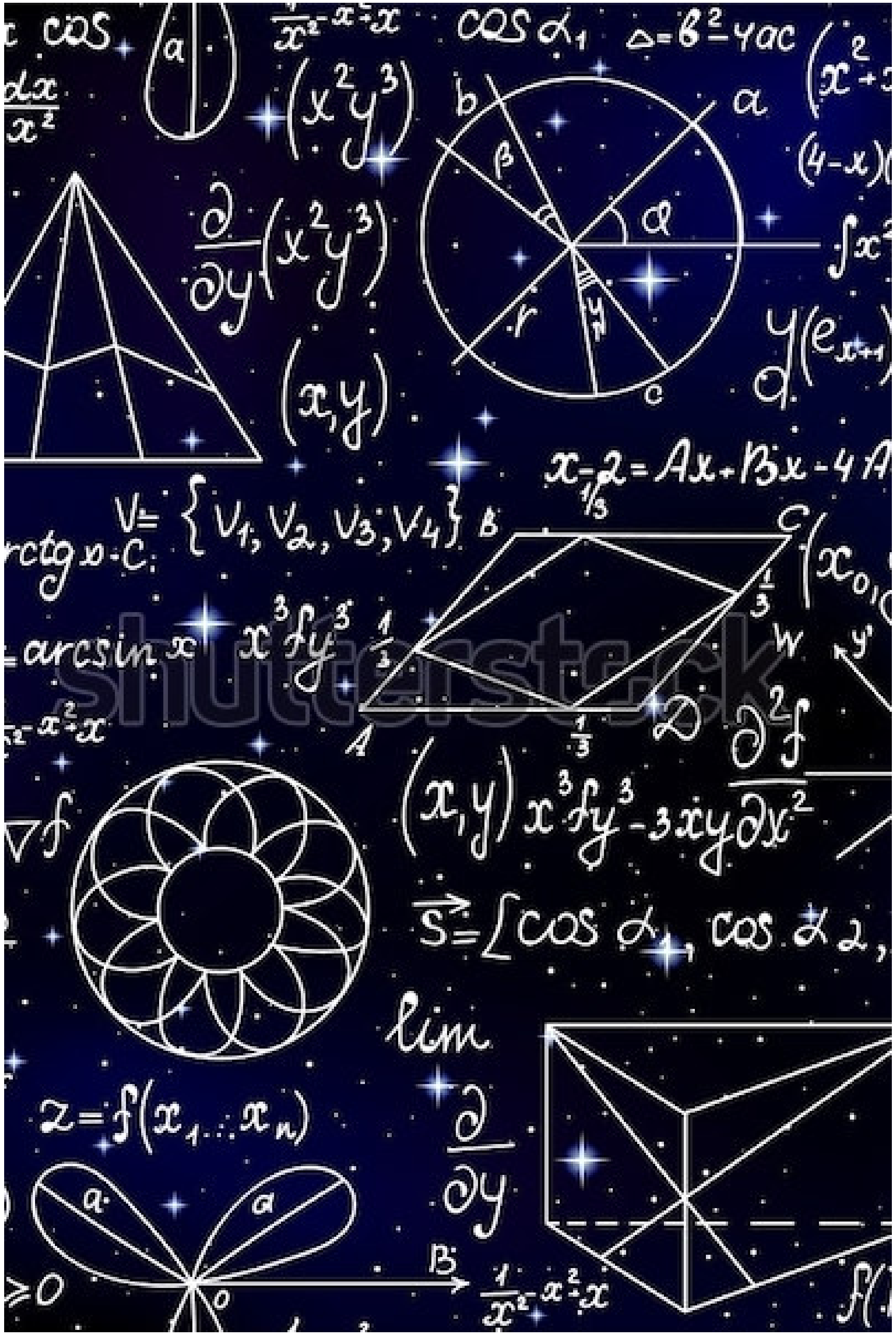


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 17 (часть 2, полная версия)

Однородные линейные ДУ II-го порядка

Лекция 17 (часть 2)

Однородные линейные ДУ II-го порядка

1. Однородные линейные дифференциальные уравнения II порядка (ОЛДУ).
2. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений (ФСР). Теорема об общем решении ОЛДУ.
3. ОЛДУ II порядка с постоянными коэффициентами. Теорема об общем решении ОЛДУ с постоянными коэффициентами.

ОЛДУ II-го порядка. Определение

Опр. Однородным линейным дифференциальным уравнением (ОЛДУ) II-го порядка называется ДУ

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (1)}$$

где $a_1(x), a_2(x)$ – некоторые функции, определенные на интервале (a, b).

Пример 1. ДУ II-го порядка
$y'' - e^x y' + 2xy = 0$, $y'' + \omega^2 y = 0$
являются ОЛДУ, а ДУ $y'' + \omega^2 \sin y = 0$ – нет.

Теорема существования и единствености решения ОЛДУ

Теорема 1 (теорема Коши существования и единственности решения ОЛДУ II-го порядка).

Если для ОЛДУ (1) функции $a_1(x), a_2(x)$ непрерывны на (a, b),

то для любой точки $x_0 \in (a, b)$ на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h) \subseteq (a, b)$ *существует единственное решение* $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее НУ $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Теорема существования и единственности решения ОЛДУ. Доказательство

Доказательство.

ОЛДУ (1) представляет собой ДУ II порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

где $f(x, y, y') = -a_1(x)y' - a_2(x)y$ непрерывна по переменным x, y, y'. И частные производные

$$f'_y(x, y, y') = -a_2(x)y, \quad f'_{y'}(x, y, y') = -a_1(x)$$

тоже непрерывны.

Теорема существования и единственности решения ОЛДУ. Доказательство

А значит, утверждение теоремы следует из теоремы существования и единственности для ДУ II порядка. ■

Везде ниже мы будем предполагать, что функции $a_1(x), a_2(x) -$ непрерывны.

Теорема о частном решении ОЛДУ

Теорема 2 (о частном решении ОЛДУ).

Если функции $y_1(x), y_2(x)$ –решения ОЛДУ (1),

то для любых коэффициентов C_1, C_2 функция

$$\tilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

тоже является решением ОЛДУ (1).

Теорема о частном решении ОЛДУ Доказательство

Доказательство. Пусть функции $y_1(x), y_2(x)$ – решения ОЛДУ (1). Тогда

$$\begin{array}{l} y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0 \ (\times C_1) \\ y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0 \ (\times C_2) \end{array} +$$

$$\begin{array}{l} \left(C_1 y_1'' + C_1 a_1(x) y_1' + C_1 a_2(x) y_1\right) + \\ +\left(C_2 y_2'' + C_2 a_1(x) y_2' + C_2 a_2(x) y_2\right) = 0 \end{array} \Rightarrow$$

Теорема о частном решении ОЛДУ
Доказательство

$$\left(\overbrace{C_1y_1''+C_2y_2''}^{\tilde{y}''}\right)+a_1(x)\left(\overbrace{C_1y_1'+C_2y_2'}^{\tilde{y}'}\right)+$$

$$+a_2(x)\left(\overbrace{C_1y_1+C_2y_2}^{\tilde{y}}\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\tilde{y}''+a_1(x)\tilde{y}'+a_2(x)\tilde{y}=0$$

$\Rightarrow$ функция $\tilde{y}$ тоже является решением ОЛДУ (1).■

Линейная зависимость функций

Опр. Функции $f_1(x), f_2(x)$ называются линейно зависимыми на (a, b), если существуют такие числа α, β что $f_1(x) = \alpha f_2(x)$ или $f_2(x) = \beta f_1(x)$ для любого $x \in (a, b)$.

Пример 2. Функции $f_1(x) = e^x$ и $f_2(x) = 2e^x$ линейно зависимы.

Пример 3. Функции $f_1(x) = e^x$ и $f_2(x) = e^{2x}$ линейно независимы (почему ?-упр.)

Определитель Вронского

Опр. Пусть функции $f_1(x), f_2(x)$ определены и дифференцируемы на (a, b). Определитеем Вронского называется определитель

$$\boxed{W[f_1, f_2](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}}$$

Теорема 3 (об определителе Вронского).
Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ линейно независимы на $(a, b) \Leftrightarrow W[f_1, f_2](x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$.

Доказательство теоремы об определителе Вронского

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $W[f_1, f_2](x) \neq 0$.

От противного: пусть функции $f_1(x), f_2(x)$ линейно зависимы, т.е. $f_1(x) = \alpha f_2(x)$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы об определителе Вронского

Тогда

$$W[f_1, f_2](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha f_2(x) & f_2(x) \\ \alpha f_2'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} f_2(x) & f_2(x) \\ f_2'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ противоречие}$$

$(\Rightarrow)$ без док-ва. ■

Фундаментальная система решений

Опр. Фундаментальной системой решений (ФСР) ОЛДУ называются два частных линейно независимых решения этого уравнения.

Пример 4. Функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$ являются ФСР ОЛДУ $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1). Функции y_1 и y_2 лин. независ. (см. пример 2).

2) $y_1' = e^x, y_1'' = e^{2x} \Rightarrow y_1'' - 3y_1' + 2y_1 =$

$= e^x - 3e^x + 2e^x = 0 \Rightarrow y_1$ – решение ОЛДУ.

Для y_2 аналогично (упр.)

Теорема об общем решении ОЛДУ

Теорема 4 (об общем решении ОЛДУ).
Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – ФСР ОЛДУ (1), то $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – общее решение (1).

Доказательство.
Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – ФСР ОЛДУ (1)

Тогда по теореме 2 для любых коэффициентов C_1, C_2 функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – частное решение ОЛДУ (1).

То, что любое частное решение ОЛДУ (1) имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ примем без док-ва. ■

Общее решение ОЛДУ. Пример 4

Пример 5.

Функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$ являются ФСР ОЛДУ $y'' - 3y' + 2y = 0$ (см. пример 4).

Следовательно, $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ – общее решение этого ОЛДУ.

ОЛДУ с постоянными коэффициентами. Определение

Опр. Уравнение

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2)}$$

где a_1, a_2 – некоторые числа, называется ОЛДУ с постоянными коэффициентами.

Пример 6. ОЛДУ $y'' + \omega^2 y = 0$ (пример1), $y'' - 3y' + 2y = 0$ (см. примеры 4,5) являются ОЛДУ с пост. коэффициентами.

Метод Эйлера решения ОЛДУ с пост. коэффициентами

Метод Эйлера заключается в том, что частное решение ОЛДУ с пост. коэфф. подбирается в виде функции $y = e^{\lambda x}$, где λ − число.

Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Подставим в (2):

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

Метод Эйлера решения ОЛДУ с пост. коэффициентами

<u>Вывод:</u> Функция $y = e^{\lambda x}$ является частным решением ОЛДУ (2) с пост. коэфф. $\Leftrightarrow$ число λ является корнем характеристического уравнения

$$\boxed{\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (3)}$$

Теорема об общем решении ОЛДУ с пост. коэфф.

Теорема 5. Пусть для ОЛДУ с пост. коэфф.

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$$

λ_1, λ_2 – корни характер. уравнения

$$\boxed{\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0}$$

Тогда возможно три случая:

Теорема об общ. реш. ОЛДУ с пост. коэфф.

1) если λ_1, λ_2 – действительные и $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$ – ФСР и

$y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ – общее решение

2) если λ_1, λ_2 – действительные и $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$,

то $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}$ – ФСР и

$y_0 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ – общее решение

3) если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно-сопряженные

то $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ – ФСР

$y_0 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ – общ. реш.

Теорема об общем решении ОЛДУ с пост. коэфф. Доказательство

Доказательство. В каждом из случаев нужно показать, что y_1, y_2 – ФСР. Тогда вид общего решения следует из теоремы 4.

1) Пусть λ_1, λ_2 – действительные и $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Тогда $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$ – частные решения ОЛДУ (2) (см. вывод).

Покажем, что y_1, y_2 образуют ФСР. Для это докажем их линейную независимость.

Теорема об общем решении ОЛДУ с пост. коэфф. Доказательство

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \Rightarrow$ по <u>теореме 3</u>

функции y_1, y_2 линейно независимы.

Теорема об общем решении ОЛДУ с пост. коэфф. Доказательство

2) Случай, когда $\lambda_1, \lambda_2 -$ действительные и $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ примем без док-ва.

3) Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i -$ комплексно-сопряженные.

Тогда $z_1 = e^{\lambda_1 x}, z_2 = e^{\lambda_2 x} -$ частные **комплексные** решения ОЛДУ (2) (см. <u>вывод</u>).

Теорема об общем решении ОЛДУ с пост. коэфф. Доказательство

2) Случай, когда $\lambda_1, \lambda_2 -$ действительные и $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ примем без док-ва.

3) Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i -$ комплексно-сопряженные.

Тогда $z_1 = e^{\lambda_1 x}, z_2 = e^{\lambda_2 x} -$ частные **комплексные** решения ОЛДУ (2) (см. вывод).

Но нам нужны **действительные** решения!

Теорема об общем решении ОЛДУ с пост. коэфф. Доказательство

Заметим, что

$$z_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) = z$$

$$z_2 = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right) = \overline{z}$$

По теореме 2 функции являются частными решениями ОЛДУ:

Теорема об общем решении ОЛДУ с пост. коэфф. Доказательство

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) + \right.$$

$$\left. + e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)\right) =$$

$= e^{\alpha x}\cos\beta x$ - **действительное** решение

Теорема об общем решении ОЛДУ с пост. коэфф. Доказательство

Аналогично (упр.),

$$y_2 = \frac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$ **- действительное** решение

Линейную независимость доказать сам.-но при помощи $W[y_1, y_2]$ (как в случае 1)$\blacksquare$

Задача 1 на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 1

Задача 1: Найти общее решение ДУ

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Решение. Это ОЛДУ с пост. коэфф.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ - характерист. уравнение

$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 2$ - действительные различные корни

$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}$ - ФСР

$\boxed{y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$ - общее решение

Задача 2 на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 2

Задача 2: Найти общее решение ДУ

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Решение. Это ОЛДУ с пост. коэфф.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ - характерист. уравнение

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ - действительные равные корни

$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x$ - ФСР

$\boxed{y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x}$ - общее решение

Задача 3 на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3

Задача 3: Найти общее решение ДУ

$$y'' + y' + y = 0$$

Решение. Это ОЛДУ с пост. коэфф.

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ - характерист. уравнение

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ - комплексно-сопряженные корни

Задача 3 на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3

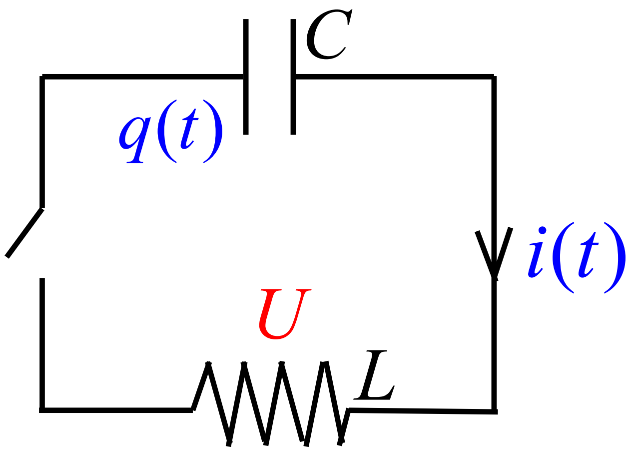
$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x,\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$ - ФСР

$$\boxed{y_0 = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x}$$

- общее решение

Задача 4 по физике на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3



Задача Коши:

$$\begin{cases} q'' + \omega^2 q = 0 \\ q(0) = q_0 \\ q'(0) = i(0) = 0 \end{cases} \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

- НУ

<u>Решение.</u> Это ОЛДУ с пост. коэфф.

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ - характерист. уравнение

Задача 4 по физике на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3

$$D = 0 - 4 \cdot 1 \cdot \omega^2 = -4\omega^2 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4\omega^2}}{2} = \frac{\pm i\sqrt{4\omega^2}}{2} = \frac{\pm i \cdot 2\omega}{2} = \pm \omega i$$

- компл.-сопряж. корни $\Rightarrow$ $\alpha = 0, \beta = \omega \Rightarrow$

$q_1 = \cos \omega t,\ q_2 = \sin \omega t$ - ФСР

$\boxed{q_{\text{общ}} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t}$ - общее решение

Задача 4 по физике на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3

Подставим НУ в общее решение:

$$\left(q_{\text{общ}}\right)' = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$$

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ q'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ 0 = -\omega C_1 \sin 0 + \omega C_2 \cos 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = q_0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{q_{\text{ч}} = q_0 \cos \omega t}$$ - частное решение