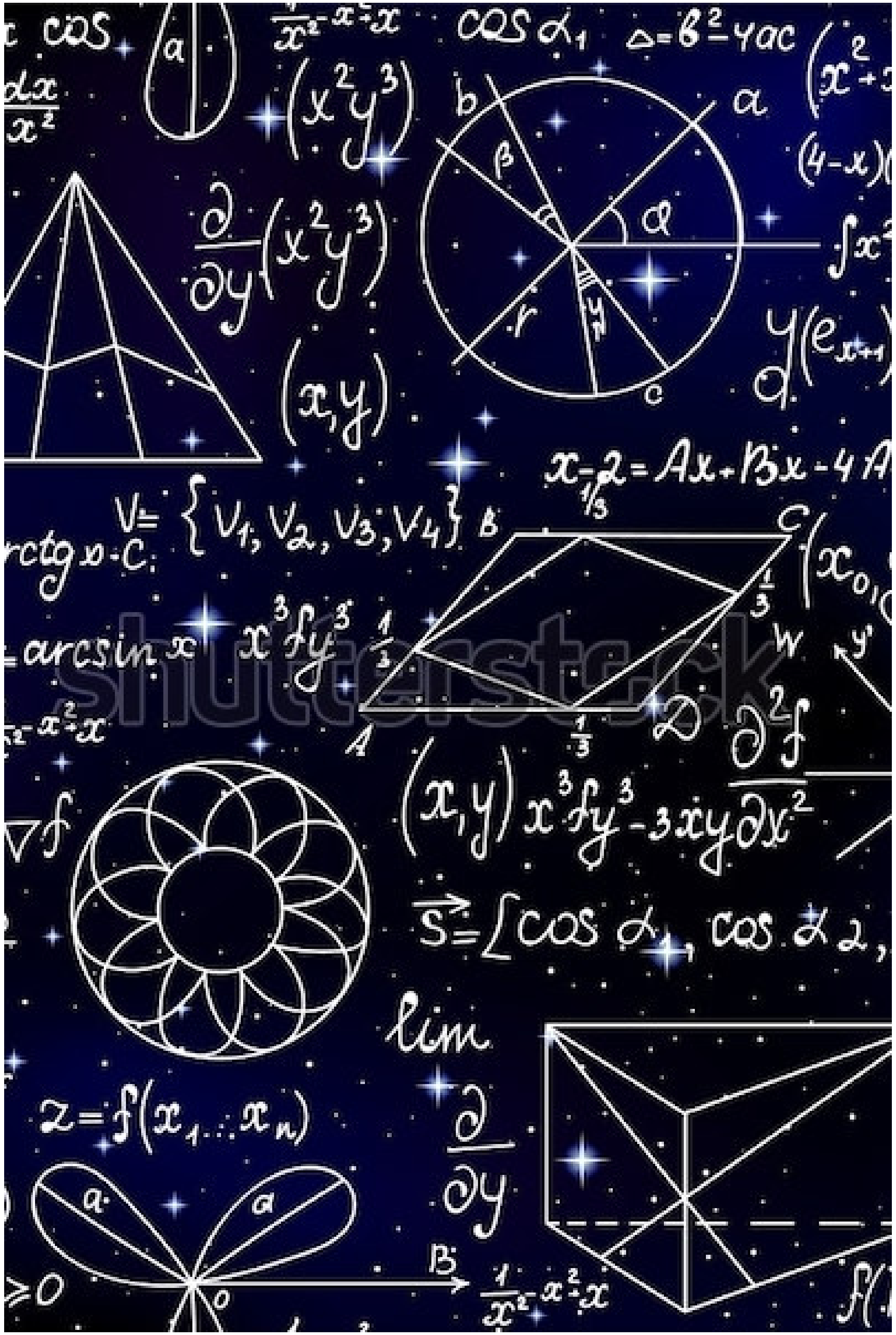


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 18

Неоднородные линейные ДУ II-го порядка

Лекция 18

Неоднородные линейные ДУ II-го порядка

1. Теорема о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (НЛДУ).
2. Метод неопределенных коэффициентов для НЛДУ с пост. коэфф. в левой части и квазимногочленом в правой.
3. Примеры. Задачи.
4. Теорема о суперпозиции решений.

НЛДУ II-го порядка. Определение

Опр. Неоднородным линейным дифференциальным уравнением (НЛДУ) II-го порядка, соответствующим ОЛДУ

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (1)}$$

называется ДУ

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (2)}$$

где $a_1(x), a_2(x), f(x)$ – некоторые непрерывные функции, определенные на интервале (a, b).

Теорема об общем решении НЛДУ

Теорема 1 (об общем решении НЛДУ).
Если $y_0 = y_0(x)$ – общее решение ОЛДУ (1) и $y_ч = y_ч(x)$ – любое частное решение НЛДУ (2) то

$$\boxed{y_н = y_0 + y_ч}$$ – общее решение НЛДУ (2)

Доказательство.

$$y''_н + a_1(x)y'_н + a_2(x)y_н =$$

$$= (y_0 + y_ч)'' + a_1(x)(y_0 + y_ч)' + a_2(x)(y_0 + y_ч) =$$

Теорема об общем решении НЛДУ

$$= \left(y_0'' + y_ч'' \right) + a_1(x) \left(y_0' + y_ч' \right) + a_2(x) \left(y_0 + y_ч \right) =$$

$$= \left(y_0'' + a_1(x) y_0' + a_2(x) y_0 \right) +$$

$$+ \left(y_ч'' + a_1(x) y_ч' + a_2(x) y_ч \right) = 0 + f(x) = f(x) \blacksquare$$

Метод неопределенных коэффициентов

<u>Метод неопределенных коэффициентов</u> используется, если **коэффициенты левой части** уравнения (2) **постоянны:**

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (3)}$$

а **правая часть** уравнения $\boldsymbol{f(x)}$ есть квазимногочлен, т.е.

Метод неопределенных коэффициентов

$$1)\ f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$$

$$2)\ f(x) = e^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right)$$

где $P_n(x), R_m(x), S_k(x)$ − многочлены степеней n, m, k и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Подбор частного решения уравнения (3) будет понятен из следующей схемы.

Алгоритм подбора частного решения НЛДУ с пост. коэфф. в левой части и квазимногочленом в правой части

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ – НЛДУ

$\Downarrow$

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ – ОЛДУ

$\Downarrow$

$\lambda_{1,2}$ – корни хар. уравн. $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

1) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

1.1) α – не корень хар. уравн.

1.1) $y_ч = Q_n(x)e^{\alpha x}$

1.2) α – корень хар. уравн. и $\lambda_1 \neq \lambda_2$

1.2) $y_ч = xQ_n(x)e^{\alpha x}$

1.3) α – корень хар. уравн. и $\lambda_1 = \lambda_2$

1.3) $y_ч = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$

2) $f(x) = e^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right)$

2.1) $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – не корни хар. уравн.

2.1) $y_ч = e^{\alpha x}\left(T_l(x)\cos\beta x + Z_l(x)\sin\beta x\right)$

2.2) $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – корни хар. уравн.

2.2) $y_ч = xe^{\alpha x}\left(T_l(x)\cos\beta x + Z_l(x)\sin\beta x\right)$

Здесь $Q_n(x), T_l(x), Z_l(x)$ – многочлены с **неопределенными коэффициентами** степеней $n, l = \max\{m, k\}$ соответственно.

Вид многочлена $Q_n(x)$ с неопределенными коэффициентами той же степени n, что и у многочлена $P_n(x)$.

n – степень $P_n(x)$	$Q_n(x)$
$n = 0$ ($P_n(x)$ – число)	A
$n = 1$	$Ax + B$
$n = 2$	$Ax^2 + Bx + C$

Вид частного решения. Задача 1

Задача 1: Найти вид частного решения $y_{ч}$ ДУ

$$y'' - 3y' + 2y = f(x),$$

где а) $f(x) = 2e^{3x}$; б) $f(x) = xe^{-x}$;

в) $f(x) = e^{x}$; г) $f(x) = x^2 + x + 1$;

д) $f(x) = \cos x$; е) $f(x) = x\, e^{x} \sin 2x$.

Решение. Это НЛДУ с пост. коэфф. в левой части и квазимногочленом в правой.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ - характерист. уравнение ОЛДУ

$y'' - 3y' + 2y = 0;$ $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ - его корни

Вид частного решения. Задача 1

а) $f(x) = 2e^{3x} = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$

$P_n(x) = 2, n = 0, \alpha = 3 \Rightarrow Q_n(x) = A$

$\alpha = 3$ – не корень характ. уравн. $\Rightarrow$ $\boxed{y_{\text{ч}} = Ae^{3x}}$

б) $f(x) = xe^{-x} = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$

$P_n(x) = x, n = 1, \alpha = -1 \Rightarrow Q_n(x) = Ax + B$

$\alpha = -1$ – не корень характ. уравн. $\Rightarrow$

$\boxed{y_{\text{ч}} = (Ax + B)e^{-x}}$

Вид частного решения. Задача 1

в) $f(x) = e^x = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$

$P_n(x) = 1, n = 0, \alpha = 1 \Rightarrow Q_n(x) = A$

$\alpha = 1$ – **корень** характ. уравн. $\Rightarrow$ $\boxed{y_ч = Axe^x}$

и $\lambda_1 \neq \lambda_2$

г) $f(x) = x^2 + x + 1 = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$

$P_n(x) = x^2 + x + 1, n = 2, \alpha = 0 \Rightarrow$

$Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$

$\alpha = 0$ – не корень характ. уравн. $\Rightarrow$

$\boxed{y_ч = Ax^2 + Bx + C}$

Вид частного решения. Задача 1

д) $f(x) = \cos x = e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$

$\Rightarrow R_m\ (x) = 1, S_k(x) = 0, m = k = l = 0,$
$\alpha = 0, \beta = 1$

$\Rightarrow T_l(x) = A,\ Z_l\,(x) = B$

$\mu_{1,2}\ = \alpha \pm \beta i = \pm i -$ не корни характ. уравн.

$\Rightarrow \boxed{y_{\text{ч}} = A\cos x + B\sin x}$

Заметим, что в частном решении присутствует и cos x, и sin x, хотя в правой части НЛДУ присутствует только cos x!

Вид частного решения. Задача 1

е) $f(x) = xe^x \sin 2x =$

$$= e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$$

$\Rightarrow R_m\ (x) = 0, S_k(x) = x, m = 0, k = 1 \Rightarrow l = 1,$
$\alpha = 1, \beta = 2$

$\Rightarrow T_l(x) = Ax + B,\ Z_l(x) = Cx + D$

$\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i -$ не корни характ. уравн.

$$\Rightarrow \boxed{y_{ч} = e^x\big((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x\big)}$$

Вид частного решения. Задача 2

Задача 2: Найти вид частного решения $y_ч$ ДУ

$$y'' - 2y' + y = e^x,$$

Решение.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ - характерист. уравнение

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$

$f(x) = e^x = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$

$P_n(x) = 1, n = 0, \alpha = 1 \Rightarrow Q_n(x) = A$

$\alpha = 1$ – **корень** характ. уравн. и $\lambda_1 = \lambda_2$

$\Rightarrow \boxed{y_ч = Ax^2e^x}$

Вид частного решения. Задача 3

Задача 3: Найти вид частного решения $y_ч$ ДУ

$$y'' + 2y' + 2y = f(x),$$

где а) $f(x) = 3e^{2x}$; б) $f(x) = 2\sin 3x$;

в) $f(x) = xe^{-x}\cos x$.

Решение.

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ - характерист. уравнение

$D = -4$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Вид частного решения. Задача 3

а) $f(x) = 3e^{2x} = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$

$P_n(x) = 3, n = 0, \alpha = 2 \Rightarrow Q_n(x) = A$

$\alpha = 2 -$ не корень характ. уравн.$\Rightarrow$ $\boxed{y_ч = Ae^{2x}}$

б) $f(x) = 2\sin 3x =$

$$= e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$$

$\Rightarrow R_m\ (x) = 0, S_k(x) = 2, m = k = 0 \Rightarrow l = 0,$

$\alpha = 0, \beta = 3 \Rightarrow T_l(x) = A,\ Z_l(x) = B$

$\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i = \pm 3i -$ не корень характ. уравн.

$\Rightarrow$ $\boxed{y_ч = A\cos 3x + B\sin 3x}$

Вид частного решения. Задача 3

в) $f(x) = xe^{-x}\cos x$

$$= e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$$

$\Rightarrow R_m\ (x) = x, S_k(x) = 0, m = 1, k = 0 \Rightarrow l = 1,$
$\alpha = -1, \beta = 1$

$\Rightarrow T_l(x) = Ax + B,\ Z_l\,(x) = Cx + D$

$\mu_{1,2}\ = -1 \pm i$ – **корни** характ. уравн.

$$\Rightarrow \boxed{y_ч = xe^{-x}((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)}$$

Метод неопред. коэффициентов. Задача 5

Задача 5: Решить ДУ

$$4y'' - y = x^3 - 24x$$

Решение. Это НЛДУ с пост. коэфф. в левой части и квазимногочленом (даже просто многочленом) в правой.

$4\lambda^2 - 1 = 0$ - характерист. уравнение ОЛДУ

$4y'' - y = 0;$

$\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ - действительные корни, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}, y_2 = e^{\frac{1}{2}x}$ - ФСР

Метод неопред. коэффициентов. Задача 5

$$\boxed{y_0 = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}}$$ - общее решение ОЛДУ

$$f(x) = x^3 - 24x = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$P_n(x) = x^3 - 24x, n = 3, \alpha = 0$$

$$\Rightarrow Q_n(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$\alpha = 0 -$ не корень характ. уравн.$\Rightarrow$

$$\boxed{y_{\text{ч}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}$$ - частное решение НЛДУ

Метод неопред. коэффициентов. Задача 5

Подставим решение $y_ч$ в исходное уравнение:

$$y_ч' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y_ч'' = 6Ax + 2B$$

$$4\cdot\left(6Ax+2B\right)-\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)=x^3-24x$$

$$-Ax^3-Bx^2+(24A-C)x+8B-D=x^3-24x$$

$$\begin{cases} x^3: -A=1 \\ x^2: -B=0 \\ x: 24A-C=-24 \\ x^0:\ 8B-D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=0 \\ -24-C=-24 \\ -D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=0 \end{cases}$$

Метод неопред. коэффициентов. Задача 5

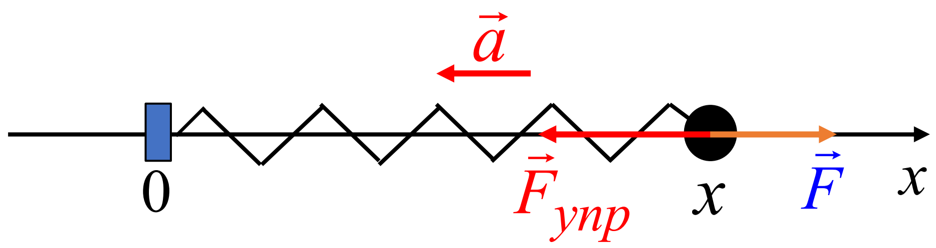
$\boxed{y_ч = -x^3}$ – частное решение НЛДУ

$\boxed{y_н = y_0 + y_ч}$ – общее решение НЛДУ по теореме 2

Ответ: $\boxed{y_н = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} - x^3}$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

Задача 6: Шарик массы $m = 0{,}01$кг находится под действием двух сил: силы упругости, с $k = 1$Н/м и возмущающей силы $F = F_0 \sin pt$ для $F_0 = 0{,}2$Н и а) $p = 15$Гц и б) $p = 10$Гц. Найти зависимость отклонения x от полож. равновесия от времени.



Решение.

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_{упр\,x} + F_x = ma_x$$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$-kx + F_0 \sin pt = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin pt$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin pt$$

$$\boxed{\begin{gathered} \ddot{x} + \omega^2 x = b \sin pt, \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ b = \frac{F_0}{m} \end{gathered}} \Rightarrow \begin{gathered} \ddot{x} + 100x = 20 \sin pt - \text{ДУ} \\ \omega = 10,\ b = 20 \end{gathered}$$

Перепишем ДУ в более привычном для нас виде:

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$\boxed{y'' + 100y = 20\sin px}$ – НЛДУ с пост. коэфф. в левой части и квазимн. в пр. части

ОЛДУ: $y'' + 100y = 0$

$\lambda^2 + 100 = 0$ – характер. уравнение

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-100} = \pm 10i$ – комплексн.-сопряж. корни

$\lambda_{1,2} = 0 \pm 10i = \alpha_0 \pm i\beta_0 \Rightarrow \alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 10$

$\Rightarrow y_1 = \cos 10x,\ y_2 = \sin 10x$ - ФСР

$\boxed{y_0 = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x}$ - общее решение ОЛДУ

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$f(x) = 20\sin px =$$
$$= e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$$

$\Rightarrow R_n\ (x) = 0, S_k(x) = 20, m = k = 0 \Rightarrow l = 0,$
$\alpha = 0, \beta = p \Rightarrow T_l(x) = A,\ Z_l\,(x) = B$

$\lambda = \alpha \pm \beta i = \pm pi$

а) $p = 15$

$\Rightarrow \lambda = \alpha \pm \beta i = \pm 15i -$ не корни характ. уравн.

$\Rightarrow \boxed{y_{ч} = A\cos 15x + B\sin 15x}$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

Подставим решение $y_ч$ в исходное уравнение:

$$\boxed{y'' + 100y = 20\sin 15x}$$

$$y_ч' = -15A\sin 15x + 15B\cos 15x$$

$$y_ч'' = -225A\cos 15x - 225B\sin 15x$$

$$(-225A\cos 15x - 225B\sin 15x) +$$

$$+100(A\cos 15x + B\sin 15x) = 20\sin 15x;$$

$$(-125A)\cos 15x + (-125B)\sin 15x =$$

$$= 0\cdot\cos 15x + 20\sin 15x;$$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

Приравняем коэффициенты при $\cos 15x$ и $\sin 15x$:

$$\begin{cases} -125A = 0 \\ -125B = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{4}{25} \end{cases}$$

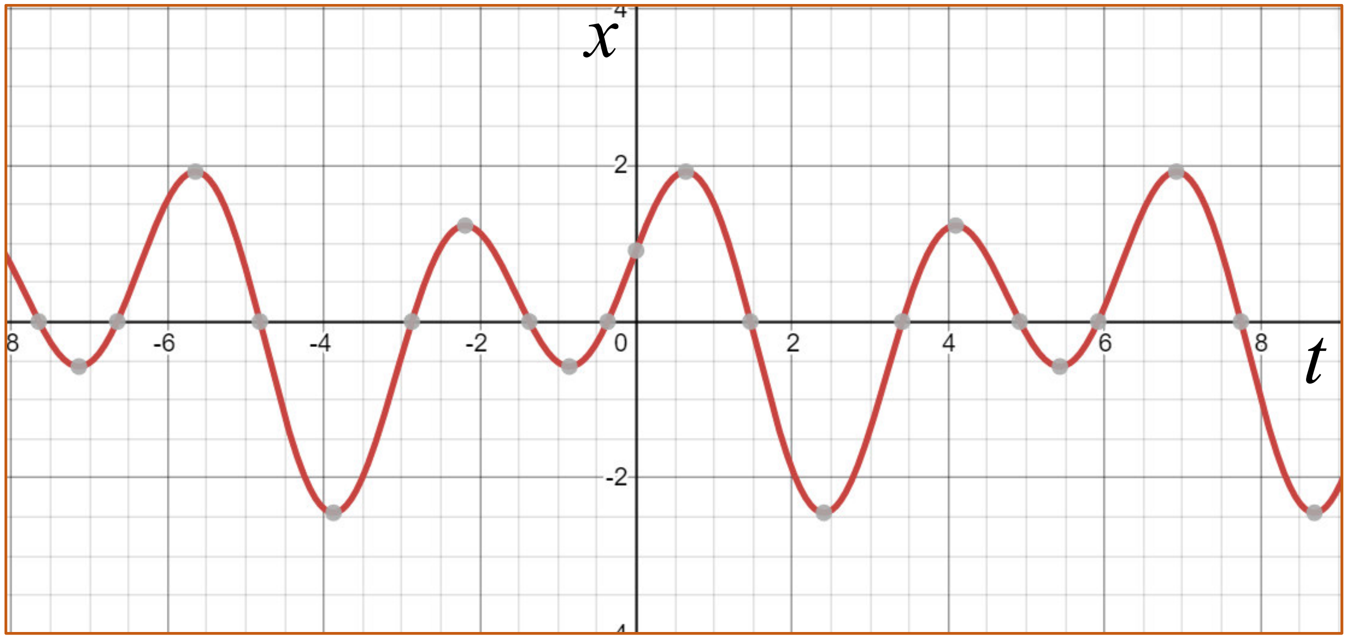
$$\boxed{y_{\text{ч}} =- -\frac{4}{25}\sin 15x}$$

$$\boxed{y_{\text{н}} = C_1\cos 10x + C_2\sin 10x - \frac{4}{25}\sin 15x}$$

- общее решение НЛДУ

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$\boxed{x = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t - \frac{4}{25} \sin 15t}$$



Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

б) $p = 10$

$$f(x) = 20 \sin 10x =$$
$$= e^{\alpha x}(R_m(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

$\Rightarrow R_n\ (x) = 0, S_k(x) = 10, m = k = 0 \Rightarrow l = 0$
$\alpha = 0, \beta = 10 \Rightarrow T_l(x) = C,\ Z_l(x) = D$

$\lambda = \pm 10i$ – **корень** характ. уравн.

$$\Rightarrow \boxed{y_ч = x(C \cos 10x + D \sin 10x)}$$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

Показать сам-но, что $C = -1, D = 0$.

$\Rightarrow \boxed{y_{\text{ч}} = -x\cos 10x}$

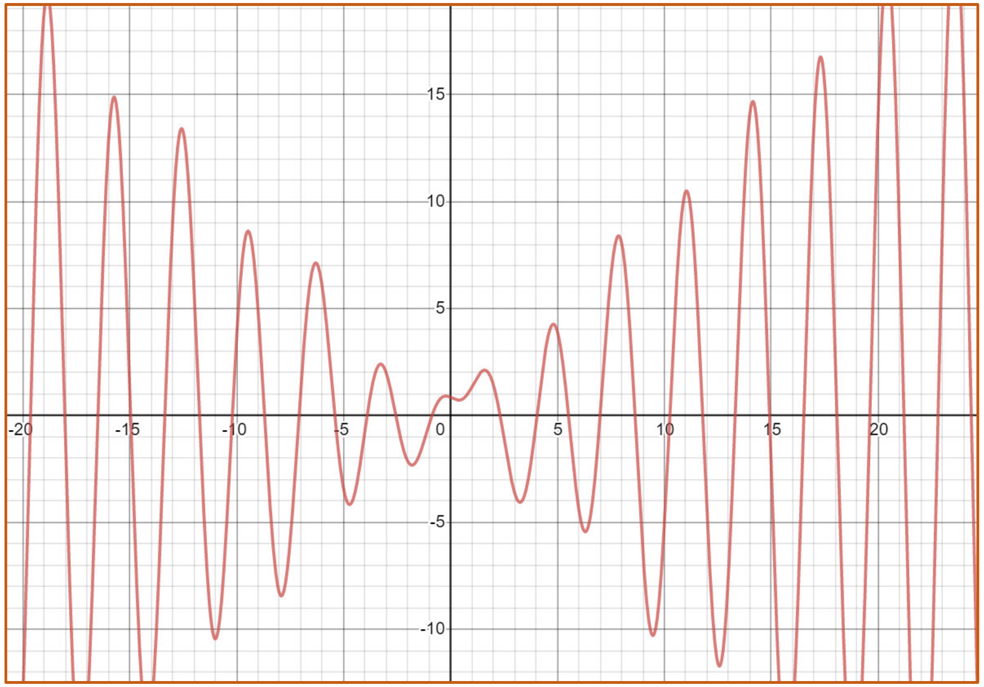
$$\boxed{y_{\text{н}} = C_1\cos 10x + C_2\sin 10x - x\cos 10x}$$

- общее решение НЛДУ

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$\boxed{x = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t - x \cos 10t}$$

- общее решение НЛДУ



явление резонанса!

Теорема о суперпозиции решений НЛДУ

<u>Теорема 2 (о суперпозиции решений)</u>.

Если

- $y_0 = y_0(x)$ – общее решение ОЛДУ

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$$

- $y_{ч1} = y_{ч1}(x)$ – частное решение НЛДУ

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x)}$$

- $y_{ч2} = y_{ч2}(x)$ – частное решение НЛДУ

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)}$$

Теорема о суперпозиции решений НЛДУ

то

$\boxed{y_н = y_0 + y_{ч1} + y_{ч2}}$ – общее решение НЛДУ

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)}$$

<u>Доказательство</u> аналогично док-ву теоремы 1 (упр.)